

波のエネルギーに基づいたシア流の安定性解析

廣田 真 (Makoto Hirota)

福本 康秀 (Yasuhide Fukumoto)

Faculty of Mathematics, Kyushu University

1 研究背景

オイラーの流体方程式にまつわる膨大な研究の歴史の中で、Arnold [1, 2] によるハミルトン構造の定式化は解析力学と流体力学をつなげた一つの契機として注目に値する。流体を無数の流体粒子の集まりとみなす考え方はラグランジュ的視点として知られてはいたが、Arnold はこれらの運動を微分同相写像群とみなし、流体粒子のラベルの付け替えに関する対称性から、非圧縮流体のオイラー方程式を一つの非正準ハミルトン方程式として導いた。1960 年代はちょうど流体力学やプラズマ物理においてもラグランジュ的視点に基づいた解析力学的研究が盛んに行われた頃であったが、エネルギーや運動量、渦度の保存則といったオイラー方程式のもつ物理的な性質が、数学的に明確にされたことはこういった基礎研究において重要である。その後、圧縮性や磁場の効果が加わった場合のハミルトン形式の拡張は Morrison & Greene [3] や Marsden *et al.* [4] らによって行われ、オイラー的視点による連続体力学というもののが古典的なハミルトン力学の延長線上としてようやく理解されてきた。とはいえ、無限の自由度をもつ流体の運動が、有限自由度の質点や剛体の運動とのアナロジーで全て片付くというわけではなく、具体的な解の振舞いや物理現象を考察する際には、集団運動に特有な難しさがしばしば問題となる。方程式のハミルトン構造はそれらを調べるための基本的な知識にすぎない。

流れ(または渦)の安定性解析においても、Rayleigh や Kelvin の時代から連綿と研究は続いているが、層流から乱流へ遷移する間のプロセスは非常に複雑であり、物理的、工学的に興味のある問題に対し摂動論を用いた理論解析や数値シミュレーションが現在も数多く行われている。本研究では「波のエネルギー」の概念を上記の非正準ハミルトン力学系の観点から厳密に見直し、その定式化を行なった [5]。これは、様々な流体の不安定性をハミルトン力学系の分岐として統一的に理解するための重要な手掛りとなる。一般に、正準力学系では平衡点(ハミルトニアンの極値)の近傍の振動モードがもつエネルギーの符号、あるいは作用(action)の符号が重要であり、例えば異符号の作用をもつ振動モードの周波数(=固有値)が縮退すると線形不安定性が起こる(Krein [6], Moser [7], Mackay [8])。よって、波がもつエネルギーや作用を求めることで、流体安定性に対しても同様な考察ができると考えられる。流体における波のエネルギーについては Cairns [9], MacKay & Saffman [10], Fukumoto [11] など具体的に計算した例はすでいくつか存在する。しかし、その

背後にあるオイラー方程式の非正準ハミルトン形式やラグランジュ的描像を考慮した議論はあまりなされていない。一方、プラズマ物理では摂動のエネルギーを用いた安定性解析手法 [12] が確立されているが、多くの場合、平均流の存在しない状況を考えており、流れが引き起こす興味深い現象はこれからの課題とされている。第2節ではこれらの理論を整理し、波のエネルギーとは何かを線形理論の範囲で議論する。式の導出や数学的証明については文献 [5] にゆずり、ここではそれが物理的に意味する所を解説する。

次に、第3節では具体的に平行シア流における波のエネルギーについて考察する。近年、Balmforth & Morrison [13] によって連続スペクトルに相当する波のエネルギーが初めて計算された。我々の計算も同じ結果を再現するが、ここではその物理的な解釈を与えることを試みる。

2 流体方程式のハミルトン構造と線形摂動論

圧縮性完全流体を記述するオイラー方程式と連続の式

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2)$$

を考える。ここで、 \mathbf{v} は流れ場、 ρ は質量密度、 p は圧力である。状態方程式によって圧力は密度のみの関数 $p(\rho)$ として与えられ、等エントロピーとする。エントロピーに対する方程式を加えても、散逸効果を含まない限り、数学的には以降の計算に支障はない。しかし、渦度の保存則が破れ、現象の理解が複雑になるので、簡単のため等エントロピーを仮定しておく。

Arnold は (非圧縮) オイラー方程式が自由な剛体運動と同じハミルトン形式をもつことを見出した [1, 2]。これらの力学系は、元となる正準系がある群変換に対する対称性をもち、それによって変数の自由度を減らした結果得られたものである (Lie-Poisson reduction)。このような縮約によって得られた系は一般に非正準ハミルトン系となり、これはネーターの定理として知られるように保存則をもつ。しかし、保存則の存在はわかっても、いわゆる第一積分 (カシミール不変量) の存在は自明でない。オイラー方程式の場合、基となる正準系はラグランジュ的記述による流体粒子の運動方程式である。流体粒子の間の区別がないという対称性 (relabeling symmetry) によって、流体粒子の運動を流れ場 \mathbf{v} へと縮約した結果がオイラー方程式と理解される。その際、現れる保存則は Kelvin の循環定理、すなわち渦度の保存則である [14]。渦度場は流体粒子に付随してトポロジカルな変形をし、これはオイラー方程式に課された「運動学的拘束条件」と呼べる。一般の3次元運動で、系が他に対称性をもたない場合、カシミール不変量として見つかっているのはヘリシティのみである。一方で、2次元運動に限れば無限個のカシミール不変量が存在する [15]。よって、運動学的拘束条件を「第一積分=const.」の形で常に表せるとは限らない。

