

傾いた側壁をもつ平行四辺形領域内の熱対流

京都大学情報学研究科 深澤 義成 (Yoshinari Fukazawa), 船越 満明 (Mitsuaki Funakoshi)

Graduate School of Informatics,
Kyoto University

側壁が傾いている平行四辺形領域内の 2 次元熱対流について調べた。図 1 のように、長さ L の上下の壁が距離 d だけ離れて水平に置かれており、側壁は鉛直方向から角度 ϕ だけ傾いているとする。アスペクト比 A を $A \equiv L/d$ で定義する。すべての壁は完全熱伝導境界条件を満たし、上の壁での温度は T_t 、下の壁での温度は $T_b (> T_t)$ とする。また、側壁においては、鉛直方向の温度勾配が $(T_b - T_t)/d$ であり、上下の壁と交わる点では上下の壁の温度に等しいような温度分布であるとする。また、すべての壁ですべりなしの条件を満たすとする。上下の壁と平行な向きが ξ 軸方向、側壁と平行な向きが η 軸方向となり、平行四辺形の中心を原点とする斜交座標 ξ, η を導入し、水平方向を x 軸、鉛直方向を z 軸とするデカルト座標と

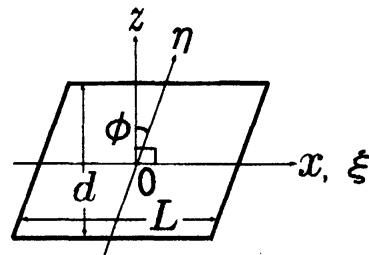


図 1: 流体領域と座標系

$$x = \xi + \eta \sin \phi, \quad (1)$$

$$z = \eta \cos \phi. \quad (2)$$

で結び付けられるとする。ブシネスク近似を用いて、連続の式、ナビエ・ストークス方程式、熱拡散方程式、状態方程式と境界条件を (ξ, η) 座標で書くと、この方程式系は熱伝導解をもつ。長さ、時間、温度を $d, d^2/\kappa$ (κ は熱拡散係数), $T_b - T_t$ を単位として無次元化し、無次元化速度の ξ 成分 u_ξ 、 η 成分 u_η が $u_\xi = \partial_\eta \psi, u_\eta = -\partial_\xi \psi$ で与えられる流れ関数 ψ を導入すると、 ψ と無次元化温度の熱伝導解での値からのずれ θ に対する支配方程式

$$\left[\frac{1}{P} \partial_t - \frac{1}{\cos^2 \phi} (\partial_\xi^2 - 2 \sin \phi \partial_\xi \partial_\eta + \partial_\eta^2) \right] (\partial_\xi^2 - 2 \sin \phi \partial_\xi \partial_\eta + \partial_\eta^2) \psi + R \cos \phi \partial_\xi \theta = J(\psi, (\partial_\xi^2 - 2 \sin \phi \partial_\xi \partial_\eta + \partial_\eta^2) \psi), \quad (3)$$

$$\left[\partial_t - \frac{1}{\cos^2 \phi} (\partial_\xi^2 - 2 \sin \phi \partial_\xi \partial_\eta + \partial_\eta^2) \right] \theta + \cos \phi \partial_\xi \psi = J(\psi, \theta), \quad (4)$$

と境界条件

$$\psi = \partial_\eta \psi = \theta = 0 \quad \text{at} \quad \eta = \pm \frac{1}{2 \cos \phi}, \quad (5)$$

$$\psi = \partial_\xi \psi = \theta = 0 \quad \text{at} \quad \xi = \pm \frac{A}{2}. \quad (6)$$

を得る。ここで $J(f_1, f_2) \equiv \frac{\partial f_1}{\partial \xi} \frac{\partial f_2}{\partial \eta} - \frac{\partial f_1}{\partial \eta} \frac{\partial f_2}{\partial \xi}$ であり、 $R \equiv \frac{\alpha g (T_b - T_t) d^3}{\kappa \nu}$ はレイリー数、 $P \equiv \frac{\nu}{\kappa}$ はプラントル数、 α, ν, g は熱膨張係数、動粘性係数、重力加速度である。

