数理解析研究所講究録
第 1613 巻 2008 年 43-49

The isotropy groups of Siegel domains

名古屋大学 大学院多元数理科学研究科 伊師英之 (Hideyuki ISHI)
Graduate School of Mathematics,
Nagoya University

概要. 等質なものを含む広いクラスのジーゲル領域について, その任意の点でのイソトロピー群の自明でない1パラメータ部分群を具体的に構成する. これにより『丁度2個の元からなるイソトロピー群をもつ有界等質領域は存在するか』という Hundemer の問題には否定的な解答が与えられる.

序.

複素領域 $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}^d$ について, その正則自己同型群を $\mathrm{Hol}(\mathcal{D})$ と書き, 点 $p \in \mathcal{D}$ でのイソトロピー群 $\{\, \alpha \in \mathrm{Hol}(\mathcal{D})\,;\, \alpha(p) = p \,\}$ を $\mathrm{Iso}_p(\mathcal{D})$ で表すものとする. 例として, $\mathcal{D} = \mathbb{C} \setminus \{0\} (=: \mathbb{C}^\times)$ の場合, $\mathrm{Hol}(\mathbb{C}^\times) = \{\, \alpha_{c,\varepsilon} : z \mapsto cz^\varepsilon\,;\, c \in \mathbb{C}^\times,\ \varepsilon = \pm 1 \,\}$ であり, さらに $p = 1$ とすると $\mathrm{Iso}_1(\mathbb{C}^\times) = \{g_{1,\pm 1}\}$ である. 一般に $\mathrm{Hol}(\mathcal{D})$ はコンパクト開位相によって位相群となるが, たとえば $\mathcal{D} = \mathbb{C}^l \times (\mathbb{C}^\times)^k$ $(l + k \geq 2)$ のとき, $\mathrm{Hol}(\mathcal{D})$ はリー群の構造が入らない巨大で複雑な群となる ([11]). 他方 $\mathcal{D}$ が有界領域 (に正則同値な領域) のときには $\mathcal{D}$ 上にベルグマン計量 $ds_{\mathcal{D}}$ が定義されることから状況は一変する. すなわち $ds_{\mathcal{D}}$ は $\mathrm{Hol}(\mathcal{D})$ の作用に関して不変なので, 群 $\mathrm{Hol}(\mathcal{D})$ は $\mathcal{D}$ 上の $ds_{\mathcal{D}}$ に関する等距離変換群 $I(\mathcal{D}, ds_{\mathcal{D}})$ の閉部分群だから有限次元のリー群であり, イソトロピー群 $\mathrm{Iso}_p(\mathcal{D})$ は $\mathrm{Hol}(\mathcal{D})$ のコンパクト部分群となることがわかる.

複素領域 $\mathcal{D}$ は $\mathrm{Hol}(\mathcal{D})$ が推移的に作用するとき等質であるといい, 全ての点 $p \in \mathcal{D}$ について p を孤立固定点とするような対合的正則自己同型 $s_p \in \mathrm{Iso}_p(\mathcal{D})$ が存在するとき対称であるという. 有界対称領域 $\mathcal{D}$ はベルグマン計量 $ds_{\mathcal{D}}$ に関してエルミート対称空間となり, 逆に非コンパクトなエルミート対称空間は有界対称領域としての実現をもつことが知られている. 有界対称領域は単位円板や単位開球の自然な一般化であり, その上の幾何と調和解析は豊かに発展してきた ([6], [14] など参照). その解析におけるポイントの1つは, イソトロピー群が正則同型群の極大コンパクト群であって, 領域上の函数空間を極大コンパクト群の自然な作用に関して既約分解するという操作がテイラー展開の一般化として非常に有用であるということである.

有界対称領域は等質であるが逆は真ではなく, よって有界等質領域の中で対称なものを特徴づけるということが問題となる. D'atri - Dorfmeister - Zhao [1] はイソトロピー群に着目してそのような特徴付けをいくつも与えた. 彼らの結果は, 標語的には『有界等質領域が対称である必要十分条件は, イソトロピー群が十分大きいことである』と述べることができる. そしてこのことは上述の既約分解の手法が非対

