数理解析研究所講究録
第1608巻 2008年 84-89

Euler viewpoint vs. Lagrange viewpoint in Micro-Macro Duality scheme*

京都大学・数理解析研究所　　小嶋　泉 (Izumi Ojima)
Research Institute for Mathematical Sciences,
Kyoto University

流体を構成する微粒子の軌道を追跡することによって流体運動を記述する Lagrange 的視点と，時空点 $(t,\vec{x})$ 毎の流速 $\vec{v}(t,\vec{x})$，渦度 $\vec{\omega}(t,\vec{x})=\vec{\nabla}\times\vec{v}(t,\vec{x})$ 等，「場」の物理量を用い「場」としての流体の振舞を記述する Euler 的視点との相互関係の問題は，専門外の人間が口を差し挿んでも「釈迦に説法」に終わる恐れがあるかもしれない。しかし歴史を振り返ると，次のような状況が目に入る。

1) 流体力学 vs. 電磁気学：

流体力学をお手本に電気力線・磁力線の流体運動として電磁現象を記述しようとした Maxwell の着想によって《流体力学から電磁気学へ》という形で Maxwell の電磁場理論が形成された。ひとたび産み出された電磁場概念は以後「場」の模範となり，その核心にある「ゲージ」概念は今や場の物理学で普遍的役割を演ずるに至っている。最近粘性効果が無視可能な流体の変分法的扱いで注目されるようになった《流体力学のゲージ構造》の問題 [1, 2, 3] では，Maxwell の時代とベクトルの向きが反転し《ゲージ理論 $\Longrightarrow$ 流体力学》という方向で流体力学の再定式化が試みられ，そこでゲージ概念の果たす役割が注目されている。

こういう文脈で改めて Lagrange 的視点と Euler 的視点とを対比して見ると，他分野と深くつながる重要な対概念が幾重にもここに絡んでいることが了解される：「粒子」的視点 vs.「場」の視点／動力学的記述 vs. 時空的記述／直接眼に見えない微視的素過程 vs. 積分され平均化された「平均場」の可視的巨視的現象／物質運動 (with mass ρd^3x & velocity $\vec{v}$) vs.（背景）時空の幾何構造 (determined by the tangent vector field $\vec{v}(t,\vec{x})$)，等々。このような対をなす２つの異なる「記述モード」の相互関係に関わる問題は，（量子 vs. 古典という「レベルギャップ」の有無を度外視すれば）実は，量子場の内部対称性の起源とその巨視的実現形態（＝「セクター」）との関係を巡る代数的量子場理論の「セクター理論」([4]) および破れた対称性へのその一般化 ([5])，更にそのようなスキームに基づく量子場の非平衡局所状態の理論的定式化 ([6]) や量子論的測定過程の一般的記述 ([7]) 等々の問題とも深く共通

*RIMS 研究集会 “オイラー方程式 250 年：連続体力学におけるオイラーの遺産”での講演（2007年９月）

した本質を持ち，それは筆者の立場では「ミクロ・マクロ双対性」([7]) の視点で了解可能な問題のように見える： この文脈では，マクロ世界で直接眼に見えないミクロの物理量は，マクロレベルで可視的な量を係数に持つ或る方程式の解として理解され,「係数環」としての観測可能量の代数 $\mathcal{A}$ が可視的マクロレベルを記述するのに対して，ミクロレベルは $\mathcal{A}$ に方程式の解 $X=\omega_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ を付加して定まる「ガロア拡大」の代数 $\mathcal{F}=\mathcal{A}[\omega_1,\cdots,\omega_n]$（正確には $\mathcal{F}=\mathcal{A}\rtimes\hat{G}$: 接合積）で記述される。複数の解 $\{\omega_1,\cdots,\omega_n\}$ を相互に入れ替える $\mathcal{F}$ の変換から成るガロア群 $G=Gal(\mathcal{F}/\mathcal{A})$ の $\mathcal{F}$ への作用は，係数環 $\mathcal{A}$ を不変に保ち：$\mathcal{A}=\mathcal{F}^G$，観測量 $\mathcal{A}$ で記述されたマクロデータの不変性を保証するから，物理系の対称性を表す。「ミクロ・マクロ双対性」の見方では，このようなミクロ力学系 $\mathcal{F}\curvearrowleft G$ と観測量の代数 $\mathcal{A}$ で記述されるマクロレベルとの相互関係の本質を，係数環 $\mathcal{A}$ 上で与えられ G をガロア群として持つ方程式系と群双対 $\hat{G}$ の $\mathcal{A}$ に対する co-action との等価性 [8] に基づき，Fourier duality の一般化として

