数理解析研究所講究録
第1602巻 2008年 6-9

弱順序極小構造と definably connected について

阿南工業高等専門学校・一般教科 田中 広志 (Hiroshi Tanaka)
Liberal Arts Division, Anan National College of Technology
htanaka@anan-nct.ac.jp

概要

$\mathcal{M}=(M,<,\ldots)$ を順序極小構造とし，$X\subseteq M^n$ をセルとする。このとき，セル X は definably connected になることを Knight-Pillay-Steinhorn が示した。本稿では，上記のことの弱順序極小構造版について考える。

$\mathcal{M}=(M,<,\ldots)$ を端点を持たない全順序構造とする。M の部分集合 A が, 任意の $a,b\in A$ と $c\in M$ に対して, $a<c<b$ ならば $c\in A$ をみたすとき, A は M の**凸集合**であるという。さらに $\sup A,\inf A\in M\cup\{-\infty,+\infty\}$ のとき, A は M の**区間**であるという。構造 $\mathcal{M}$ の任意の definable 集合 $D\subseteq M$ が, 区間 (または凸集合) の有限和で表せるとき, $\mathcal{M}$ は**順序極小構造** (または**弱順序極小構造**) であるとよぶ。理論 $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ の任意のモデルが順序極小 (または弱順序極小) になるとき, $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ は**順序極小理論** (または**弱順序極小理論**) とよぶ。順序極小構造に関する参考文献として [1], [3], 弱順序極小構造に関する参考文献として [2], [5], [7] がある。

以後考える構造 $\mathcal{M}$ はすべて弱順序極小構造とする。

$C,D\subseteq M$ とする。任意の $c\in C$, $d\in D$ に対して $c<d$ のとき, $C<D$ と書く。空でない集合の対 $\langle C,D\rangle$ が, $C<D$ かつ $C\cup D=M$ でさらに D が最小元を持たないとき, M の**切断**であるという。$\mathcal{M}$ の definable 切断全体を $\overline{M}$ によって表す。任意の $a\in M$ に対して, definable 切断 $\langle(-\infty,a],(a,+\infty)\rangle$ を考えることにより, $M\subseteq\overline{M}$ とみなす。さらに $\langle C_1,D_1\rangle<\langle C_2,D_2\rangle$ を $C_1\subsetneq C_2$ と定義することにより, $(M,<)$ を $(\overline{M},<)$ の部分構造とみなす。

M (または $\overline{M}$) 上に, M (または $\overline{M}$) の開区間を基本開集合として位相を入れる。

n を自然数とし, $A\subseteq M^n$ を definable とする。写像 $f:A\to\overline{M}$ において, 集合

2000 *Mathematics Subject Classification.* 03C64.
Key words and phrases. Weakly o-minimal, definably connected.

$\{\langle x,y\rangle \in A\times M : y < f(x)\}$ が definable になるとき, f は **definable** であるという。写像 $f : A \to \overline{M} \cup \{-\infty,\infty\}$ が **definable** とは, f が A から M への definable 写像であるか, 任意の $x \in A$ に対し $f(x)=\infty$ であるか, または任意の $x \in A$ に対し $f(x)=-\infty$ になるときをいう。

[7] に弱順序極小構造上でのセルの定義がある。

定義 1. 弱順序極小構造 $\mathcal{M}=(M,<,\ldots)$ に対して, セルとその完備化を帰納的に定義する:

1. M の 1 点集合は $\langle 0\rangle$**-セル**とする。$C \subseteq M$ が $\langle 0\rangle$-セルのとき, その完備化を $\overline{C} := C$ と定める。
2. M の空でない definable 開集合は $\langle 1\rangle$**-セル**とする。$C \subseteq M$ が $\langle 1\rangle$-セルのとき, その完備化を $\overline{C} := \{x \in \overline{M} : \exists a,b \in C, a<x<b\}$ と定める。
3. $C \subseteq M^m$ が $\langle i_1,\ldots,i_m\rangle$-セルで $f : C \to M$ が definable で連続, さらに連続な拡張 $\overline{f} : \overline{C} \to \overline{M}$ をもつとき, グラフ $\Gamma(f)$ は $\langle i_1,\ldots,i_m,0\rangle$**-セル**とし, その完備化を $\overline{\Gamma(f)} := \Gamma(\overline{f})$ と定める。
4. $C \subseteq M^m$ が $\langle i_1,\ldots,i_m\rangle$-セルで $g,h : C \to \overline{M} \cup \{-\infty,\infty\}$ が definable で連続, さらに連続な拡張 $\overline{g},\overline{h} : \overline{C} \to \overline{M}$ をもち, 任意の $x \in \overline{C}$ に対して $\overline{g}(x) < \overline{h}(x)$ のとき,
$$(g,h)_C := \{\langle a,b\rangle \in C\times M : g(a) < b < h(a)\}$$
は $\langle i_1,\ldots,i_m,1\rangle$**-セル**とし, その完備化を
$$\overline{(g,h)_C} := \{\langle a,b\rangle \in \overline{C}\times\overline{M} : \overline{g}(a) < b < \overline{h}(a)\}$$
と定める.
5. ある $i_1,\ldots,i_m \in \{0,1\}$ が存在して, $C \subseteq M^m$ が $\langle i_1,\ldots,i_m\rangle$-セルとなるとき, C は**セル**とよぶ。