称な有界等質領域ではうまく機能しないかもしれないということを示唆する．それでは，一般の有界等質領域 $\mathcal{D}$ のイソトロピー群 $\mathrm{Iso}_p(\mathcal{D})$ はどれだけ小さくなり得るだろうか? Hundemer [7] は $\mathrm{Iso}_p(\mathcal{D})$ が自明でないこと，すなわち $\sharp\mathrm{Iso}_p(\mathcal{D}) \geq 2$ を示し，『$\sharp\mathrm{Iso}_p(\mathcal{D}) = 2$ となる有界等質領域は存在するか』という問題を提出した．なお，冒頭で扱った $\mathcal{D} = \mathbb{C}^\times$ は等質領域で（実は対称領域）$\sharp\mathrm{Iso}_p(\mathbb{C}^\times) = 2$ となるが，非有界であることに注意しておく．

我々は有界等質領域のイソトロピー群のリー群としての次元が1以上であること，したがって Hundemer が問題にしたような有界等質領域は存在しないことを示した．実際に行ったのは，全ての有界等質領域は等質ジーゲル領域と正則同型であるという事実 ([17]) を踏まえ，等質なものを含む広いクラスのジーゲル領域についてイソトロピー群の自明でない1パラメータ部分群を具体的に構成したということである．ここでジーゲル領域の定義を述べる．実ベクトル空間 $\mathbb{R}^N$ の中の開凸錐 C は $\mathrm{Cl}(C) \cap (-\mathrm{Cl}(C)) = \{0\}$ (Cl は閉包を表す) をみたすとき，正則錐とよばれる．一方 $\mathbb{C}^N$-値 エルミート形式 $Q : \mathbb{C}^M \times \mathbb{C}^M \to \mathbb{C}^N$ は $Q(u,u) \in \mathrm{Cl}(C) \backslash \{0\}$ $(\forall u \in \mathbb{C}^M \backslash \{0\})$ を満たすとき C-正値であるという．ジーゲル領域とは，この C と Q から次のように定まる $\mathbb{C}^{N+M}$ の中の複素領域である:

$$D(C,Q) := \left\{ (z,u) \in \mathbb{C}^{N+M} \,;\, \Im z - Q(u,u) \in C \right\}.$$

とくに $M=0,\ Q=0$ のときはジーゲル領域は管状領域 $D(C) = \mathbb{R}^N + iC \subset \mathbb{C}^N$ である．全てのジーゲル領域は有界領域と正則同型である ([12]) が，等質なものはその中のごく一部である．ジーゲル領域が管状でない場合，自明でないイソトロピー群の1パラメータ部分群を構成することは難しくない (§1)．一方で管状領域 $D(C)$ については，イソトロピー群が有限個の元しか持たない例が存在する ([9])．我々は正則錐 C が拡張錐なる構造を持つ場合に，1パラメータ部分群を有理変換 (7) として具体的に与える．式 (7) は [3, Proposition 1.1] からヒントを得たものだが，管状領域を第三種ジーゲル領域に写すことによって，その意味は明瞭になる ((6) を見よ)．このように等質とは限らない第三種ジーゲル領域を用いて意味のある結果が得られた事は，新しい研究方向を示すものとして意義深いと思われる．なお，一般のジーゲル領域 $D(C,Q)$ について $\mathrm{Hol}(D(C,Q))$ および $\mathrm{Iso}_p(D(C,Q))$ のリー代数レベルの記述は [10] および [15] で与えられているが，これらから我々の結果を得ることは容易ではない．

§1. 非管状ジーゲル領域の場合.

ジーゲル領域 $D(C,Q) \subset \mathbb{C}^{N+M}$ について，この節では $M > 0$ の場合，すなわち $D(C,Q)$ が管状でない場合のイソトロピー群を考えよう．

パラメータ $\theta \in \mathbb{R}$ について線型変換 σ_θ を $\sigma_\theta(z,u) := (z, e^{i\theta}u)$ $((z,u) \in \mathbb{C}^{N+M})$ によって定義すると，これは領域 $D(C,Q)$ を保存する．言い換えると，1パラメータ変換群 $\mathfrak{S} := \{\sigma_\theta\}_{\theta\in\mathbb{R}}$ は $\mathrm{Hol}(D(C,Q))$ の部分群である．

命題 1. 非管状ジーゲル領域 $D(C,Q)$ の任意の点 $p_0=(z_0,u_0)\in D(C,Q)$ でのイソトロピー群の次元は 1 以上である.

