数理解析研究所講究録
第 1612 巻 2008 年 146-153

Heisenberg action in skein theory and external edge condition

東京大学大学院数理科学研究科
(Graduate school of Mathematical Sciences,
the University of Tokyo)
藤田 玄 (Hajime Fujita)*

1 序

昨年度の短期共同研究集会「変換群の理論とその応用」において, Riemann 面上の平坦接続のモジュライ空間上の直線束の正則切断の空間へのある Heisenberg 作用の組み合わせ的な構成・記述について報告した. 考えていた問題とは, 3 価グラフをインプットデータとし, その許容ウェイト (後述) からなる基底に関して Heisenberg 作用の行列表示を与えよ, というものであった. 昨年度までに得ていた結果はおおよそ以下のものである.

1. 3 価グラフのデータから Heisenberg 群を再現した.

2. 表現行列が満たすべきある自然な組み合わせ的な性質「外線条件 (External edge condition)」を見出した.

しかし, 表現行列を完全に記述するには至っていなかった. その後, G.Masbaum 氏から, skein 理論による位相的場の理論の構成について学ぶ機会があり, さらにそのアプローチにより上述の問に対する答えを得ることができる, つまり表現行列が計算可能であることも知った. [1] 本報告では, skein 理論による Heisenberg 作用の表現行列の計算結果を述べる. この計算を実行することにより, 作用の指標公式が明示的に得られ, さらに Heisenberg 作用に付随する位相的場の理論の分解に関する次元公式も得られる. これらの公式は曲面に境界がない場合, もしくはグラフに 1 価頂点がない場合は [1] および [3] で得られている. 本稿での結果は 1 価頂点の有無に関わらず成立し, 彼らの公式の拡張を与える.

*hajime@ms.u-tokyo.ac.jp

[1] Masbaum はそれに関わるノートを筆者に見せてくれた. ここに感謝したい.

2 BHMV 理論における Heisenberg 作用

まず, 我々の計算の基となる BHMV 理論について必要なことをまとめておく. Blanchet-Habbeger-Masbaum-Vogel[3] は Kauffman 括弧式に由来する量子不変量の理論に基づき, 各非負整数 k に対してある種の 3 次元のコボルディズム圏 $\mathcal{C}$ からベクトル空間の圏[2]$\mathcal{V}$ へのある自然な公理を満たす関手として (2+1) 次元位相的量子場の理論 (TQFT) を構成した:

$$V_k : \mathcal{C} \to \mathcal{V}$$

ここで, $\mathcal{C}$ の対象および射は

- $Ob_{\mathcal{C}} = \{$ ウェイト付きの点付きの閉曲面 (色付き曲面)$\}$
- $Mor_{\mathcal{C}} = \{$ ウェイト付きリンクまたはグラフを含む 3 次元多様体 $\}$

である. ただし, ウェイトとは 0 以上 k 以下の整数である. 対象 C に対してベクトル空間 $V_k(C)$ を TQFT ベクトル空間とよぶことにする.

いま, $\mathcal{C}$ の対象 C 上の単純閉曲線 c に対して $\mathcal{C}$ の射 M_c が $M_c := (C \times [0,1], c_k)$ により定義される. ただし, c_k は M 内のリンク $c \times \{1/2\}$ に重み k を与えたものである. 関手 V_k により線形写像 $V_k(M_c) \in \mathrm{End}(V_k(C))$ が定まる. Blanchet-Habbeger-Masbaum-Vogel は次を示した.

定理 2.1 (Blanchet-Habbeger-Masbaum-Vogel). 上の状況で次が成立する.

1. 各単純閉曲線 c に対して $V_k(M_c)$ は対合作用である.
2. 対合の族 $\{V_k(M_c) \mid c : \text{単純閉曲線}\}$ は $\mathbb{Z}/2$-係数ホモロジー群 $H_1(C;\mathbb{Z}/2)$ の $\mathbb{Z}/4$-中心拡大の作用を定める.