熱伝導解から定常対流解が分岐すると仮定し、熱伝導解の線形安定性解析を行った。熱伝導解があるモードの攪乱に対し不安定化する R をその攪乱に対する臨界レイリー数 R_c と定義する。熱伝導解に加えられた微小攪乱が満たすべき方程式は、境界条件 (5), (6) を自動的に満たすように変形されたチェビシェフ多項式を展開関数系として用いる選点法により、 $\sqrt{R_c}$ を固有値、展開係数を固有ベクトルとする一般化固有値問題に帰着される。攪乱に対する方程式と境界条件の対称性より $\psi(-\xi, -\eta) = \psi(\xi, \eta), \theta(-\xi, -\eta) = -\theta(\xi, \eta)$ の対称性をもつ (s) モード攪乱と $\psi(-\xi, -\eta) = -\psi(\xi, \eta), \theta(-\xi, -\eta) = \theta(\xi, \eta)$ の対称性をもつ (a) モード攪乱に限定して調べれば十分であることがいえる。各モードに対する R_c を小さい方から 2 番目まで求め、その A, ϕ 依存性を $0.1 \leq A \leq 3, 0 \leq \phi \leq 60^\circ$ の範囲で調べた。その結果、角度 ϕ に対する R_c を $R_c(\phi)$ と表したとき、最も不安定なモードに対する $R_c(\phi)$ は A にかかわらず ϕ とともに増加し、小さな ϕ に対して $R_c(\phi) - R_c(0)$ は ϕ^2 に比例することがわかった。 $A = 1$ の場合に、 ϕ を微小として $R_c(\phi)$ の近似表現を $O(\phi^2)$ まで各モードごとに求めると、少なくとも $\phi = 10^\circ$ 程度までは数値計算結果とよく一致した。 (A, ϕ) 平面の各点における最も不安定なモードを $0.3 \leq A \leq 3, 0 \leq \phi \leq 60^\circ$ の範囲で調べ、 ϕ を増加させるとある ϕ で最も不安定なモードの交代が起こることがわかった。例えば $A = 1$ の場合は (s) モードから (a) モードに交代し、 $A = 2$ の場合は (a) モードから (s) モードに交代する。

次に定常対流解とその安定性、分岐を $A = 1, \phi = 0, 1^\circ, 10^\circ$ の場合に調べた。熱伝導解の安定性解析の場合と同様の選点法を用いると、定常対流解が満たすべき方程式は展開係数に関する非線形代数方程式に帰着される。また、定常対流解に加えられた攪乱が満たすべき方程式は、この攪乱の成長率を固有値、攪乱の展開係数を固有ベクトルとする一般化固有値問題に帰着される。定常対流解は (s) モード解と、(s) モードと (a) モードの混じった混合モード解に分けられ、混合モード解は必ず $(\psi(\xi, \eta), \theta(\xi, \eta))$ と $(\psi(-\xi, -\eta), -\theta(-\xi, -\eta))$ という一対の解として得られる。(s) モード定常対流解に加える攪乱は (s) モードあるいは (a) モードに限定してよいが、混合モード定常対流解に加える攪乱は混合モードとしなければならない。系を特徴付ける量として $(\xi, \eta) = (A/4, 0)$ における u_η を用いて、 R をパラメータとする分岐図を描き、次の結果を得た。 $\phi = 0^\circ, 1^\circ, 10^\circ$ のいずれの場合でも、 $R = R_{cm}$ (最

も小さい R で不安定化するモードの R_c の値を R_{cm} と定義する) において、時計回りと反時計回りの渦に対応する2つの (s) モード定常対流解が超臨界熊手型分岐によって出現する。また、反時計回り (時計回り) の渦に対応する (s) モード定常対流解が亜臨界熊手型分岐により不安定化するレイリー数を R_1 (R_2) とすると、 $\phi = 0^\circ$ では $R_1 = R_2$ であるが、 $\phi = 1^\circ$ と 10° では $R_2 > R_1$ となり、 ϕ の増加とともに R_1 と R_2 の差が大きくなる。また $\phi = 0^\circ$ では混合モード定常対流解はある R で熊手型分岐を示すが、この分岐は $\phi = 1^\circ, 10^\circ$ では不完全分岐となることが示された。