Morrison & Greene [3] や Marsden *et al.* [4] はオイラー方程式に圧縮性およびエントロピー変化、さらには磁場の効果 (磁気流体方程式) まで含めた一般的なハミル

トン形式を導いた。オイラー方程式に加え、密度、エントロピー、磁場の方程式が順次加わるが、これらの量はどれも流体粒子に凍りついて運動し、運動学的な保存則そのものである。代数的構造としては「半直積」によってオイラー方程式の位相空間を拡張することでこれらの方程式系が得られた。

圧縮性流体方程式 (1), (2) において、運動学的拘束条件すなわち保存則を自動的に満たすような変分は、

$$\delta \mathbf{v} = \boldsymbol{\xi} \times (\nabla \times \mathbf{v}) - \nabla(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{v} + \alpha), \quad (3)$$

$$\delta \rho = -\nabla \cdot (\rho \boldsymbol{\xi}), \quad (4)$$

で与えられる。ここで、ベクトル場 $\boldsymbol{\xi}$ とスカラー場 α は任意であり、これらによって (3), (4) のように生成される変分 $(\delta \mathbf{v}, \delta \rho)$ には、任意の $(\delta \mathbf{v}, \delta \rho)$ と比べて、制限が課せられている。この変分はヘリシティや全質量といったカシミール不変量を変化させないことが容易に確かめられるが、それだけではなく、渦度や質量の保存則も破らないようになっている。例えば、渦度 $(\nabla \times \mathbf{v})$ が存在しない領域では $\delta \mathbf{v}$ はポテンシャル流れであり、この変化による渦の不生不滅を表している。同様に密度の存在しない領域 $\rho = 0$ にも密度変化は起こらない $\delta \rho = 0$ 。非圧縮の極限では (3) の右辺第一項を非圧縮ベクトル場に射影したもののだけが残る、Arnold が用いた isovortical variation [15] と一致する。非正準系における (3)-(4) のような変分は研究者によって「generalized isovortical」、「dynamically accessible」 [16] などと形容されるが、本研究では運動学的に到達可能な変分 (kinematically accessible variation) と呼ぶことにする。

流体の全エネルギーを表すハミルトニアンは、

$$H = \int \left[\rho \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + U(\rho) \right] d^3x \quad (5)$$

である。 U は内部エネルギー密度で、圧力とは $\partial(U/\rho)/\partial\rho = p/\rho^2$ という関係で結ばれる。Arnold の方法によれば、ハミルトニアンに対する運動学的に到達可能な変分が極値 $\delta H = 0$ となる状態 (\mathbf{v}_e, ρ_e) は平衡 (定常) 状態を与え、さらにそこでの第二変分 $\delta^2 H$ が正定値あるいは負定値ならば、その平衡は安定である。

ここで用いた変分はあくまで運動学的な拘束条件に従う仮想的な変化にすぎないが、線形摂動論と照らし合わせると、その時間発展 (dynamics) を議論することができる [17, 5]。すなわち、方程式 (1), (2) を適当な平衡状態 (\mathbf{v}_e, ρ_e) のまわりで線形化し、線形摂動 $(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\rho})$ を

$$\tilde{\mathbf{v}}(t) = \boldsymbol{\xi}(t) \times (\nabla \times \mathbf{v}_e) - \nabla[\boldsymbol{\xi}(t) \cdot \mathbf{v}_e + \alpha(t)], \quad (6)$$

$$\tilde{\rho}(t) = -\nabla \cdot [\rho_e \boldsymbol{\xi}(t)], \quad (7)$$

のように平衡状態から運動学的に到達可能なものに制限してみる。すると、 $(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\rho})$ の発展方程式を $(\boldsymbol{\xi}, \alpha)$ の発展方程式へと自然に変換できることが示せるのである。

以降では、平衡状態の添字 e は省略して単に (\mathbf{v}, ρ) で表し、線形摂動のみに着目する。 $\boldsymbol{\xi}$ の発展方程式は、

$$\partial_t \boldsymbol{\xi} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\xi} - (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \boldsymbol{\xi} \times (\nabla \times \mathbf{v}) - \nabla(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{v} + \alpha), \quad (8)$$

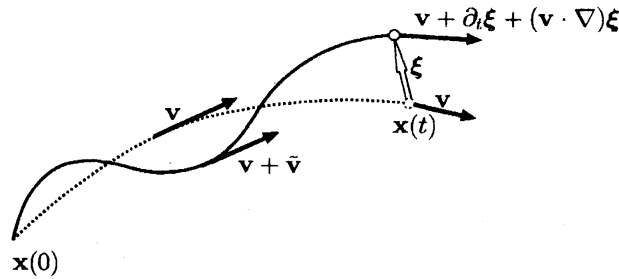


図 1: 摂動前 (点線) と摂動後 (実線) の流体粒子の軌道

となり、(6)によると、これはラグランジュ変位場の定義としてよく知られた式 [18]

$$\partial_t \xi + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \xi - (\xi \cdot \nabla) \mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}}, \quad (9)$$