証明. まず $x_0:=\Re z_0\in\mathbb{R}^N$ とおき, $\mathbb{C}^{N+M}$ 上のアファイン変換 α_0 を

$$\alpha_0(z,u):=(z-x_0-2iQ(u,u_0)+iQ(u_0,u_0),u-u_0)\qquad((z,u)\in\mathbb{C}^{N+M}).$$

と定義すると, α_0 はジーゲル領域 $D(C,Q)$ を保存し, $\alpha_0(p_0)=(iy_1,0)$ (ただし $y_1:=\Im z_0-Q(u_0,u_0)\in C$) となることが直接的な計算からわかる. 一方, 変換 σ_0 は点 $p_1:=(iy_1,0)$ を固定するから $\mathfrak{S}\subset\mathrm{Iso}_{p_1}(D(C,Q))$. よって 1 パラメータ群 $\alpha_0^{-1}\circ\mathfrak{S}\circ\alpha_0$ は点 $p_0=\alpha_0^{-1}(p_1)$ でのイソトロピー群 $\mathrm{Iso}_{p_0}(D(C,Q))$ の部分群であり, したがって $\dim\mathrm{Iso}_{p_0}(D(C,Q))\geq 1$ である. □

§2. 拡張錐を底とする管状領域の場合.

正則錐 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ と $\mathbb{R}^n$-値双線型対称形式 $S:\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ について

$$S(v,v)\in\mathrm{Cl}(\Omega)\setminus\{0\}\quad(\forall v\in\mathbb{R}^m\setminus\{0\})$$

が成り立つ (すなわち S が Ω-正値) とき, Ω の S による拡張錐 $\hat{\Omega}^S\subset\mathbb{R}^{n+m+1}$ を

$$\hat{\Omega}^S:=\left\{\,(x,v,a)\in\mathbb{R}^{n+m+1}\,;\,a>0,\ x-a^{-1}S(v,v)\in\Omega\,\right\}$$

によって定義する. これは実 Siegel 領域 $D_R(\Omega,S)=\{\,(x,v)\in\mathbb{R}^{n+m}\,;\,x-S(v,v)\in\Omega\,\}$ から生成される錐であり, 正則錐である : $\hat{\Omega}^S=\bigsqcup_{a>0}aD_R(\Omega,S)\times\{a\}$. 「拡張錐」なる語はここで導入したものだが、概念そのものは等質錐の研究の当初から重要な役割を演じている ([2], [5], [16]). この節では管状領域 $D(\hat{\Omega}^S)=\mathbb{R}^{n+m+1}+i\hat{\Omega}^S$ のイソトロピー群を考える. 定義から

$$D(\hat{\Omega}^S)=\left\{\,(z,u,c)\in\mathbb{C}^{n+m+1}\,;\,\Im c>0,\ \Im z-(\Im c)^{-1}S(\Im u,\Im u)\in\Omega\,\right\}.\qquad(1)$$

である.

補題 2. (i) 任意の点 $q_0=(x_0,v_0,a_0)\in\hat{\Omega}^S$ について $\beta_0(q_0)=(x_1,0,1)$ (ただし $x_1:=x_0-a_0^{-1}Q(v_0,v_0)\in\Omega$) かつ $\beta_0(\hat{\Omega}^S)=\hat{\Omega}^S$ となる $\mathbb{R}^{n+m+1}$ 上の線型変換 β_0 がとれる.
(ii) 管状領域 $D(\hat{\Omega}^S)\subset\mathbb{C}^{n+m+1}$ の任意の点 $p_0=(z_0,u_0,c_0)\in D(\hat{\Omega}^S)$ について, $\alpha_0(p_0)=(iy_1,0,i)$ (ただし $y_1=\Im z_0-(\Im c_0)^{-1}S(\Im u_0,\Im u_0)\in\Omega$) かつ $\alpha_0(D(\hat{\Omega}^S))=D(\hat{\Omega}^S)$ となる $\mathbb{C}^{n+m+1}$ 上のアファイン変換 α_0 がとれる.

証明. (i) 次のように $\nu_0\in GL(\mathbb{R}^{n+m+1})$ を定義しよう:

$$\nu_0(x,v,a):=(x-2a_0^{-1}S(v,v_0)+aa_0^{-2}S(v_0,v_0),v-aa_0^{-1}v_0,a)\quad((x,v,a)\in\mathbb{R}^{n+m+1}).$$