次に, リボングラフを用いたベクトル空間 $V_k(C)$ の記述について述べる. リボングラフとは各頂点に巡回順序が付与されたグラフである. 本稿では, グラフの頂点は (有限個で)1 価または 3 価であるものとする, つまり 1-3 価グラフのみを扱う. いま, Γ を 1-3 価グラフとし, 頂点の集合を $V(\Gamma)$, 辺の集合を $E(\Gamma)$ とする. また, $E_t(\Gamma)$ を 3 価頂点のみをもつ辺の集合, $E_u(\Gamma)$ を 1 価頂点をもつ辺の集合とする ($E(\Gamma) = E_t(\Gamma) \sqcup E_u(\Gamma)$). 非負整数 k と写像 (境界の重み)

$$j' : E_u(\Gamma) \to \{1, \cdots, k\}$$

を固定する. $j'(e_l) =: j'_l$ とおく.

定義 2.2 (許容ウェイト). 写像 $j : E(\Gamma) \to \{1, \cdots, k\}$ がレベル k 許容ウェイトであるとは, $j|_{E_u(\Gamma)} = j'$ であり, 各 3 価頂点 $v \in V(\Gamma)$ で以下の 3 条件 (レベル k 量子 Clebsch-Gordan 条件) を満たすときをいう:

[2] 正確にはある円分環を係数とする加群の圏である.

$$\begin{cases} j(e_{l_1}) + j(e_{l_2}) + j(e_{l_3}) \in 2\mathbb{Z} \\ |j(e_{l_1}) - j(e_{l_2})| \le j(e_{l_3}) \le j(e_{l_1}) + j(e_{l_2}) \\ j(e_{l_1}) + j(e_{l_2}) + j(e_{l_3}) \le 2k. \end{cases}$$

ただし, $e_{l_1}, e_{l_2}, e_{l_3}$ は v から出る辺である. 固定された j' に対するレベル k 許容ウェイトのなす有限集合を $QCG_k(\Gamma; j')$ (または省略して $QCG_k(\Gamma)$) とかく.

リボングラフ Γ に対して頂点の向きを用いて得られるリボン (境界付きの向き付けられたコンパクト曲面) に厚みをつけたハンドル体を B_Γ とする: $B_\Gamma = \Gamma \times [0,1]$. このとき, 境界の重み j' を固定すると, B_Γ の境界 C_Γ は j' から決まる重みをもつ色付き曲面となる. また, グラフ Γ は $\Gamma \times \{0\}$ として曲面 C_Γ に埋め込まれている. 各 $j \in QCG_k(\Gamma; j')$ に対してベクトル空間 $V_k(C_\Gamma)$ の元 $|j\rangle$ が次のように定義される. まず, 組み (B_Γ, Γ, j) は $\mathcal{C}$ の射 $\emptyset \to (C_\Gamma, j')$ を定める. これを関手 V_k で送ることで線形写像 $V_k(B_\Gamma, \Gamma, j) : V_k(\emptyset) \to V_k(C_\Gamma, j')$ が定まる. V_k に関する公理の 1 つから $V_k(\emptyset) = \mathbb{C}$ となる. このとき, $|j\rangle := V_k(B_\Gamma, \Gamma, j)(1) \in V_k(C_\Gamma, j')$ とおく.

定理 2.3 (B-H-M-V). 有限集合 $\{|j\rangle \mid j \in QCG_k(\Gamma; j')\}$ はベクトル空間 $V_k(C_\Gamma; j')$ の基底をなす.

3　3価グラフによる Heisenberg 群の実現

いま、Γ を $3g-3+2n$ 本の辺 $\{e_l \mid l = 1, \cdots, 3g-3+2n\}$ と $2g-2+n$ 個の 3 価頂点と n 個の 1 価頂点からなる 3 価グラフとする. $3g-3+2n$ 個の文字 $\{f_l \mid l = 1, \cdots, 3g-3+2n\}$ の集合を $\check{E}(\Gamma)$ とする. 以下, 本章の記述の多くの部分は 1 価頂点の扱いを除いて昨年度の講究録 [5] と重複する.

