数理解析研究所講究録
第 1604 巻 2008 年 1-8

Commutative residuated lattices で特徴づけられる論理について

東京電機大学・情報環境学部　近藤　通朗 (Michiro KONDO)
School of Information Environment
Tokyo Denki University

概 要

commutative residuated lattices 全体で特徴づけられる論理体系 $\mathcal{CRL}$ を構成し，以下の４つの条件がそれぞれ同値であることを示す：

- (PL) : $E \to (E \wedge (A \to B)) \vee (E \wedge (B \to A))$,
- $(C_1) + (C_2)$: $E \to (A \to B) \vee (B \to A)$ および
  $E \wedge (A \vee B) \to (E \wedge A) \vee (E \wedge B)$
- (E_1^*) : $(A \wedge B \to C) \wedge E \to ((A \to C) \wedge E) \vee ((B \to C) \wedge E)$
- (E_2^*) : $(A \to B \vee C) \wedge E \to ((A \to B) \wedge E) \vee ((A \to C) \wedge E)$

この結果から,「上記の論理式の一つを新たな公理に持つ $\mathcal{CRL}$ の拡張 L において，$\Gamma \vdash_L A$ であるための必要十分条件は，任意の**全順序**な CRL 代数 X とその上の任意の valuation v について，$v(\gamma) \geq e$ ($\forall \gamma \in \Gamma$) ならば $v(A) \geq e$ となること」がわかる．

1 Introduction

residuation は順序集合やカテゴリー理論における基本的な概念であるため，residuation の代数的研究が多くの論理体系に対して研究されている．たとえば，よく知られた命題論理，直観主義的論理，Hájek による BL (basic logic) や Lukasiewizc による MV (many-valued logic) は，それぞれブール代数，Heyting 代数，BL-algebras，そして MV-algebras 全体で特徴づけられるが，これらはすべて residuation をもつ束をその台集合としている．したがって，residuation をもつ論理（や代数）を研究することは，これらの論理に共通な性質が何かを，言い換えると，その論理に特有な性質は何かを考察することになるため，非常に重要である．ここでは，CRL と呼ばれる論理体系を与え，これが有界な *commutative residuated* *lattices* 全体で特徴づけられることを示す．また，この論理において４つの条件 (PL)，$(C_1)+(C_2)$，(E_1^*)，(E_2^*) が同値であることを示す．この条件は，これをみたす任意の CRL 代数が linear な CRL 代数で生成されることを表し，したがって，対応する論理における証明可能性は linear な CRL 代数においてだけ考察すればよいことを意味するものである．

2 Logic CRL

まず，論理体系 CRL を定義する．後でわかるように，この論理は有界な commutative residuated lattices 全体で特徴づけられるので，CRL と呼ぶことにする．この論理は次のような言語をもつ：

可算個の命題変数：$p_0, p_1, p_2, \cdots$

定数：$E, \bot$

論理記号：$\wedge, \vee, \rightarrow, \circ$

CRL の論理式は通常のように定義される：

(1) 各命題変数および定数は論理式である：

(2) A，B が論理式ならば，$A \wedge B, A \vee B$,
$A \rightarrow B, A \circ B$ も論理式である．

$\Phi_0 = \{p_0, p_1, p_2, \cdots\} \cup \{E, \bot\}$ とおき，CRL の論理式全体を Φ で表すことにする．CRL の公理系は次のように与えられる：

公理:

(A1) $A \rightarrow A \vee B$

(A2) $A \vee B \rightarrow B \vee A$

(A3) $A \wedge B \rightarrow A$

(A4) $A \wedge B \rightarrow B \wedge A$

(A5) $A \circ B \rightarrow B \circ A$

(A6) $A \circ E \rightarrow A$

(A7) $A \rightarrow A \circ E$

(A8) $\bot \rightarrow A$

(A9) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$

(A10) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \circ B \rightarrow C)$

(A11) $(A \circ B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$

推論規則

$$(R_\vee)\ \frac{A \rightarrow C \quad B \rightarrow C}{A \vee B \rightarrow C},$$

$$(R_\wedge)\ \frac{A \to B \quad A \to C}{A \to B \wedge C},$$

$$(\mathrm{MP})\ \frac{A \quad A \to B}{B}$$

Γ を論理式の集合，A を論理式とするとき，CRL において A が Γ から証明可能（$\Gamma \vdash_{CRL} A$）であるとは，次の条件をみたす論理式の列 $A_1, \cdots, A_n (= A)$ $(n \geq 1)$ が存在することである：任意の i $(1 \leq i \leq n)$ について，

(1) A_i は公理である;

(2) $A_i \in \Gamma$;

(3) A_i は A_j, A_k $(j, k < i)$ から推論規則を用いて得られる.