$$\begin{aligned}&\left[\left(\mathcal{F}=\mathcal{A}\rtimes\hat{G}\text{: 接合積}\right)\curvearrowleft(G=Gal(\mathcal{F}/\mathcal{A}))\text{: ガロア群}\right]\\ \rightleftarrows\ &\left[(\mathcal{A}=\mathcal{F}^G(\simeq\mathcal{F}\rtimes G)\text{: 固定部分環})\underset{\text{co-action}}{\curvearrowleft}G\text{ の群双対 }\hat{G}(\subset RepG)\right]\end{aligned}$$

という双方向的な形で捉えることができる。例えば Maxwell 理論では，観測可能な物理量の代数 $\mathcal{A}$ は field strength $F_{\mu\nu}=(\vec{E},\vec{B})$ と電流密度 j_μ で生成され，方程式 $F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$ の解である4元電磁ポテンシャル A_μ はガロア拡大 $\mathcal{F}$ の元，ガロア群 $G=Gal(\mathcal{F}/\mathcal{A})$ はゲージ変換 $A_\mu\to A_\mu+\partial_\mu\Lambda$ のなす（無限次元の）群と解釈できる（ここで文字 F と A の対応づけが gauge potential $A_\mu\in$ field algebra $\mathcal{F}$ と field strength $F_{\mu\nu}\in$ observable algebra $\mathcal{A}$ という具合にたまたま逆転したのは，２つの文脈での習慣の違いのせい！）。

流体力学の場合にはあいにく未だ確定的な結論が得られたわけではないが，本講演の目論見は上のような（ミクロ・マクロ）双対性の見方から Euler 的視点と Lagrange 的視点との相互関係を吟味することによって，非粘性流体のゲージ構造の理論的定式化，その意味と解釈の問題を，より広い文脈の中に位置づけて有用な知見を抽き出したい，ということであった。その方向で議論する必要があると思われるのは，以下のような問題である。

2)「粒子」vs.「場」，内部対称性 vs. 時空対称性：

無限自由度を持つ「量子場」が「粒子的励起モード」とそれに対する「背景」としての「平均場・熱浴・環境」との双方を自前で供給するように，流体速度場 $\vec{v}(t,\vec{x})$ は Lagrange 的視点から見た微小構成粒子の運動と同時に，それらが産み出す集団運動,「平均場」として Euler 的視点で記述される「流体」運動の両方を内包する。これに対応して「ゲージ」構造にも，速度場 $\vec{v}(t,\vec{x})$ から生成され粒子群のラベル付けの任意性に起因する「内部対称性」= particle relabeling symmetry を記述する微分同相変換群 $Diff(\mathcal{D})$（の右作用）と共に，場 $\vec{v}(t,\vec{x})$ の座標 $\vec{x}$ の局所並進変換 $\vec{x}\to\vec{x}+\delta\vec{x}$ に対応した「空間対称性」の側面があり，前者は非可換ゲージ理論，後者には一般相対論との類似性が見られる（ただし $\mathcal{D}$ は流体の分布する３次元空間領域）。前者の非可

換ゲージ構造は，Arnold; Holm, Marsden, Ratiu 等 [9] による《無限小微分同相変換 = "*Lie*"($Diff(\mathcal{D})$) = 多様体 $\mathcal{D}$ のベクトル場としての流体速度場 $\vec{v}\cdot\vec{\nabla} \in \mathcal{X}(\mathcal{D})$》という視点から，$Diff(\mathcal{D})$ の左および右正則表現と Euler & Lagrange 視点の関係を結びつける定式化やゲージ構造に付随する「拘束」としての "Euler-Poincaré 方程式" の扱いにつながる [1]。他方，後者の見方は Lagrange 微分 $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}$ をアフィン並進 $\vec{x} \to \vec{x} + \delta\vec{x}$ に対応する共変微分と解釈し，非可換性の側面は循環や helicity をもたらす $\vec{v}(t, \vec{x})$ の $\vec{x}$-依存性に由来する回転モードとして取り込む定式化が [10, 2] で展開されている。