3.1　4 つの格子

以下のように 4 つの格子 $\Lambda_0, \Lambda, \Lambda_0^*, \Lambda^*$ を定義する。

定義 3.1. 集合 $\check{E}(\Gamma) = \{f_l\}$ で生成されるベクトル空間 $\mathbb{R}\langle \check{E}(\Gamma)\rangle$ 内の標準的な格子を $\Lambda_0(\Gamma) = \Lambda_0$ とする. 次に、辺 e_{i_m} $(m = 1, 2, 3)$ をもつ頂点 v_i に対してベクトル $F_m^i \in \mathbb{R}\langle \check{E}(\Gamma)\rangle$ を以下で定義する:

$$\begin{aligned} F_1^i &:= \frac{1}{2}(-f_{i_1} + f_{i_2} + f_{i_3}) \\ F_2^i &:= \frac{1}{2}(f_{i_1} - f_{i_2} + f_{i_3}) \\ F_3^i &:= \frac{1}{2}(f_{i_1} + f_{i_2} - f_{i_3}). \end{aligned}$$

ただし, 頂点 v_i がループをもつ (例えば $e_{i_2} = e_{i_3}$) ときは

$$\begin{aligned} F_1^i &:= -\frac{1}{2}f_{i_1} + f_{i_2} \\ F_2^i &:= E_3^i := \frac{1}{2}f_{i_1}. \end{aligned}$$

である. ベクトルの集合 $\{F_m^i \mid m = 1,2,3,\ i = 1,\cdots,2g-2\}$ で生成される $\mathbb{R}\langle \check{E}(\Gamma)\rangle$ 内の格子を $\Lambda(\Gamma) = \Lambda$ とする.

集合 $E_t(\Gamma)$ で生成されるベクトル空間 $\mathbb{R}\langle E_t(\Gamma)\rangle$ 内の標準的な格子を $\Lambda_0^*(\Gamma) = \Lambda_0^*$ とする. また, 格子 $\Lambda^*(\Gamma) = \Lambda^*$ を

$$\Lambda^* := \{\sum_l n_l e_l \in \Lambda_0^* \mid n_{i_1} + n_{i_2} + n_{i_3} \in 2\mathbb{Z}\}$$

により定義する. 定義から Λ_0 は Λ の部分格子であり, $\Lambda/\Lambda_0 \cong \mathbb{Z}_2^{2g-2+n}$ であることもわかる.

3.2 Heisenberg 群の構成

リボングラフと付随する格子から曲面のホモロジー群の中心拡大として構成される Heisenberg 群を再現する. まず曲面のホモロジー群が以下のように記述される. (証明については [5] 参照.)

主張 3.2. リボングラフ Γ に対して以下が成り立つ。

1. 自然な同型 $\Lambda^*/2\Lambda_0^* \cong H_1(\Gamma;\mathbb{Z}_2)(\cong \mathbb{Z}_2^g)$ がある.

2. 自然な同型 $\Lambda_0/2\Lambda \oplus \Lambda^*/2\Lambda_0^* \cong H_1(\hat{C}_\Gamma;\mathbb{Z}/2)$ がある. ただし, $\hat{C}_\Gamma$ は C_Γ 上の *1* 価頂点に対応する点のまわりの円板を除いて得られる境界付き曲面である.

さらに, Λ_0 と Λ_0^* の間の自然なペアリングから誘導される双線形形式はホモロジー群上の交差形式に一致する.

定義 3.3. 直積集合 $\mathcal{G}(\Gamma) := \mathbb{Z}/4 \times (\Lambda_0/2\Lambda \oplus \Lambda^*/2\Lambda_0^*)$ に積構造を

$$(c_1,\mu_1,\lambda_1)\cdot(c_2,\mu,\lambda_2) = (c_1c_2(-1)^{\lambda_2\cdot\mu_1}, \mu_1+\mu_2, \lambda_1+\lambda_2)$$

で定義する. ここで $\cdot$ は $\Lambda_0/2\Lambda$ と $\Lambda^*/2\Lambda_0^*$ の間のペアリングである. 定義より, $\mathcal{G}(\Gamma)$ は中心拡大

$$1 \to \mathbb{Z}/4 \to \mathcal{G}(\Gamma) \to \Lambda_0/2\Lambda \oplus \Lambda^*/2\Lambda_0^* \to 0$$

を定め, Heisenberg 群となる. 拡大に付随する 2 次のコホモロジー類が一致することから次がわかる.