このとき $(x',v',a')=\nu_0(x,v,a)$ とすると $x'-(a')^{-1}S(v',v')=x-a^{-1}S(v,v)$ が成り立つから, ν_0 は錐 $\hat{\Omega}^S$ を保存する. さらに線型変換 $\mu_0:\mathbb{R}^{n+m+1}\ni(x,v,a)\mapsto(x,a_0^{-1/2}v,a_0^{-1}a)\in\mathbb{R}^{n+m+1}$ も $\hat{\Omega}^S$ を保存する. したがって $\beta_0:=\mu_0\circ\nu_0$ とすると $\beta_0(\hat{\Omega}^S)=\hat{\Omega}^S$ であり, 直接的な計算から $\beta_0(x_0,v_0,a_0)=(x_1,0,1)$ がわかる.
(ii) 点 $p_0\in D(\hat{\Omega}^S)$ について $q_0:=\Im p_0\in\hat{\Omega}^S$ とおき, この q_0 に対して (i) を適用して $\beta_0\in GL(\mathbb{R}^{n+m+1})(\subset GL(\mathbb{C}^{n+m+1}))$ をとる. 平行移動 $\alpha_0':\mathbb{C}^{n+m+1}\ni(z,u,c)\mapsto(z-\Re z_0,u-\Re u_0,c-\Re c_0)\in\mathbb{C}^{n+m+1}$ によって, 点 p_0 は $iq_0\in i\hat{\Omega}^S$ にうつるから, $\alpha_0:=\beta_0\circ\alpha_0'$ とおくと, この α_0 が求めるアファイン変換であることがわかる. □

複素平面 $\mathbb{C}$ の中の単位円板と上半平面を, それぞれ Δ と $\mathcal{H}$ と書くものとする. いま $\mathcal{U}:=\mathbb{C}^{n+m}\times\mathcal{H}$ から $\tilde{\mathcal{U}}:=\mathbb{C}^{n+m}\times\Delta$ の上への双有理写像 γ を

$$\gamma(z,u,c):=\Big(z-\frac{1}{c+i}S(u,u),\ \frac{\sqrt{2}i}{c+i}u,\ \frac{c-i}{c+i}\Big)\qquad((z,u,c)\in\mathcal{U}),\tag{2}$$

によって定義する (S は複素双線型に拡張されたものとする). このとき γ の逆写像は

$$\gamma^{-1}(\zeta,w,t):=\Big(\zeta-\frac{i}{1-t}S(w,w),\ \frac{\sqrt{2}}{1-t}w,\ \frac{i(1+t)}{1-t}\Big)\qquad((\zeta,w,t)\in\tilde{\mathcal{U}}).\tag{3}$$

で与えられる.
複素数 $t\in\Delta$ について実双線型形式 $L_t:\mathbb{C}^m\times\mathbb{C}^m\to\mathbb{C}^n$ を

$$L_t(w,w'):=\frac{1}{1-|t|^2}\Big(S(w,\bar{w}')+\bar{t}S(w,w')\Big)\qquad(w,w'\in\mathbb{C}^m).\tag{4}$$

によって定義する. この $L_t(w,w')$ はエルミート形式 $(1-|t|^2)^{-1}S(w,\bar{w}')$ と複素対称形式 $(1-|t|^2)^{-1}\bar{t}S(w,w')$ の和であるから, [12] において半エルミート形式とよばれるものである. 半エルミート形式の族 $\{L_t\}_{t\in\Delta}$ を用いて第三種ジーゲル領域 $\mathcal{S}$ が

$$\mathcal{S}:=\left\{\,(\zeta,w,t)\in\mathbb{C}^{n+m+1};\ t\in\Delta,\ \Im\zeta-\Re L_t(w,w)\in\Omega\,\right\},\tag{5}$$

によって定義される ([12, Chapter 1, Section 3]).

命題 3. 有理写像 γ は管状領域 $D(\hat{\Omega}^S)$ から第三種ジーゲル領域 $\mathcal{S}$ の上への双正則写像を与える.

証明. 点 $(z,u,c)\in\mathcal{U}$ について $(\zeta,w,t)=\gamma(z,u,c)$ とおくと (3) と直接的な計算により

$$\Im c=1-|t|^2,\qquad \Im z-(\Im c)^{-1}S(\Im u,\Im u)=\Im\zeta-\Re L_t(w,w)$$

がわかる. したがって (1) と (5) から $\gamma(D(\hat{\Omega}^S))=\mathcal{S}$ が従う. □

パラメータ $\theta \in \mathbb{R}$ について $\mathbb{C}^{n+m+1}$ 上の線形変換 $\tilde{\tau}_\theta$ を

$$\tilde{\tau}_\theta(\zeta, w, t) := (\zeta,\, e^{i\theta}w,\, e^{2i\theta}t) \qquad ((\zeta, w, t) \in \mathbb{C}^{n+m+1}). \tag{6}$$