このとき，次のことが成り立つ：

命題 1. 任意の $A, B, C \in \Phi$ に対して，

(1) $\vdash A \to A$

(2) $\vdash A \circ (A \to B) \to B$

(3) $\dfrac{E \to A}{A}, \quad \dfrac{A}{E \to A}$

(4) $\vdash (A \circ B) \circ C \to A \circ (B \circ C)$

(5) $\vdash A \circ (B \circ C) \to (A \circ B) \circ C$

(6) $\dfrac{A \to B}{A \wedge C \to B \wedge C}, \quad \dfrac{A \to B}{A \vee C \to B \vee C}$

(7) $\dfrac{A \to B}{A \circ C \to B \circ C}$

(8) $\dfrac{A \to B}{(B \to C) \to (A \to C)}$

(9) $\dfrac{A \to B}{(C \to A) \to (C \to B)}$

3 CRL 代数

ここでは論理体系 CRL の代数的意味論を与え，この意味論による完全性定理が成り立つことを示す．代数系 $(X, \wedge, \vee, \cdot, \to, e, 0, 1)$ が次の条件をみたすとき，CRL 代数であると呼ばれる：

(1) $(X, \wedge, \vee, 0, 1)$ は束である.

(2) $(X, \cdot, e)$ は単位元 e をもつ可換なモノイドである.

(3) 任意の $x, y, z \in X$ に対して,

$x \cdot y \leq z \Longleftrightarrow x \leq y \to z.$

命題 2. X を任意の CRL 代数とするとき, $x, y, z \in X$ について,

(1) $x \leq y \iff e \leq x \to y$

(2) $x \cdot (x \to y) \leq y$

(3) $x \leq y \Longrightarrow x \cdot z \leq y \cdot z, \; z \to x \leq z \to y,$

(4) $y \to z \leq x \to z$

(5) $e \to x = x$

(6) $x \to 1 = 1$

(7) $1 \to x \leq x$

(8) $e \leq 0 \to x$

(9) $(x \vee y) \cdot z = (x \cdot z) \vee (y \cdot z)$

次に CRL 代数における論理式の解釈を定義する. X を任意の CRL 代数とするとき, 写像 $v : \Phi_0 \to X$ は X 上の *valuation* と呼ばれ, この写像は論理式全体に次のようにして一意的に拡張できる:

(1) $v(A \wedge B) = v(A) \wedge v(B)$

(2) $v(A \vee B) = v(A) \vee v(B)$

(3) $v(A \to B) = v(A) \to v(B)$

(4) $v(A \circ B) = v(A) \cdot v(B)$

簡単のため, この拡張された valuation も同じ記号 v で表すことにする. このとき, $v(\perp) = 0, v(E) = e$ となるが, さらに次の定理が成り立つことがわかる:

定理 1 (完全性定理). 任意の論理式 A と論理式の集合 Γ について, $\Gamma \vdash_{CRL} A \iff$ 任意の CRL 代数とその上の任意の *valuation* v について, すべての $B \in \Gamma$ について $v(B) \geq e$ ならば $v(A) \geq e$ である.

4 CRL の拡張

ここでは, CRL を拡張することで他のよく知られた論理体系が得られることを述べる. まず, 左連続な t-norm をもつ代数で特徴づけられる論理としてよく知られている MTL との関係を調べる. MTL は次の公理系をもつ ([4]):

公理:

(MTL1) $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$

(MTL2) $A \circ B \to A$
(MTL3) $A \circ B \to B \circ A$
(MTL4) $A \wedge B \to A$
(MTL5) $A \wedge B \to B \wedge A$
(MTL6) $A \circ (A \to B) \to A \wedge B$
(MTL7a) $(A \to (B \to C)) \to (A \circ B \to C)$
(MTL7b) $(A \circ B \to C) \to (A \to (B \to C))$
(MTL8) $((A \to B) \to C) \to (((B \to A) \to C) \to C)$
(MTL9) $\perp \to A$
推論規則：