主張 3.4. *Heisenberg* 群 $\mathcal{G}(\Gamma)$ は *[3]* での *Heisenberg* 群 $\mathcal{G}$ と同型である。

4 Heisenberg 作用の行列表示

前章までの構成を基に，TQFT ベクトル空間 $V_k(C)$ への Heisenberg 群 $\mathcal{G}$ の作用の行列表示を記述する．Heisenberg 作用を

$$\begin{array}{rcl} \rho^{(k)}:\mathcal{G} & \to & GL(V_k(C)) \\ (c,\mu,\lambda) & \mapsto & \rho^{(k)}(c,\mu,\lambda) \end{array}$$

とする．我々はインプットデータとしてリボングラフ Γ をとり，付随する曲面 C_Γ と境界の重み j' に対するベクトル空間 $V_k(C_\Gamma)$ を許容ウェイトで生成されるベクトル空間 $\mathbb{C}\langle QCG_k(\Gamma;j')\rangle$ と同一視する．このとき，Masbaum-Vogel[6] が発展させた skein 理論のテクニック (3 次元多様体内のグラフの不変量を計算するアルゴリズム) を駆使することで表現行列の係数が計算できる．実際に計算を実行することで，メリディアンサイクル及びロンギチュードサイクルの $\mathcal{G}(\Gamma)$ への自然な持ち上げの作用を計算することができる．次節でその結果のみを述べる．

4.1 メリディアンの作用

主張 4.1. $\mu\in\Lambda_0/2\Lambda$ に対して

$$\rho^{(k)}(1,\mu,0)|j\rangle = (-1)^{j_\mu}|j\rangle$$

となる．ただし，j_μ は $\mu=(\mu_l)$ に対して $j_\mu := \sum_l \mu j_l$ で定義される．

注意 4.1. 上の j_μ の表示は μ の Λ_0 への持ち上げを用いて記述されているが，量子 Clebsch-Gordan 条件の整数性条件 $j_{i_1}+j_{i_2}+j_{i_3}\in 2\mathbb{Z}$ により，その値は Λ_0 への持ち上げ方によらないことがわかる．

4.2 ロンギチュードの作用

ロンギチュードサイクル $\lambda\in\Lambda^*/2\Lambda_0^*$ の作用を記述するためにいくつか準備をする．

定義 4.2. ロンギチュードサイクルのなす群 $\Lambda^*/2\Lambda_0^*(=H_1(\Gamma;\mathbb{Z}/2))$ の有限集合 $QCG_k(\Gamma;j')$ への作用を次で定義する：$\lambda=(\lambda_l)\in\Lambda^*/2\Lambda_0^*$，$j=(j_l)\in QCG_k(\Gamma;j')$ に対して

$$\lambda : j\mapsto \lambda\cdot j = (\cdots, k-j_l,\cdots)\quad (\forall\lambda_l\neq 0)$$

とする．

定義 4.3. 写像 $\delta_j : H_1(\Gamma;\mathbb{Z}/2) \to \mathbb{C}^\times$ を次の式で定義[3]する.

$$\delta_j(\lambda) = (-1)^{kn_\lambda + \sum j'_l/2} \times \prod_{f_l \subset \lambda} \sqrt{-1}^{\epsilon_\lambda(v)(k+2)} \frac{[k - j(f_l)]! \left[\frac{j(f_l)+j(f_{l+1})+j'_l}{2} + 1\right]!}{[j(f_l)]! \left[\frac{k-j(f_l)+k-j(f_{l+1})+j'_l}{2} + 1\right]!}$$

ここで, n_λ はサイクル $\lambda \in H_1(\Gamma;\mathbb{Z}/2)$ 上の辺の本数で, $\epsilon_\lambda(v)$ は λ の頂点 v とグラフ Γ の局所的なデータおよび重み j で決まる整数である. また, 括弧 $[\cdot]$ は量子整数である. 正確な定義は [4] 参照.