$U \subseteq M^n$ を definable 開集合とする。このとき, U の完備化を $\{a \in (\overline{M})^n :$ ある open box $V \subseteq M^n$ があり, $a \in \overline{V}\}$ と定義する。特に U がセルのとき, 上記の完備化はセルの完備化 $\overline{U}$ に一致する。よって U がセルでないときも, $\overline{U} := \{a \in (\overline{M})^n :$ ある open box $V \subseteq M^n$ があり, $a \in \overline{V}\}$ とかく。

次に, boundary point ([4, 定義 1.1]) および weakly boundary point を定義する。

定義 2. $X \subseteq M^n$ をセルとする。$Y \subseteq M^n$ を definable 集合とし, $\emptyset \subsetneq Y \subsetneq X$ とする。

1. $a \in M^n$ が X **での** Y **の boundary point** であるとは，$a \in X$ かつ任意の open box $U \subseteq M^n$ に対して，$a \in U$ ならば $U \cap Y \neq \emptyset$ かつ $U \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset$ となるときをいう。
2. $a \in (\overline{M})^n$ が X **での** Y **の weakly boundary point** であるとは，$a \in \overline{X}$ かつ任意の open box $U \subseteq M^n$ に対して，$a \in \overline{U}$ ならば $U \cap Y \neq \emptyset$ かつ $U \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset$ となるときをいう。

次に，definably connected ([4, 定義 2.2]) および weakly definably connected を定義する。

定義 3. $X \subseteq M^n$ をセルとする。

1. X が **definably connected** とは，$(U \cap X) \sqcup (V \cap X) = X$ かつ $U \cap X \neq \emptyset \neq V \cap X$ を満たす definable 開集合 $U, V \subseteq M^n$ が存在しないときをいう。
2. X が **weakly definably connected** とは，$(\overline{U} \cap \overline{X}) \sqcup (\overline{V} \cap \overline{X}) = \overline{X}$ かつ $U \cap X \neq \emptyset \neq V \cap X$ を満たす definable 開集合 $U, V \subseteq M^n$ が存在しないときをいう。

このノートでの主定理は次のものである。

定理 4. $\mathcal{M}$ を弱順序極小構造とし，$X \subseteq M^n$ をセルとする。$Y \subseteq M^n$ を definable 集合とし，$\emptyset \subsetneq Y \subsetneq X$ とする。このとき次が成り立つ。

1. $\overline{X}$ は，X での Y の weakly boundary point を少なくともひとつはもつ。
2. X は weakly definably connected である。

上記の定理は，次の順序極小構造上での定理の一般化になっている。

定理 5 ([4, 命題 2.4]). $\mathcal{M}$ を順序極小構造とし，$X \subseteq M^n$ をセルとする。$Y \subseteq M^n$ を definable 集合とし，$\emptyset \subsetneq Y \subsetneq X$ とする。このとき次が成り立つ。

1. X は，X での Y の boundary point を少なくともひとつはもつ。
2. X は definably connected である。

参考文献

[1] M. Coste, An introduction to o-minimal geometry, Dottorato di Ricerca in Matematica, Dip. Mat. Univ. Pisa, Istituti Editoriali e Poligrafici Internazionali (2000).

[2] M. A. Dickmann, Elimination of quantifiers for ordered valuation rings, J. Symbolic Logic 52 (1987) 116–128.

[3] L. van den Dries, Tame topology and o-minimal structures, Lecture notes series 248, London Math. Soc. Cambridge Univ. Press (1998).

[4] J. F. Knight, A. Pillay and C. Steinhorn, Definable sets in ordered structures. II, Trans. Amer. Math. Soc. 295 (1986) 593–605.

[5] D. Macpherson, D. Marker and C. Steinhorn, Weakly o-minimal structures and real closed fields, Trans. Amer. Math. Soc. 352 (2000) 5435–5483.

[6] A. Marcja and C. Toffalori, A guide to classical and modern model theory, Trends in Logic 19, Kluwer Academic Publishers (2003).

[7] R. Wencel, Weakly o-minimal non-valuational structures, available at http://www.math.uni.wroc.pl/~rwenc.