(MP) $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$

このとき，CRL は MTL から (I) $A \to (B \to A)$ と $(PL1)$ $(A \to B) \vee (B \to A)$ を取り除いたものと同値であることがわかる．すなわち，MTL は CRL に 2 つの公理 (I)，$(PL1)$ を追加したものである．より正確には $CRL + (I) + (PL1)$ を CRL の公理と新しく追加された 2 つの公理 (I) $A \to (B \to A)$ と (PL1) $(A \to B) \vee (B \to A)$ をもつ論理体系とおけば，MTL は $CRL + (I) + (PL1)$ と同値，すなわち，

$$\vdash_{MTL} A \Longleftrightarrow \vdash_{CRL+(I)+(PL1)} A.$$

となることがわかる．

5 論理体系 CRL の拡張

以下の公理のいくつかを CRL に追加することで，興味あるさまざまな論理体系が得られる．追加される公理は以下の通りである：

(I) $A \to (B \to A)$
$(PL1)$ $(A \to B) \vee (B \to A)$
$(PL2)$ $(E \wedge (A \to B)) \vee (E \wedge (B \to A))$
(C_1) $E \to (A \to B) \vee (B \to A)$
(C_2) $E \wedge (A \vee B) \to (E \wedge A) \vee (E \wedge B)$
(E_1) $(A \wedge B \to C) \to (A \to C) \vee (B \to C)$
(E_2) $(A \to B \vee C) \to (A \to B) \vee (A \to C)$
(PL) $E \to (E \wedge (A \to B)) \vee (E \wedge (B \to A))$
(E_1^*) $(A \wedge B \to C) \wedge E \to ((A \to C) \wedge E) \vee ((B \to C) \wedge E)$
(E_2^*) $(A \to B \vee C) \wedge E \to ((A \to B) \wedge E) \vee ((A \to C) \wedge E)$

これらに対応する代数的条件はそれぞれ次のように表される：

(I) e は最大元である，すなわち，$e = 1$.

$(PL1)$ $(a \to b) \vee (b \to a) = 1$
$(PL2)$ $(e \wedge (a \to b)) \vee (e \wedge (b \to a)) \geq e$
(C_1) $e \leq (a \to b) \vee (b \to a)$
(C_2) $e \wedge (a \vee b) \leq (e \wedge a) \vee (e \wedge b)$
(E_1) $(a \wedge b \to c) \leq (a \to c) \vee (b \to c)$
(E_2) $(a \to b \vee c) \leq (a \to b) \vee (a \to c)$
(PL) $e \leq (e \wedge (a \to b)) \vee (e \wedge (b \to a))$
(E_1^*) $(a \wedge b \to c) \wedge e \leq ((a \to c) \wedge e) \vee ((b \to c) \wedge e)$
(E_2^*) $(a \to b \vee c) \wedge e \leq ((a \to b) \wedge e) \vee ((a \to c) \wedge e)$

CRL の場合と同様な議論で，*monoidal logic* ML ([2]) は CRL に条件 (I) を追加した論理，*monoidal t-norm logic* MTL ([1]) は条件 (I) と $(PL1)$ を追加した論理，また *uninorm logic* UL [4] は条件 $(PL2)$ を追加した論理であることがわかる．これを次のように表すことにする：

$$ML = CRL + (I)$$
$$MTL = CRL + (I) + (PL1)$$
$$UL = CRL + (PL2)$$

これらの追加された公理に対して次のことが成り立つ：

命題 3. 任意の論理式 A, B に対して，$\vdash_{CRL} A \to (B \to A) \iff \vdash_{CRL} \top \to E$.