と一致する。つまり、 ξ は流体粒子の軌道の変位という物理的意味を持っている。ここで、ラグランジュ変位場 ξ と通常の意味でのラグランジュ的描像との対応関係を再確認しておく。まず、摂動を受ける前の定常状態を考え、ある時刻 t に位置 \mathbf{x} にいる一つの流体粒子に着目する。定常流の流線を遡れば、この粒子が描いた軌道 (図 1 の点線) が求まり、初期位置 $\mathbf{x}(0)$ も特定される。この $\mathbf{x}(0)$ を粒子に対するラベルとみなし、他の粒子とは区別するのがラグランジュ的描像である。摂動が加わると、粒子の軌道は図 1 の実線のように揺らぎ、この軌道を各粒子に対して求めるのは一般には膨大な計算量となる。しかし、摂動が十分に小さい線形理論においては、時刻 t における粒子は摂動前に存在した場所 $\mathbf{x}(0)$ からそれ程離れていない。よって、その微小変位を $\xi(\mathbf{x}(t), t)$ とおく。このように与えた $\xi(\mathbf{x}, t)$ は一見すると (オイラー的) 流れ場 $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)$ と同様なベクトル場であるが、摂動後の粒子の軌道 $\mathbf{x}(t) + \xi(\mathbf{x}(t), t)$ を (線形近似のもとで) 一意に特徴付けている。摂動後の粒子の速度 (図 1 参照) はその場所での摂動速度 $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x} + \xi, t)$ に等しいはずなので、関係式 (9) を得る。

非圧縮流体の極限では α が現れず、(8) は ξ だけの閉じた方程式となる [17]。圧縮性がある場合は α を消去する事で、以下のような時間に関して二階の微分方程式に帰着される。

$$\begin{cases} \rho \partial_t^2 \xi + 2\rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \partial_t \xi = \mathcal{F} \xi, \\ \partial_t \xi(0) = -2(\mathbf{v} \cdot \nabla) \xi_0 - \mathbf{v} \times (\nabla \times \xi_0) - \nabla \alpha_0, \\ \xi(0) = \xi_0, \end{cases} \quad (10)$$

ここで、作用素 \mathcal{F} は

$$\mathcal{F} \xi = -\rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \xi] - (\xi \cdot \nabla) \nabla p + \nabla [(\rho c_s^2) \nabla \cdot \xi] - (\nabla \cdot \xi) \nabla p + \nabla (\xi \cdot \nabla p), \quad (11)$$

で与えられ、 $c_s = \sqrt{\partial p / \partial \rho}$ は音速を表す。この方程式自体はラグランジュ変位場の式 (9) に基づいて Frieman & Rotenberg [19] によって導出された (MHD の線形摂動に対して導出されたが、磁場をゼロにすれば上の式に一致する)。ただし、(10) では

$\partial_t \xi$ の初期条件を自由に与えることはできず、何らかの (ξ_0, α_0) で表されるようなものに制限されている。この点についてはどの論文にも指摘されていないが、運動学的な拘束 (6)、すなわち平衡状態の渦度 $\nabla \times \mathbf{v}$ のトポロジーが変化しないことを保証するためには、この初期条件に対する制約が不可欠である。

方程式 (10) は流体粒子に対するニュートンの第二法則に相当し、このラグランジュ変位場 ξ を解けば、(9) や (7) に代入することでオイラー場 $(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\rho})$ はただちに求めることができる。正準座標と正準運動量をそれぞれ、 $\mathbf{q} = \xi$ と $\mathbf{p} = \rho \partial_t \xi + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \xi$ で与えられるベクトル場とみなせば、(10) は正準ハミルトン系である。

$$\partial_t \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{I} \\ -\mathcal{I} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \frac{\delta(\delta^2 H)}{\delta \mathbf{p}} \\ \frac{1}{2} \frac{\delta(\delta^2 H)}{\delta \mathbf{q}} \end{pmatrix} \quad (12)$$

ここで、 \mathcal{I} は恒等作用素、 $\delta^2 H/2$ は摂動のハミルトニアンに相当し、

$$\delta^2 H = \int (\rho |\partial_t \xi|^2 - \xi \cdot \mathcal{F} \xi) d^3 x = \text{const.} \quad (13)$$

である。この $\delta^2 H$ は Arnold の方法を用いた H の第二変分と確かに一致する [20]。

このように、摂動のエネルギーをハミルトン力学に基づいて正確に議論するには、オイラー的に観測される流れ場や密度場からラグランジュ的な流体粒子の運動へと翻訳することが重要であり、そのためには摂動後の状態が摂動前の平衡状態から運動学的に到達可能である必要がある。

仮に、 ξ が $\xi(t) = \xi(t+T)$ を満たす周期 T の摂動だったとしよう。摂動のエネルギー (13) はそもそも時間に依らない定数だが、これの 0 から T までの平均をとると、方程式 (10) と部分積分を用いて以下のように書き直せる。

$$\frac{1}{T} \int_0^T \delta^2 H dt = \frac{1}{T} \int_0^T \int 2\mathbf{p} \cdot \partial_t \mathbf{q} d^3 x dt \quad (14)$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T \int 2\rho [\partial_t \xi + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \xi] \cdot \partial_t \xi d^3 x dt. \quad (15)$$

よって、もし平均流 \mathbf{v} が存在しなければ、摂動のエネルギーは常に正であることがわかる。負のエネルギーをもった摂動とはすなわち、平均流のエネルギーを下げるような揺らぎであるため、平均流が存在が不可欠である。

ここで、さらに物理的直観を得るために、摂動のエネルギーに対して少し大雑把な見積りを行う。流体粒子は平均流の流線に沿って運ばれながらも、 ξ だけ微小変位した位置にいることは前に述べた通りである。そこで、ある一本の流線に着目し、その近傍の細長い管状の領域 V に含まれる摂動エネルギーを求めてみる。線形理論であるため、 V 内における流体粒子の挙動を正弦波 $\xi(\mathbf{x}, t) = \hat{\xi} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)$ で近似する ($\omega = 2\pi/T$)。 (15) の空間積分を V の内部で行うと、

$$\frac{1}{T} \int_0^T \int_V 2\mathbf{p} \cdot \partial_t \mathbf{q} d^3 x dt = \omega \int_V \rho (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) |\hat{\xi}|^2 d^3 x. \quad (16)$$