によって定義し，1パラメータ変換群 $\{\tilde{\tau}_\theta\}_{\theta\in\mathbb{R}}$ を $\tilde{\mathfrak{T}}$ で表す．定義式 (4) より

$$L_{e^{2i\theta}t}(e^{i\theta}w, e^{i\theta}w') = L_t(w, w') \qquad (t \in \Delta,\, w, w' \in \mathbb{R}^m),$$

が成り立つから，$\tilde{\tau}_\theta$ は領域 $\mathcal{S}$ を保存し，よって $\tilde{\mathfrak{T}}$ は $\mathrm{Hol}(\mathcal{S})$ の部分群である．

定理 4. 拡張錐 $\hat{\Omega}^S$ を底とする管状領域 $D(\hat{\Omega}^S)$ の任意の点 $p_0 = (z_0, u_0, c_0) \in D(\hat{\Omega}^S)$ におけるイソトロピー群の次元は 1 以上である．

証明. 補題 2 によって $\alpha_0(p_0) = (iy_1, 0, i)(=: p_1)$ となるような $\alpha_0 \in \mathrm{Hol}(D(\hat{\Omega}^S))$ がとれる．一方 (2) より $\gamma(p_1) = (iy_1, 0, 0)(=: p_2)$ である．定義式 (6) より $\tilde{\tau}_\theta(p_2) = p_2$ だから，1パラメータ群 $\tilde{\mathfrak{T}}$ は点 $p_2 = \gamma\circ\alpha_0(p_0) \in \mathcal{S}$ でのイソトロピー群 $\mathrm{Iso}_{p_2}(\mathcal{S})$ の部分群．したがって1パラメータ群 $\mathfrak{T}_0 := (\gamma\circ\alpha_0)^{-1}\circ\tilde{\mathfrak{T}}\circ(\gamma\circ\alpha_0)$ は $\mathrm{Iso}_{p_0}(D(\hat{\Omega}^S))$ の部分群であるから $\dim \mathrm{Iso}_{p_0}(D(\hat{\Omega}^S)) \geq 1$ となる． □

いま $\tau_\theta := \gamma^{-1}\circ\tilde{\tau}_\theta\circ\gamma$ とおくと，(6) と (2), (3) から

$$\tau_\theta(z, u, c) = \Big(z + \frac{\sin\theta}{\cos\theta - c\sin\theta}S(u, u),\ \frac{1}{\cos\theta - c\sin\theta}u,\ \frac{\sin\theta + c\cos\theta}{\cos\theta - c\sin\theta}\Big) \qquad ((z, u, c) \in \mathcal{U}). \tag{7}$$

であり，上の議論から $\{\tau_\theta\}_{\theta\in\mathbb{R}}$ は点 $p_1 = \gamma(p_2)$ でのイソトロピー群 $\mathrm{Iso}_{p_1}(D(\hat{\Omega}^S))$ の部分群である．

例として，次の場合を考えよう: $n = 2$, $\Omega := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}^2$, $m = m_1 + m_2$ $(m_1, m_2 \in \mathbb{N})$,

$$S : \mathbb{R}^{m_1+m_2} \times \mathbb{R}^{m_1+m_2} \ni ((v_1, v_2), (v_1', v_2')) \mapsto (v_1\cdot v_1',\ v_2\cdot v_2') \in \mathbb{R}^2,$$

ただし · はベクトルの標準内積を表す．このとき管状領域 $D(\hat{\Omega}^S) \subset \mathbb{C}^{2+m_1+m_2+1}$ は等質で，その正則同型群 $\mathrm{Hol}(D(\hat{\Omega}^S))$ および $p := (i, i, 0, 0, i)$ でのイソトロピー群 $\mathrm{Iso}_p(D(\hat{\Omega}^S))$ は [4] によって完全に決定されている．イソトロピー群に関する結果を引用しよう．実直交行列の組 $(R_1, R_2) \in O(m_1)\times O(m_2)$ について

$$g_{R_1,R_2} : \mathbb{C}^{2+m_1+m_2+1} \ni (z_1,\ z_2,\ u_1,\ u_2,\ c) \mapsto (z_1,\ z_2,\ R_1u_1,\ R_2u_2,\ c) \in \mathbb{C}^{2+m_1+m_2+1}$$

