数理解析研究所講究録
第 1604 巻 2008 年 101-103

スペクトル分布によるセルラーオートマトンの単射性・全射性の判定

佐藤忠一

東洋大学　工学部

1.　まえがき

同一の有限オートマトンを一次元（直線上）に並べたネットワーク系を一次元セルラーオートマトンという。各オートマトンは、自分の周辺のオートマトンの状態を見ながら局所関数で一斉に変換する。この局所関数から有向グラフを作りその遷移行列から各シンボル（状態）の隣接行列を定義する。本論文はこの隣接行列のスペクトルの分布からセルラーオートマトンのグローバルな性質を調べる。

2．諸定義と基本的性質

一次元セルラーオートマトンCAとは　$CA=<Z,Q,N,f>$の四組で与えられる。

ここで、Zは整数の集合で各オートマトンが配置されている場所を表わす。Qは各オートマトンが取れる状態の有限集合、NはZの有限部分集合で近傍と呼ばれる。fは$Q^{|N|}\to Q$なる写像で局所関数と呼ばれ、$|Q|=m$、$|N|=n$のときmシンボルnスコープの局所関数という。$c:Z\to Q$なる写像cを様相といい、各オートマトンの状態の分布を表わす。この様相に局所関数fで一斉に変換すると新しい様相c'は$^{\forall}i\in Z$に対して、$c'(i)=f(c(i),c(i+1),\cdots,c(i+|N|-1))$で与えられる$c\to c'$なる対応を$f_\infty(c)=c'$と表わし、$f_\infty$を並列写像という。様相の集合を$C(Q)$で表わすと$f_\infty$は$f_\infty:C(Q)\to C(Q)$なる写像である。並列写像は一般的に次のような著しい性質を持つ。

f_∞は単射である $\Leftrightarrow$ f_∞は逆変換を持つ。

従って、f_∞が単射ならf_∞は全射である。

3．　局所関数の行列表示

一般的にmシンボルnスコープの局所関数$f:Q^n \to Q$の有向グラフを次の様に作る。Q^{n-1}の元をグラフのノードとし、ノード$x_1\cdots,x_{n-1}$からノード$x_2\cdots,x_n$へには遷移が存在し、そのエッジに$f(x_1\cdots,x_n)$の値のラベルを付ける。このようにして作られた有向グラフの遷移行列をA_fで表す。この行列のサイズは$m^{n-1}\times m^{n-1}$である。A_fは$A_f=\sum_{i=1}^{m} a_i\mu(a_i)$と表現でき行列$\mu(a_i)$をシンボル$a_i$の隣接行列という。　次に$Q$上のワード$w=a_1\cdots,a_n$に対してワードの隣接行列$\mu(w)$を次のように定義する。

$$\mu(w)=\mu(a_1\cdots,a_n)=\prod_{j=1}^{n}\mu(a_j)$$

定理1．fをmシンボル,nスコープの局所関数とするとき次の命題は全て等価である。

（1）f_∞は全射である。

（2）$^\forall w\in Q^*$に対して$\mu(w)$のスペクトル分布は複素平面上の半径1の円周上又は原点に分布する。但し、すべては原点には分布しない。

（3）$\{\mu(a)\mid a\in Q\}$によって生成される集合は有限集合である。言い換えれば$\{\mu(w)\mid w\in Q^*\}$は有限集合である。すなわち、$\{\mu(a)\mid a\in Q\}$の乗法表が有限個で閉じる。

定理2．fをmシンボル、nスコープの局所関数とする。このとき次の命題が成立。

f_∞が単射であるための必要十分条件は$^\forall w\in Q^+$に対して$\mu(w)$のスペクトル分布は複素平面上でただ1つが1に分布し、他はすべて原点に分布する。ここで、$Q^+=\bigcup_{n\geq 1}Q^n$

定理１、定理２より次の系１が得られる。

系１．f_∞ が単射であれば f_∞ は全射である。

定理２よりつぎの系２が成立する。

系２．f_∞ が単射であるための必要十分条件は $^\forall w \in Q^+$ に対して、その隣接行列の固有方程式が次の形をとることである。$|\ \mu(w) - \lambda I\ | = (-\lambda)^k + (-\lambda)^{k-1}$, $k = m^{n-1}$

系３．次の命題はすべて等価である。

（１）$^\forall a \in Q$ に対して $\mu(a)$ は正則である。

（２）$f(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n)$ は x_1 に関して置換的かつ x_n に関して置換的である。

（f は L-property かつ R-property を持つ）

（３）f_∞ は m^{n-1} 対 1 写像である。

（４）$^\forall w \in Q^*$ に対して $\mu(w)$ のスペクトル分布は複素平面上の半径１の円周上に分布する。

系４．f_∞ が単射になるための必要条件は $^\forall a \in Q$ に対して次式が成立することである。

$|\ \mu(w) - \lambda I\ | = (-\lambda)^k + (-\lambda)^{k-1}$, $k = m^{n-1}$

系５．f_∞ が全射になるための十分条件は次式が成立することである。

$^\forall a_i, a_j \in Q$ に対して $\mu(a_i)\mu(a_j) \in \{\mu(a) \mid a \in Q\}$