3) 動力学的記述 vs. 時空的記述／拘束条件 vs. ゲージ固定条件：

Lagrange 微分をアフィン並進と結びつける上の見方は，可換な局所アフィン並進変換の役割を強調した N. Nakanishi による一般相対論のゲージ構造の扱い ([11]) に類似し，それを 3 次元 Euclid 空間に制限したものと見ることが可能と考えられる。ただし，アフィン並進 $\vec{x} \to \vec{x} + \delta\vec{x}$ は時間 t を変えず空間ベクトル $\vec{x}$ だけを動かすのに対して，Lagrange 微分 $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}$ の方は時間軸に沿う微分だから，両者をつなぐのは非相対論的 Galilei 変換 $\vec{x} \to \vec{x} + \delta\vec{x} = \vec{x} + \vec{v}dt$ の役割で，ここには相対論での一般座標変換と多少異質な側面も見える。すなわち，Lagrange 微分をアフィン並進に伴う共変微分と見る解釈には，理論の持つ対称性としての *static or kinematical* なゲージ構造には元々入っていなかった flow equation とそれに基づく動力学の文脈が関与する。

とすれば，ゲージ対称性に伴って Noether の第 2 定理から帰結する Euler-Lagrange 方程式系の退化＝「拘束力学系」の問題の整合的な扱いが必要になる。これは，系の時間発展を与える動力学的 flow の一部がゲージ対称性変換と overlap し，それによって後者から従う運動学的恒等式に吸収されるため Cauchy 問題の解の一意性が破れる現象であり，Dirac の拘束力学系理論 [12] では「第 1 種の拘束」 $\{\varphi_a; a = 1, \cdots, r\}$ として分類される構造：$\{\varphi_a, \varphi_b\}_{P.B.} = \sum_c f_{ab}^c \varphi_c$, $\{\varphi_a, H\}_{P.B.} = \sum_b f_a^b \varphi_b$ ($\{\cdot,\cdot\}_{P.B.}$ は Poisson 括弧, H は formal な "singular" or "non-canonical" Hamiltonian) にほかならない。解の一意性を回復するための標準的処方としては，$\det(\{\varphi_a, \chi^b\}_{P.B.}) \neq 0$ を満たす変数 χ^a $(a = 1, \cdots, r)$ を導入して拘束を「第 2 種化」し，Poisson 括弧を Dirac 括弧 $\{A, B\}_{D.} := \{A, B\}_{P.B.} - \sum_{ij}\{A, \phi_i\}_{P.B.}(C^{-1})_{ij}\{\phi_j, B\}_{P.B.}$ ($\{\phi_i\} := \{\varphi_a, \chi^b; a, b = 1, \cdots, r\}$, $C_{ij} := \{\phi_i, \phi_j\}_{P.B.}$) に置き換えて拘束のない変数だけが（実効的に）残るよう（= symplectic submanifold への "symplectic reduction"），Hamiltonian に「ゲージ固定条件」と呼ばれる項 $\sum_a \varphi_a \chi^a$ を付加する： $H \to H + \sum_a \varphi_a \chi^a$。 [2, 10] での helicity の自由度に対応した Hamiltonian の付加項，[3] における "Casimirs" と呼ばれる拘束条件がこれに対応する。このような扱いを量子場理論とも整合する形に一般化するには，無限小ゲージ変換のなす（無限次元）Lie 環上の外微分形式を用いて Lie algebra cohomology としての BRS cohomology を用いる方法が適しており [13]，特に一般相対論との異同を解明するという目的にはこの手続きが不可欠と思われるが，ここでは省略する。

4) 物質運動 vs. （背景）時空の幾何構造：

Lagrange 的視点での記述対象は $\vec{x}$-space における**局在性**と**運動量** $\vec{v}(t,\vec{x})\times\rho(t,\vec{x})d^3\vec{x}$ で特徴づけられる (Newton 力学的意味での)「粒子」としての流体の微小要素であり，その「微分形」は相空間 $T^*\mathcal{D}$ の微小近傍 $\{(\vec{x},\rho(t,\vec{x})\,|\Delta|\,\vec{v}(t,\vec{x})\cdot d\vec{x});\vec{x}\in\Delta\}\subset T^*\mathcal{D}$,「積分形」は ［流速場 $\mathcal{D}\ni\vec{x}\longmapsto\vec{v}(t,\vec{x})$ を given とすれば］ flow equation

$$\frac{D\vec{x}}{Dt}=\frac{\partial\vec{x}}{\partial t}+\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vec{x}=\vec{v}(t,\vec{x})=\frac{d\varphi_t}{dt}$$