を得る。右辺の最初の ω を除いた積分はこの摂動がもつ作用 (action) に相当し、波動理論では重要な物理量である。この結果によると、着目している流線に沿った方

向に関して、波の位相速度 $(\omega/k \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}$ が流速 \mathbf{v} よりも速ければ正の作用、遅ければ負の作用をもつことが読みとれる。このような見積りを各流線（つまり各流体粒子）に対して行い、領域全体で合計したものが摂動のエネルギーを与えることがわかる。一般に作用と周波数 ω の積が摂動のエネルギー（擬エネルギーとも呼ばれる）であり、代わりに波数 \mathbf{k} をかけたものは摂動の（擬）運動量である。いずれにしても作用の符号が本質的であり、安定性と密接な関わりをもつ。

線形の発展方程式 (10) の解は指数関数的 $e^{-i\omega t}$ に振る舞う固有モードの重ね合わせでしばしば表現される。数学的に微妙な問題についての考察は文献 [5] にゆずり、結果だけを述べると、摂動のエネルギーはそれぞれの固有モード（波）のエネルギーに分解されることがわかる。

$$\delta^2 H = \sum_{\omega_j \in \sigma_p} \omega_j \mu_p(\omega_j) + \int_{\sigma_c} \omega \mu_c(\omega) d\omega. \quad (17)$$

ここで、 $\sigma_p = \{\omega_j \in \mathbb{C}; j = 1, 2, \dots\}$ は離散的な固有値 (= 振動数) であり、 $\sigma_c \subset \mathbb{R}$ は実周波数帯の連続スペクトルを表す。次節でも具体的に考察するが、定常シア流の摂動には連続スペクトルが現れることがよく知られている [21]。 $\mu_p(\omega_j)$ や $\mu_c(\omega)$ はそれぞれの固有モードがもつ作用であり、ここでは上記で与えた直感的な解釈だけでこれらの符号を議論してみる。

3 平行シア流における波のエネルギー

この節では具体的な問題を設定し、前節で述べられたラグランジュ変位場による表現や、波のエネルギー（又は波の作用）をより詳細に議論する。すなわち、デカルト座標系 xyz において、壁にはさまれた領域 $x_1 \leq x \leq x_2$ の間の平行シア流

$$\mathbf{v} = v(x)\mathbf{e}_y, \quad \rho = \text{const.} \quad (18)$$

を考える (\mathbf{e}_y は y 方向の単位ベクトル)。重力などの外力も働いてないとし、密度を一定とした。さらに、摂動 (ξ, α) は z 方向に沿って変化しないとし、二次元運動

$$\xi(x, y, t), \quad \alpha(x, y, t) \quad (19)$$

のみを考える。 y 方向にはフーリエ変換

$$\xi(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \xi_k(x, t) e^{iky} dk. \quad (20)$$

を行うと、(10) は ξ_k の方程式に変換される。以降では $k (> 0)$ を固定して考察するため、 ξ_k の添字 k は省いて再び ξ で表す。混乱は生じないと思われるが、フーリエ変換を介してこの ξ は複素数になったことに注意しておく。 α や $(\tilde{v}, \tilde{\rho})$ にも同様なフーリエ変換を施したとすると、運動学的に到達可能な摂動 (6)-(7) とは、

$$\begin{cases} \tilde{v}_x = -v\xi'_y - \alpha' \\ \tilde{v}_y = -v'\xi_x - ik(v\xi_y + \alpha) \\ \tilde{v}_z = 0 \\ \tilde{\rho} = -\rho\xi'_x - \rho ik\xi_y \end{cases} \quad (21)$$

のようになる (プライム'は x に関する微分 ∂_x を表す)。

渦度の平均場 $\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{v} = v'(x)\mathbf{e}_z$ は z 成分しかもたず、等エントロピー圧縮性流体では \mathbf{w}/ρ が流体粒子の変位 $\boldsymbol{\xi}$ に凍りついて変化するという渦度の保存則が課せられている。上の摂動にはこういった性質が自動的に満たされており、 \mathbf{w}/ρ の線形摂動は

$$\widetilde{\left(\frac{\mathbf{w}}{\rho}\right)} = -\frac{v''}{\rho}\xi_x\mathbf{e}_z \quad (22)$$

のように x 方向の変位と関係付けられる。(21) や (22) を詳細に見ていくと、まず、 z 方向の変位 ξ_z は渦度 $\mathbf{w} = v'(x)\mathbf{e}_z$ に沿った平行移動なので、オイラー場 $(\tilde{v}, \tilde{\rho})$ には何の変化も及ぼさない。また、渦度は z 方向に一様な変形しかしないことから $\tilde{v}_z = 0$ である。 $k = 0$ という特別な場合を除くと、領域 $[x_1, x_2]$ 内でシア流が変曲点 $v''(x) = 0$ を持たなければ、(21) における (ξ_x, ξ_y, α) と $(\tilde{v}_x, \tilde{v}_y, \tilde{\rho})$ の関係は 1 対 1 であることが示せる。逆に言えば、変曲点が存在すると、摂動場 $(\tilde{v}_x, \tilde{v}_y, \tilde{\rho})$ には運動学的な制限が課せられる。この制限は (22) に起因するものであり、 $v''(x) = 0$ となる場所ではどんな変位 ξ_x を与えたとしても渦度は変化しない。 $v''(x)$ は背景渦度の勾配を表し、それがゼロ、すなわち一様渦度場においてどのような流体の (二次元) 変形を加えても、オイラー的に観測した場には変化が見られないことを表している。