このことから，$\Gamma \vdash_{ML} A \iff e$ を最大元としてもつ任意の CRL 代数 X とその上の任意の valuation v について，$v(\gamma) = e$（$\forall\gamma \in \Gamma$）ならば $v(A) = e$ となることがわかる．他の論理体系についても同様に以下のことが成り立つ：

定理 2. A を任意の論理式，追加される公理 $\{(I), (PL1), \cdots, (E_1^*), (E_2^*)\}$ のうちのいくつかを $\alpha, \cdots, \beta$ とするとき，

$\Gamma \vdash_{CRL+\{\alpha,\cdots,\beta\}} A$ であるための必要十分条件は，対応する条件 $\alpha, \cdots, \beta$ をみたす任意の *CRL* 代数 X とその上の任意の *valuation* $v : \Phi_0 \to X$ に対して，$v(\gamma) \geq e$（$\forall\gamma \in \Gamma$）ならば $v(A) \geq e$ となることである．

注意

MTL (あるいは UL) 代数の場合，すべての subdirectly irreducible MTL (UL) 代数は全順序集合であることが知られている ([5]) ので，論理体系 MTL (UL) は全順序な MTL (UL) 代数で特徴づけられることがわかる．すなわち，$\Gamma \vdash_{MTL} A$　$(\Gamma \vdash_{UL} A)$ であるための必要十分条件は，任意の全順序な MTL (UL) 代数 X とその上の任意の valuation v について，$v(\gamma) = 1$（$\forall\gamma \in \Gamma$）ならば $v(A) = 1$ となることである．

また，MTL 代数全体 $\mathcal{MTL}$ は (C_1) $(x \to y) \vee (y \to x) \geq e$ をみたす CRL 代数全体 $\mathcal{WL}$ を含む最小の分配的な variety であることがわかる．実際，$\mathcal{V}$ を $\mathcal{WL}$ を含む分配的な CRL 代数全体とすると，任意の代数 $A \in \mathcal{MTL}$ は分配的であるから，条件 (C_2) $e \wedge (a \vee b) = (e \wedge a) \vee (e \wedge b)$ をみたす．したがって，A は 2 つの条件 (C_1)，(C_2) をみたしていることになる．このとき，[5] の結果から $\mathcal{MTL} \subseteq \mathcal{V}$ となる．したがって，$\mathcal{MTL}$ は (C_1) $(x \to y) \vee (y \to x) \geq e$ をみたす CRL 代数全体 $\mathcal{WL}$ を含む最小の分配的な variety である．

他の公理に関しては，次のことが知られている：

- 条件 (I) をみたす CRL において，条件 (C_1)，(E_1)，(E_2) は同値である．([6])；
- 条件 (C_2) をみたす CRL において，条件 (C_1)，(E_1)，(E_2) は同値である．([5])．

これまでの議論から，次の結果が得られる：

定理 3. *CRL において，条件 (PL)，$(C_1) + (C_2)$，(E_1^*)，(E_2^*) は同値である．*

したがって，

定理 4. *新たな公理として (PL)，$(C_1) + (C_2)$，(E_1^*)，あるいは (E_2^*) のいずれかを持つ $\mathcal{CRL}$ の拡張である論理 L において，$\Gamma \vdash_L A$ であるための必要十分条件は，任意の全順序な代CRL　数 X とその上の任意の valuation v について，$v(\gamma) \geq e$ $(\forall \gamma \in \Gamma)$ ならば $v(A) \geq e$ となることである．*

参考文献

[1] F. Esteva and L. Godo, Monoidal t-norm based logic : towards a logic for left-continuous t-norm, Fuzzy sets and systems, vol.124 (2001), 271-288

[2] U. Höhle, Commutative, residuated l-monoids, in : U. Höhle, E.P.Klements (Eds.), Non-classical logics and their applications to the fuzzy subsets, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht 1995, 53-106

[3] P. Hájek, Metamathematics of fuzzy logic, Kluwer Academic Publishers, 1998

[4] G. Metcalfe and F. Montanga, Substructural fuzzy logics, to appear in Journal of Symbolic Logic.

[5] J.B. Hart, L. Rafter and C. Tsinakis, The structure of commutative residuated lattices, International Journal of Algebra and Computation, Vol.12 (2002), 509-524.

[6] M. Ward and R.P. Dilworth, Residuated lattices, Trans. of the AMS, vol.45 (1939), 335-354

[7] O. Watari, M.F. Kawaguchi and M. Miyakoshi, Uninorm based logic as an extension of substructural logics FLe, Proceedings of 11th International Conference of Information processing and Management of Uncertainty in Knowledge-based Systems (IPMU2006), Paris (2006), 460-465