主張 4.4. $\lambda \in \Lambda^*/2\Lambda_0^*$ に対して

$$\rho^{(k)}(1, 0, \lambda)|j\rangle = \delta_j(\lambda)|\lambda \cdot j\rangle$$

となる[4].

係数 δ_j の具体的な表示から次がわかる.

主張 4.5. 写像 $\delta_j(\lambda)$ は外線条件をみたす.

定義 4.6 (λ 外線/外線条件).

1. 辺 $e \in E(\Gamma)$ が以下の条件をみたすとき e は λ-外線であるという.

   e 自身は λ に含まれず, e のただひとつの頂点が λ 上にある.

2. 写像 $\tau = (\tau_j) : \Lambda^*/2\Lambda_0^* \to (\mathbb{C}^\times)^{QCG_k(\Gamma;j')}$ が以下の条件をみたすとき τ は外線条件を満たすという; $\lambda \cdot j = j$ を満たすすべての (λ, j) に対して

$$\tau_j(\lambda) = \exp\left(2\pi\sqrt{-1} \sum_{f_l \in Ex(\lambda)} j_l\right) \in \{\pm 1\}$$

   が成り立つ.

4.3 Heisenberg 群の作用の表現行列

$\mathcal{G}(\Gamma)$ の中心の作用は交換関係から一意に決まる. 上述の結果と組み合わせることで Heisenberg 群の作用の記述ができる.

定理 4.7. $(c, \mu, \lambda) \in \mathcal{G}(\Gamma)$ に対して

$$\rho^{(k)}(c, \mu, \lambda)|j\rangle = \sqrt{-1}^{k^2\mu\cdot\lambda + k^2 + 2k + 2}(-1)^{(k+1)\mu\cdot\lambda + j_\mu}\delta_j(\lambda)|\lambda \cdot j\rangle$$

となる.

[3] 正確には $\delta_j(\lambda)$ は TQFT 加群の係数のある円分環の元である. 不定元に適当な 1 のベキ根を代入したものが正確な定義である.

[4] 基底 $|j\rangle$ を適当に正規化することで表現行列の係数 $\delta_j(\lambda)$ は $\mathbb{Z}/2$ に値をとるようにできる. この事実も Masubaum からの教示である.

5 指標公式と外線条件

作用の表現行列が決定されれば、原理的にはその指標が決定される．我々の状況では指標は以下の式により計算される．

$$Tr(\rho^{(k)}(1,\mu,\lambda);V_k(C_\Gamma)) = \sum_{j\in QCG_k^\lambda(\Gamma;j')} \sqrt{-1}^{k^2\mu\cdot\lambda}(-1)^{(k+1)\mu\cdot\lambda+j_\mu}\delta_j(\lambda),$$

ここで $QCG_k^\lambda(\Gamma;j')$ は λ-作用に関する固定点集合である：$QCG_k^\lambda(\Gamma;j') := \{j\in QCG_k(\Gamma;j') \mid \lambda\cdot j = j\}$. δ が外線条件をみたすことを用いると，指標の値が以下のように計算できる．

定理 5.1.

$$Tr(\rho^{(k)}(1,\mu,\lambda);V_k(C_\Gamma)) = \gamma(j')\frac{1+(-1)^k}{2}\left(\frac{k+2}{2}\right)^{g-1}.$$

ただし，

$$\gamma(j') := \begin{cases} (-1)^{\sum_{l=1}^{n} j_l'/2} & (\forall e_l\in E_u(\Gamma),\ j_l'\in 2\mathbb{Z}) \\ 0 & (\exists e_l\in E_u(\Gamma),\ j_l'\notin 2\mathbb{Z}). \end{cases}$$