固有値 $\omega_j \in \sigma_p$ に対する固有関数を $\hat{\boldsymbol{\xi}}(\omega_j)$ で表し、(10) の固有値問題から $\hat{\xi}_y$ と $\hat{\xi}_z$ を消去すると、

$$\rho\Pi\hat{\xi}_x + \partial_x \left[\frac{\rho c_s^2 \Pi}{\Pi - k^2 c_s^2} \partial_x \hat{\xi}_x \right] = 0 \quad (23)$$

を得る [22]。ただし、 $\Pi(\omega_j, x) = [\omega_j - kv(x)]^2$ とおいた。この固有値問題を数値的に解くことはもはやそれほど難しいことではない。ところが、シア流 $v(x)$ に対する安定性の「必要十分条件」を厳密に議論すると、それは未だに解決しておらず、非圧縮極限の Rayleigh 方程式においてすら自明ではない [23]。もっとも実際の現象には、微少な粘性や非線形効果が効いてくるため、完全流体の線形安定性をそこまで厳密に解析することに物理的な関心は薄いかもしれない。しかし、前節で展開した線形理論は流体粒子に対する「力学」そのものであり、不安定性が起こるメカニズムをエネルギーや運動量を用いて物理的に理解するための重要である。そういった理解が線形理論の範囲で厳密に与えられていれば、粘性や非線形効果が加わった際の摂動論や数値計算結果などにもある程度の考察を加えることができるであろう。

以下では、それぞれの波がもつエネルギーを考察するが、具体的な固有値問題 (23) の解法については過去の文献 [18, 24, 22] を参照されたい。エネルギーの数学的定式化は文献 [5] で与えているが、ここではそれらの結果に物理的な解釈を与えることを試みる。

3.1 音波

非圧縮に近い流体の流れでは、音速 c_s (=定数) は平均流 $v(x)$ よりも非常に速く、音波の固有振動数 (ω_j) も高い。ここでは、適当な一様流 v_0 (これはガリレイ変換に

よっていくらでも打ち消せる)の存在を許し、それと比べて $|v(x) - v_0| \ll c_s$ だと仮定すると、 $\Pi \simeq (\omega_j - v_0)^2 = \text{定数}$ より、音波の固有振動数は

$$\omega_n^{(\pm)} \simeq kv_0 \pm \left(k^2 + \frac{n^2 \pi^2}{(x_2 - x_1)^2} \right)^{1/2} c_s, \quad (24)$$

で見積れる。ここで、 $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$ は x 方向のモード数に対応する。

固有値 $\omega_n^{(+)}$ に対応する音波は至る所で平均流 $v(x)$ よりも速く y 方向へ伝播する。

$$\omega_n^{(+)} / k > v(x) \quad \text{for all } x \in [x_1, x_2] \quad (25)$$

よって、この波は正の作用をもつ。一方、 $\omega_n^{(-)}$ に対応する音波は平均流から見れば $-y$ 方向に伝播する波である。

$$\omega_n^{(-)} / k < v(x) \quad \text{for all } x \in [x_1, x_2] \quad (26)$$

よって、これらの波の作用は負である。このように作用の符号は明らかであるが、波のエネルギーはこれに対して振動数 $\omega_n^{(\pm)}$ をさらにかけたものであるため、 $\omega_n^{(\pm)}$ の正負に応じてエネルギーの符号も反転する。一様流 v_0 は異なる慣性系に移れば自由に変えられるため、 $\omega_n^{(\pm)}$ の符号も観測者によっては違って見える。つまり、波のエネルギーの符号や大きさにはこのような任意性があるため、この場合はあまり本質的ではなく、むしろ作用の符号が重要である(流体や壁において散逸が加わった状況を考える際には、エネルギーの符号の重要性は増す)。

平均流の変動 $|v(x) - v_0|$ が音速 c_s と同程度まで速くなると、 $n = 0$ の音波の周波数 $\omega_0^{(\pm)}$ は平均流の周波数 $kv(x)$ と縮退し、次に述べる渦モードと相互作用するようになる。具体的な固有値を求めるためには、様々な平均流 $v(x)$ において数値的に (23) を解かなければならない。しかし、ここで考察した波の作用というのは平均流が波の周期に比べてゆっくりと変化する限り、断熱不変量として振る舞う。従って、同じ固有モードと固有値を追跡する限り、ここで判別した作用の符号が容易に変化することはない。

3.2 渦モード (点スペクトル)

音波が伝わるためには渦が振動する必要はなく、平均場が渦無し領域であろうと関係なく伝播することができる。一方で、渦が存在する領域でしか現われない固有モードがあり、これらは渦モード (vortical modes) として音波とは区別される。渦モードは同じ固有値問題 (23) の解であるものの、振動数はおよそ $\{kv(x)\}$ 程度で、複素数にもなり得る (Kelvin-Helmholtz 不安定性)。また、渦モードは背景の渦 w のトポロジカルな変形が伝播する振動モードである。ただし、音波も含め多くの波は「変位」に対して「復元力」が働くというバネ振動との類似で力学的イメージが膨らむが、渦モードが従う渦度方程式は流れによって渦が運ばれたり、引き伸ばされたりすることを意味し、様相はだいぶ異なる。今考えている二次元運動では渦の引き伸ばしは起こらないが、シア流で運ばれる渦自体がさらにシアをもった流れを誘