とすると，$\mathrm{Iso}_p(D(\hat{\Omega}^S))$ は $m_1 \neq m_2$ のとき g_{R_1,R_2} および (7) の τ_θ たちから生成され，$m_1 = m_2$ のときは更に対合写像

$$\iota : \mathbb{C}^{2+m_1+m_2+1} \ni (z_1,\ z_2,\ u_1,\ u_2,\ c) \mapsto (z_2,\ z_1,\ u_2,\ u_1,\ c) \in \mathbb{C}^{2+m_1+m_2+1}$$

も合わせたものによって生成される．とくに $m_1 = m_2 = 1$ のとき $\hat{\Omega}^S$ は Vinberg 錐とよばれる 5 次元の錐であり，この場合 $\mathrm{Iso}_p(D(\hat{\Omega}^S))$ の連結成分は1パラメータ群 $\{\tau_\theta\}_{\theta\in\mathbb{R}}$ に等しい ([3, Proposition 1.1]).

§3. 有界等質領域のイソトロピー群.

定理 5. **有界等質領域の任意の点でのイソトロピー群の次元は1以上である.**

証明. 有界等質領域 $\mathcal{D}$ は必ず等質ジーゲル領域 $D(C,Q) \subset \mathbb{C}^{N+M}$ と正則同型であり, しかも錐 C はアファイン等質, すなわちある線型群 $G \subset GL(\mathbb{R}^N)$ が推移的に C に作用している ([17]). このジーゲル領域 $D(C,Q)$ のイソトロピー群の次元について議論すればよい. まず $M>0$ ならば命題 1 より主張は成り立つ. 次に $M=0$ かつ $N=1$ のとき, ジーゲル領域は上半平面 $\mathcal{H}$ に他ならないから主張は成り立つ. 最後に $M=0$ かつ $N>1$ のとき, アファイン等質錐 C は低次元の錐 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n<N)$ の拡張錐として得られるから ([5, Lemma 1.2]), 主張は定理 4 から従う. □

References

[1] J. E. D'Atri, J. Dorfmeister, Y.-D. Zhao, *The isotropy representation for homogeneous Siegel domains*, Pacific J. Math. **120** (1985), 295–326.

[2] J. Dorfmeister, *Inductive construction of homogeneous cones*, Trans. Amer. Math. Soc. **252** (1979), 321–349.

[3] L. Geatti, *Holomorphic automorphisms of the tube domain over the Vinberg cone*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. **80** (1986), 283–291.

[4] —, *Holomorphic automorphisms of some tube domains over nonselfadjoint cones*, Rend. Circ. Mat. Palermo **36** (1987), 281–331.

[5] S. G. Gindikin, *Analysis in homogeneous domains*, Russian Math. Surveys 19 (1964) 1–89.

[6] S. Helgason, "Groups and geometric analysis," Academic Press, Orlando, 1984.

[7] A. Hundemer, *The isotropy groups of bounded homogeneous domains are nontrivial*, Manuscripta Math. **98** (1999), 403–408.

[8] H. Ishi, *A torus subgroup of the isotropy group of a bounded homogeneous domain*, preprint.

[9] —, *Some remarks on the simplest non-homogeneous Siegel domain*, in preparation.

[10] W. Kaup, Y. Matsushima, and T. Ochiai, *On the automorphisms and equivalences of generalized Siegel domains*, Amer. J. Math. **92** (1970), 475–498.

[11] A. Kodama and S. Shimizu, *A characterization of* $\mathbb{C}^k \times (\mathbb{C}^*)^l$ *from the viewpoint of biholomorphic automorphism groups*, J. Korean Math. Soc. **40** (2003), 563–575.

[12] I. I. Piatetskii-Shapiro, "Automorphic functions and the geometry of classical domains," Gordon and Breach, New York, 1969.

[13] O. S. Rothaus, *The construction of homogeneous convex cones*, Ann. of Math. **83** (1966), 358–376, Correction: ibid **87** (1968), 399.

[14] I. Satake, "Algebraic structures of symmetric domains," Iwanami Shoten, Tokyo; Princeton University Press, Princeton, 1980.

[15] N. Tanaka, *On infinitesimal automorphisms of Siegel domains*, J. Math. Soc. Japan **22** (1970), 180–212.

[16] E. B. Vinberg, *The theory of convex homogeneous cones*, Trans. Moscow Math. Soc. **12** (1963), 340–403.

[17] E. B. Vinberg, S. G. Gindikin, and I. I. Piatetskii-Shapiro, *Classification and canonical realization of complex bounded homogeneous domains*, Trans. Moscow Math. Soc. **12** (1963), 404–437.