証明は許容ウェイトの個数に関する Verlinde 公式と初等的な数え上げの議論による．1 価頂点がない場合の結果は [1] 及び [3] でも得られている．我々の直接計算は 1 価頂点の有無に関わらず実行できる．1 価頂点の有無による差異は符号 $\gamma(j')$ のみである．

6 副産物

Heisenbbrg 群 $\mathcal{G}$ の交換関係から，k が偶数のとき表現 $\rho^{(k)}$ は可換表現となることがわかる．つまり，$a,a'\in\mathcal{G}$ に対して $\rho^{(k)}(a)\rho^{(k)}(a') = \rho^{(k)}(a')\rho^{(k)}(a)$ となる．したがってベクトル空間 $V_k(C)$ は同時固有空間 $V_k(C;h)$ の直和に分解する：

$$V_k(C;h) = \{v\in V_k(C) \mid \rho^{(k)}(a)v = h(a)v\ (\forall a\in\mathcal{G})\}$$

ただし，h は次の集合を動くことがわかる．

1. $k\equiv 0 \bmod 4$ のとき：$h\in Hom(H_1(\hat{C}),\mathbb{Z}/2) = H^1(\hat{C})$
2. $k\equiv 2 \bmod 4$ のとき：$h\in\{H_1(\hat{C})$ 上の交差形式に関する 2 次形式 $\}$

指標の計算から同時固有空間の次元が計算される．まず，指標の値が $(1,\mu,\lambda)(\neq(1,0,0))$ によらないことから同時固有空間の次元は $k\equiv 0 \bmod 4$ のとき h が 0 かどうか，$k\equiv 2 \bmod 4$ のときは Arf 不変量 $\mathrm{Arf}(h)\in\{\pm1\}$ のみに依存することがわかる．そこで，以下の記号を導入する．

1. $d_{g,n}(k) := \dim V_k(C_\Gamma)$
2. $d^{(1)}_{g,n}(k) := \dim V_k(C_\Gamma, h)\ (h \neq 0)$
3. $d^{(0)}_{g,n}(k) := \dim V_k(C_\Gamma, 0)$
4. $d^{\varepsilon}_{g,n}(k; j') := \dim V_k(C_\Gamma, h)\ (\mathrm{Arf}(h) = \varepsilon)$

指標の値を用いて計算を実行することで以下の公式が得られる.

定理 6.1.

$$\begin{aligned} d^{(0)}_{g,n}(k) &= \frac{1}{2^{2g}}\left(d_{g,n}(k) + (2^{2g}-1)\gamma(j')\left(\frac{k+2}{2}\right)^{g-1}\right) \\ d^{(1)}_{g,n}(k) &= \frac{1}{2^{2g}}\left(d_{g,n}(k) - \gamma(j')\left(\frac{k+2}{2}\right)^{g-1}\right) \\ d^{\varepsilon}_{g,n}(k;j') &= \frac{1}{2^{2g}}\left(d_{g,n}(k;j') + (\varepsilon 2^{g}-1)\gamma(j')\left(\frac{k+2}{2}\right)^{g-1}\right). \end{aligned}$$

1 価頂点がない場合の公式は [1] および [3] で得られたものに一致する. 1 価頂点がある場合との差異は符号 $\gamma(j')$ のみである.

参考文献

[1] J. E.Andersen and G. Masbaum, *Involutions on moduli spaces and refinements of the Verlinde formula*, Math. Ann., 314 (1999), 291-326.

[2] C. Blanchet and G. Masbaum, *Topological quantum field theories for surfaces with spin structure*, Duke Math. J., 82 (1996), 229-267.

[3] C. Blanchet, N. Habegger, G. Masbaum and P. Vogel, *Topological quantum field theories derived from the Kauffman bracket*, Topology 34, No.4 (1995), 883-927.

[4] H. Fujita, *Heisenberg action in skein theory and external edge condition*, preprint.

[5] 藤田 玄, A combinatorial realization of the Heisenbrg action on the space of the conformal blocks, 数理研講究録 1569(2007), 107-115.

[6] G. Masbaum and P. Vogel, *3-valent graphs and the Kauffman bracket*, Pacific J.Math. 164 (1994), 361-381.