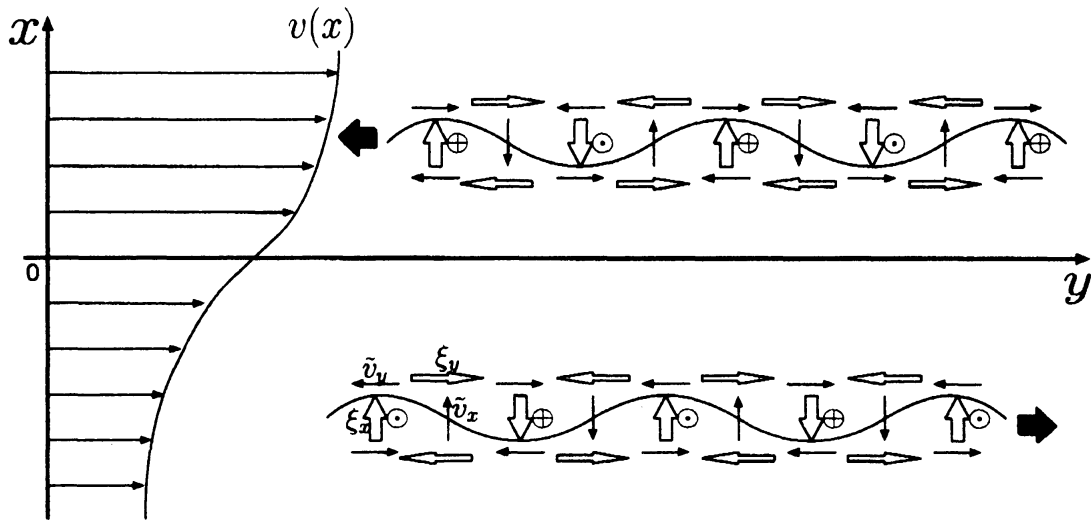


図 2: 渦モードの伝播する様子

導するため、渦モードがもつエネルギーを力学的に理解するには工夫がいる。古くは Lin [25] や Gill [26] によって物理的考察がなされているがあまり正確なものとは言えない。以下では Knauer [27] の考察を発展させた別の解釈を与える。

例として図2のようなシア流 $v(x) > 0$ を考える。まず、 $x < 0$ の領域では、 $v''(x) > 0$ であり、 x の増大と共に背景の渦度 $w = v'(x)e_z$ も単調に増大しているとする (z 軸は紙面に垂直で、奥向きが正方向)。ある $x = x_0 (< 0)$ という一本の流線上に着目し、その上の流体粒子が $v(x_0)$ で流されながらも、ある瞬間に白い矢印のような周期的変位 (ξ_x, ξ_y) をしたとする (音波は考えないので、非圧縮な変位とし、 ξ_y も図のように存在する)。背景渦度は x 方向の変位 ξ_x と共に (22) のように変形するため、 $\xi_x > 0$ の所では渦度は減少 ($\bar{w}_z < 0$) し、 $\xi_x < 0$ の所では増大 ($\bar{w}_z > 0$) する。すなわち、正 (\oplus) と負 (\ominus) の渦列が流線上に現れたことになり、さらにこの摂動渦は図中の細い矢印のような摂動流れ場 $(\tilde{v}_x, \tilde{v}_y)$ を誘導する。 ξ_x は次の瞬間に \tilde{v}_x の方向へ変化するため、この揺らぎは $v(x_0)$ よりもさらに上乗せされた速度で y 方向へ伝播する。従ってこのような流体粒子の運動は正の作用をもつ事がわかる。振動数を ω_0 とすれば、 $\omega_0 > kv(x_0) > 0$ なので、摂動のエネルギーも正である。

同様な議論を $v''(x) < 0$ である $x > 0$ の領域でも行う。ここでは、 x の正の方向に背景渦度が単調減少しているので、ある流線 $x = x_0 (> 0)$ 上で同様な変位場を考えると、(22) によって生成される摂動渦の符号は逆になる。結果的にこの変位場は $v(x_0)$ で運ばれながらも、 $-y$ 方向に伝播することになり、負の作用をもつことがわかる。振動数は $\omega_0 < v(x_0)$ であり、 $\omega_0 > 0$ ならば摂動のエネルギーも負である。摂動渦が駆動する $-y$ 方向の伝播速度が平均流よりも勝っていれば、 $\omega_0 < 0$ となり、摂動のエネルギーは正となる。

まとめると、ある流線上の摂動はそこでの $v''(x)$ の符号が正 (または負) であれば、平均流 $v(x)$ と比べて正 (または負) の方向に伝播し、正 (または負) の作用をもつ。

このように渦モードは自分自身が誘導する流れ場によって自らを駆動し、バネ振動とのアナロジーは成り立たない。渦モードが中心的存在である非圧縮流体では ξ

の方程式が (8) だけで閉じてることを思いだそう。これは時間に関して一階の微分方程式であり、 ξ の移流や引き伸ばしを意味する。圧縮性や外力などの効果が加わると、時間に関して二階の方程式 (10) を解くことになり、初めて復元力 ($\mathcal{F}\xi$) を介したバネ振動に似たモードが現れるわけである。

このように各流線ごとに局所的な変位を与えて議論したが、実際には流線同士で互いに影響を及ぼし合うため、固有モードは領域全体で共通の振動数をもつように決まる。ただし、具体的に (23) を解こうとすると、この方程式はしばしば特異点をもち、次節で述べるような連続スペクトルとの相互作用を考慮する必要がある。