の解として初期位置 $\mathbf{a}$ (= Lagrangian coordinates) で parametrize された軌道族 $\mathbb{R}\ni t\longmapsto(t,\varphi_t(\mathbf{a}))\in\mathbb{R}^4$ で与えられ，他方，ベクトル場 $\vec{v}$ の方は Euler 方程式

$$\frac{D(\rho\vec{v})}{Dt}=-\vec{\nabla}p$$

によって決まる ($\vec{x}\longmapsto p(t,\vec{x})$ は圧力)。

a) 電磁場の場合なら，前者は与えられた電磁場 $F_{\mu\nu}$ （流体の場合にはこれが流速場 $\vec{v}$ に対応）の中での「物質粒子（or 場)」としての荷電粒子（とその電流密度）の運動，後者は電流密度 j_μ から電磁場 $F_{\mu\nu}$ を決める Maxwell 方程式に相当し，

b) 重力場ならば，与えられた重力場 $g_{\mu\nu}$ の中での物質運動およびそれとは逆にその物質運動のエネルギー・運動量テンソルから重力場を決める Einstein 方程式が対応する。しかるに，

c) 流体の場合は同一の流体運動を，粒子群の運動と見るか (Lagrangean viewpoint)，それらの集団運動としての流体場と見るか (Eulerean viewpoint)，という異なる２つの「視点」で記述することに相当する。運動量密度と速度場とを $d\vec{p}=\rho\vec{v}d^3x$ によってつなぐ質量密度 ρ，圧力 p と粒子運動とをつなぐ状態方程式は，この２つの「視点」を couple させ閉じた方程式系にする役割を担っている。

ゲージ構造を記述するための幾何学的枠組として，a) の場合は構造群 $G(=U(1))$ と底空間＝時空とが decouple した主ファイバー束，b), c) では底空間の各点での接空間の基底の集まりをファイバーに持つ frame bundle であるが，上述のように a), b) では「場」と「粒子」の担い手が分離され，それらを記述する方程式系を通じて couple しているのに対して,「場」と「粒子」の担い手が直接に重なってしまっている，というのは流体 c) の場合の際立った特徴と見るべきではないだろうか？

5) 直接眼に見えない微視的素過程 vs. 積分され平均化された「平均場」の可視的巨視的現象／ゲージ構造 vs. 熱力学的散逸性？:

もう１点，上の流体の場合 c) の大きな特徴を，場を決める Euler 方程式の右辺に熱力学的文脈に直結する量としての圧力 p が現われるということに見ることはできないだろうか？元々，流体運動のゲージ構造は，粘性項が無

視できる場合に意味を持つ「力学系」の問題として考察されてきたのであり，それはきわめて自然な設定には違いない。他方，散逸過程を力学系に埋め込む universal な数学的手法としての “dilation” を考慮すると，力学系と散逸過程を峻別する見方はある一面では不自然に見える。特に最近，（相対論的）量子場理論における非平衡構造の解析により，局所的な量子論的観測可能量を用いて局所熱的状態を大域的熱平衡状態と比較するというやり方で，量子場の局所非平衡状態の一般的定式化が可能になってきた ([6])。これを発展させて非自明な衝突項 → エントロピー生成を持つ Boltzmann 方程式の一般化，更に BBGKY hierarchy を経由して hydrodynamic description へ接続することにより，非粘性流体のゲージ構造と粘性項の間の整合的な理解が可能にならないだろうか？このような文脈で回転対称性の役割や，流体の運動を記述するベクトル場 $\mathbf{v} = v^i\partial_i \in \mathfrak{X}(\mathcal{D})$ のような微分幾何学的なゲージ概念を,「粘性」のような熱力学的散逸系に特徴的な量と無理なく同居させることも可能になるのではないか？こういう見方は，とりわけ量子多体系の凝縮状態とその（流体力学的な）集団運動の記述（特に，Bose-Einstein 凝縮とそれによる超流動・超伝導とのつながりで）において，4) の視点と絡めて重要な役割を演ずることが予想される。