Kelvin-Helmholtz 不安定性はまさに図 2 の状況で起こり得る。図中では $x = 0$ の位置にシア流の変曲点を想定しており、 $x > 0$ の領域では摂動がその場所の $v(x)$ よりも遅く伝播し、 $x < 0$ の領域では摂動が $v(x)$ よりも速く伝播する。領域全体を通して平均流は単調増大 $v'(x) > 0$ しており、 $x > 0$ の摂動と $x < 0$ の摂動の伝播速度はちょうど一致することがある。この時、それらの間で強い相互作用が生じる。両者の摂動の位相が図 2 のように 90 度ずれていると、一方の \tilde{v}_x はもう一方の ξ_x を常に増大させ、摂動が指数関数的に増大する (指数関数的に減衰する位相の関係もあり、それもまた固有モードである)。 $x > 0$ の摂動と $x < 0$ の摂動は互いに異符号の作用、すなわち異符号のエネルギーをもっており、これらが同時に増大することは摂動のエネルギー保存則 (13) には反しない。Kelvin-Helmholtz 不安定性がこのような Hopf 分岐であることは、Cairns [9] が階段状のシア流 $v(x)$ を用いて議論した。しかし、図 2 のような滑らかなシア流では連続スペクトルの存在が重要となってくる。

3.3 渦モード (連続スペクトル)

固有値問題 (23) は固有値 ω_j が実数で、 $kv(x)$ の値域に属している時、 $\omega_j = kv(x_c)$ となるような特異点 x_c をもつ。実際、 $\sigma_c = \{kv(x); x \in [x_1, x_2]\}$ は連続スペクトルであり、これに属する $\omega \in \sigma_c$ にはそれぞれの特異点 $x = x_c$ に局在した特異な固有関数が対応する [21]。この $x = x_c$ は臨界層 (critical layer) と呼ばれ、長い研究の歴史がある [18, 24]。しかし、連続スペクトルを無数の特異なモードの集合という見方 [28] は、多くの教科書であまり強調されておらず、平行シア流については Maslowe [29], Balmforth & Morrison [13] などを参照するとよい。文献 [13] では非圧縮二次元運動において、各々の特異なモードがもつエネルギー及び作用を計算している。我々はラプラス変換と超関数論を応用した一般的な手法を構築し、それ適用することで同じ結果を得た [5]。それによると、 $\omega \in \sigma_c$ に相当する特異な固有モードのもつ作用の符号は $v''(x_c)$ の符号に一致することがわかる。

特異な固有モードが生成する流れ場として、Kelvin による cat's eye パターン [18] を示すのが通説であるが、これだけを見ても波のエネルギーや作用を理解することはできない。そのためには、図 3 に示すような渦構造を考察する必要がある。図中では、 $v(x) > 0$ かつ $v''(x) > 0$ の領域を考えており、どれでもよいので一つの流線 $x = x_{c1}$ に着目しよう。 $x = x_{c1}$ 上に周期的な変位を与えるのは図 2 と同じだが、それよりも小さい振幅で逆向きの変位をすぐ近くの流線 $x = x_{c2} (> x_{c1})$ に与えたとする (図 3)。基本的には前者の変位に伴う摂動渦 (大きく表示された \oplus, \ominus) が支配的

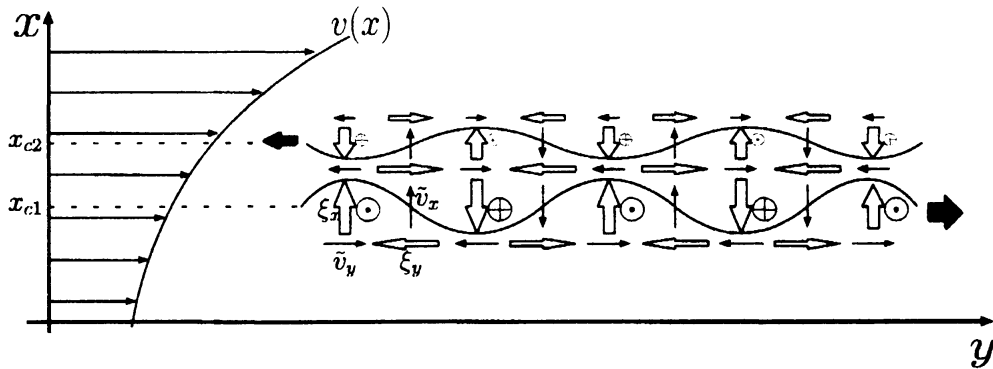


図 3: 特異な固有モードの描像

であるため、流れ場としては cat's eye パターン (が少々歪んだ程度) にしか見えない。しかし、 $x = x_{c1}$ における変位は以前と同様に $v(x_{c1})$ より速く伝播するのに対し、 $x = x_{c2}$ における変位は $v(x_{c2})$ よりも遅く伝播することが見てとれる。平均流と比べてどれだけ速く (または遅く) 伝播するかはそれぞれの振幅による。平均流が $v(x_{c2}) > v(x_{c1})$ であることから、これらの振幅が適度な関係にあれば、どちらの変位も同じ速度で伝播するような状況が考えられる。その速度を $v(x_c)$ ($x_{c1} < x_c < x_{c2}$) とおけば、これは周波数 $\omega = kv(x_c)$ の波に相当する。ここでは渦列の位置を x_{c1} と x_{c2} で代表させたが、実際に「適度な振幅」の分布を (23) から求めると、それはデルタ関数 $\delta(\omega - kv(x))$ と $1/(\omega - kv(x))$ を含む特異な関数でないといけなことがわかる。それでも、図 3 の描像より、正の作用をもつ変位の方が支配的であるため、この特異なモードは正の作用をもつことがわかる。同様な議論を $v''(x) < 0$ の領域の流線上に局在した特異モードに対して行えば、そちらは負の作用をもつことがいえる。平均流が $v''(x) = 0$ である領域 (linear shear) には、特異なモードが存在するものの、(22) によって渦の摂動は許されていないので、運動学的に到達不可能である。

このように、 $v''(x) \neq 0$ の領域は各流線ごとに局在する特異なモードで埋め尽くされており、先に述べた点スペクトルに相当する音波や渦モードは連続スペクトルの中に入り込むと、それらと相互作用する。一般に正と負の作用をもつモードの固有値が縮退すると不安定モードが生じ、それは連続スペクトルに対してもある程度成り立つことがわかる [5]。流れの線形安定性解析は数值的、解析的にかなり行われてきたが、このようにハミルトン力学的な観点から解釈を与えておくことは、より複雑な問題を考える際の重要な足掛かりとなるであろう。

Acknowledgments. M. H. was supported by Research Fellowships of the Japan Society for the Promotion of Science (JSPS) for Young Scientists, and is supported by 21st century COE program “Development of Dynamic Mathematics with High Functionality” at Faculty of Mathematics, Kyushu University. Y. F. was supported in part by a Grant-in-Aid for scientific research from the Japan Society for the Promotion of Science.

参考文献

- [1] V. Arnold, *Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits*. Annales de l'Institut Fourier, XVI, no. 1, 319 (1966).
- [2] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer, Berlin (1978).
- [3] P. J. Morrison, J. M. Greene, *Noncanonical Hamiltonian density formulation of hydrodynamics and ideal magnetohydrodynamics*. Phys. Rev. Lett., **45**, 790 (1980).
- [4] J. E. Marsden, T. Ratiu and A. Weinstein, *Semidirect products and reduction in mechanics*. Trans. Am. Math. Soc., **281**, 147 (1984).
- [5] M. Hirota & Y. Fukumoto, *Energy of hydrodynamic and magnetohydrodynamic waves with point and continuous spectra*, submitted to J. Math. Phys. (MHF Preprint Series <http://www.math.kyushu-u.ac.jp/coe/report/>)
- [6] M. G. Krein, *A generalization of some investigations on linear differential equations with periodic coefficients*. Dokl. Akad. Nauk SSSR A **73**, 445 (1950).
- [7] J. K. Moser, *New aspects in the theory of stability of Hamiltonian systems*. Comm. Pure Appl. Math. **11**, 81 (1958).
- [8] R. MacKay, *Stability of equilibria of Hamiltonian systems*, in Nonlinear Phenomena and Chaos. S. Sarkar (ed.), 254 (1986).
- [9] R. A. Cairns, *The role of negative energy waves in some instabilities of parallel flows*. J. Fluid Mech., **92**, 1 (1979).
- [10] R. S. MacKay and P. G. Saffman, *Stability of water waves*. Proc. R. Soc. Lond. A **406**, 115 (1986).
- [11] Y. Fukumoto, *The three-dimensional instability of a strained vortex tube revisited*. J. Fluid Mech. **493**, 287 (2003).
- [12] I. B. Bernstein, E. A. Frieman, M. D. Kruskal and R. M. Kulsrud, *An energy principle for hydromagnetic stability problems*. Proc. Roy. Soc. London **A244**, 17 (1958).
- [13] N. J. Balmforth & P. Morrison, *Hamiltonian description of shear flow*. In *Large-Scale Atmosphere-Ocean Dynamics 2: Geometric Methods and Models*. Eds. J. Norbury & I. Roulstone, Cambridge University Press (2002).
- [14] R. Salmon, *Hamiltonian fluid mechanics*. Ann. Rev. Fluid Mech. **20**, 225 (1988).

- [15] V. I. Arnold and B. A. Khesin, *Topological Methods in Hydrodynamics*. Springer, New York (1998).
- [16] P. J. Morrison, *Hamiltonian description of the ideal fluid*. Rev. Mod. Phys. **70**, 467 (1998).
- [17] V. F. Kop'ev & S. A. Chernyshev, *Vortex ring oscillations, the development of turbulence in vortex rings and generation of sound*. Physics-Uspckhi. **43**(7), 663 (2000).
- [18] P. G. Drazin and W. H. Reid, *Hydrodynamic stability*, (Cambridge Univ., Cambridge, 1981).
- [19] E. Frieman and M. Rotenberg, *On Hydromagnetic Stability of Stationary Equilibria*. Rev. Mod. Phys. **32**, 898 (1960).
- [20] E. Hameiri, *Dynamically accessible perturbations and magnetohydrodynamic stability*. Phys. Plasmas **10**, 2643 (2003).
- [21] K. M. Case, *Stability of inviscid plane Couette flow*. Phys. Fluids **3**, 143 (1960).
- [22] L. M. Mack, "Review of linear compressible stability theory," in *Stability of Time Dependent and Spatially Varying Flows* (Springer, Berlin, 1987).
- [23] N. J. Balmforth & P. J. Morrison, *A necessary and sufficient condition for inviscid shear flow*. Stud. in Appl. Math. **102**, 309 (1999).
- [24] L. Lees and C. C. Lin, "Investigation of the Stability of the Laminar Boundary Layer in a Compressible Fluid," NACA Technical Note No. 1115 (1946).
- [25] C. C. Lin, *The Theory of Hydrodynamic Stability*. (Cambridge University Press 1955).
- [26] A. E. Gill, *A mechanism for instability of plane Couette flow and of Poiseuille flow in a pipe*. J. Fluid Mech. **21**, 503 (1965).
- [27] W. Knauer, *Diocotron Instability in Plasmas and Gas Discharges*. J. Appl. Phys. **37**, 602 (1966).
- [28] N. G. Van Kampen, *On the theory of stationary waves in plasmas*. Physica, **21**, 949 (1955).
- [29] S. A. Maslowe, "Shear Flow Instabilities and Transition," in *Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence*. Topics in Applied Physics, vol. 45. Edited by. H. L. Swinney and J. P. Gollub (Springer 1981).