最後になりましたが，当研究集会を企画・運営された福本康秀さんには，2003 年来，興味深いご講演その他を通じて,「流体力学のゲージ構造」という非常に奥深く重要な問題に筆者の目を向けさせて頂き，数々の有益なご指導を頂きました。この機会に改めて心よりお礼を申し上げる次第です。また神部勉先生には並進対称性に基づくそのゲージ構造の明解な定式化についてご教示頂いたことに対して感謝致します。

References

[1] 福本康秀，オイラー・ポアンカレ形式による渦のトポロジーと力学,『数理物理への誘い 5』 pp.98 – 121 （星雲社，2004）.

[2] 神部 勉，オイラーの方程式導出と流体運動のゲージ理論 (当研究集会でのご講演).

[3] 吉田善章，Lagrangian for collective matter-field coupling (当研究集会でのご講演).

[4] Doplicher, S., Haag, R. and Roberts, J.E., Fields, observables and gauge transformations I & II, Comm. Math. Phys. **13** (1969), 1-23; **15** (1969), 173-200; Local observables and particle statistics I & II, **23** (1971), 199-230; **35** (1974), 49-85; Doplicher, S. and Roberts, J.E., Why there is a field algebra with a compact gauge group describing the superselection structure in particle physics, Comm. Math. Phys. **131** (1990), 51-107; Endomorphism of C*-algebras, cross products and duality for compact groups, Ann. Math. **130** (1989), 75-119; A new duality theory for compact groups, Inventiones Math. **98** (1989), 157-218.

[5] Ojima, I., A unified scheme for generalized sectors based on selection criteria –Order parameters of symmetries and of thermality and physical meanings of adjunctions–, Open Systems and Information Dynamics, **10** (2003), 235-279 (math-ph/0303009); 小嶋 泉，だれが量子場を見たか，江澤 洋先生退官記念数理物理シンポジウム（2003年3月25日於学習院大学）の講演集『だれが量子場をみたか』(日本評論社，2004), pp.65-107.

[6] Buchholz, D., Ojima, I. and Roos, H., Thermodynamic properties of non-equilibrium states in quantum field theory, Ann. Phys. (N.Y.) **297**, 219 - 242 (2002); Ojima, I., How to formulate non-equilibrium local states in QFT? – General characterization and extension to curved spacetime –, pp.365-384 in "*A Garden of Quanta*", World Scientific (2003) (cond-mat/0302283).

[7] Ojima, I., Micro-macro duality in quantum physics, pp.143-161 in "Stochastic Analysis: Classical and Quantum –Perspectives of White Noise Theory" ed. by T. Hida, World Scientific (2005) (math-ph/0502038); 小嶋　泉, 量子場の観測過程,『数理科学』No.508, 2005.10, pp.18-25; 代数的量子論とミクロ・マクロ双対性,『数理科学』No.529, 2007.7; Ojima, I. and Takeori, M, How to observe quantum fields and recover them from observational data? – Takesaki duality as a Micro-Macro duality –, Open Systems and Information Dynamics, **14**, 307 – 318 (2007) (math-ph/0604054); Harada, R. and Ojima, I., in preparation.

[8] Ojima, I., in preparation.

[9] Arnold, V.I., *Mathemtaical Methods of Classical Mechanics* (2nd ed.) Springer-Verlag, 1989; Holm, D.D., Marsden, J.E., Ratiu, T.S., The Euler-Poincaré equations and semidirect products with applications to continuum theories, Adv. Math. **137** (1998), 1 – 81.

[10] Kambe, T., Gauge principle and variational formulation for ideal fluids with reference to translation symmetry, Fluid Dynamics Research **39**, 98-120 (2007); Variational formulation of ideal fluid flows according to gauge principle, to appear in Fluid Dynamics Research.

[11] Nakanishi, N., see Chaper 6 of [13].

[12] Dirac, P.A.M., *Lectures on Quantum Mechanics*, Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, New York, 1964.

[13] Nakanishi. N. and Ojima, I., *Covariant Operator Formalism of Gauge Theories and Quantum Gravity*, World Scientific Lecture Notes in Physics Vol.27, 1990.