数理解析研究所講究録
第1613巻 2008年 101-115



# Bergman核と解析幾何
## ── ひとつの断章 ──

大沢健夫
(名大・多元数理)

序. 'Curves and their Jacobians' という、D. Mumford の有名な講義録 [M] がある。その中に、D. Kazhdan [K] が示唆しているとして、Bergman 計量の収束についての命題が述べられている. これと同じ形の、しかしはるかに一般的な命題が、S.T. Yau [Y] によっても Kazhdan に帰するものとして述べられている。ところが証明はと言えば、前者に対しては J.A. Rhodes [R] がある制約つきで与えたものの、後者に関しては全く文献が見当らない。ところで Kazhdan の論文の主目的は、数論的代数多様体 $X$ を $\mathbb{C}$ の体同型 $\sigma$ で変換してできる代数多様体 $X^\sigma$ はやはり数論的になることの証明であり、そのために $X^\sigma$ の普遍被覆が Bergman 計量を持つことを用いた。しかしこの議論には不完全な所があったようで、後に B 計量の代わりに Kähler-Einstein 計量を用いて切り抜けたとの記述 (cf. [Mi] ) もあるが、正式に論文として出版されたものがないのではっきりしない。とはいえ B 核の解析によって $X^\sigma$ の数論性を導くというシナリオ自身は魅力的であり、それに示唆された B 計量列の収束性も面白い。小論では B 核の歴史をたどり、'Kazhdan の収束性定理' に

'証明'を付けながら、B核の解析による幾何学の可能性を探ってみよう。

## §1. Bergman核とは何か

i) Bergman核と標準的体積要素　　Mは$n$次元複素多様体. $H^{p,q}(M)$はその$(p,q)$型$\bar\partial$-コホモロジー群とし、

$$H^{n,0}_{(2)}(M) = \left\{ f \in H^{n,0}(M) \,\middle|\, \sqrt{-1}^{\,n^2} \int_M f \wedge \bar f < \infty \right\}$$

とおく. $H^{n,0}_{(2)}(M)$の(一つの)完全正規直交系$\{\varphi_\nu\}_{\nu\in I}$をとり、

$$K_M(z,w) = \sum_{\nu \in I} \varphi_\nu(z)\overline{\varphi_\nu(w)} \qquad (z, w \in M)$$

とおく. 右辺が無限級数の場合、Cauchyの評価式よりこれは$M\times M$上広義一様収束する. $K_M$は$\pi_1^* K_M \otimes \pi_2^* \overline{K_M}$の断面である. ただし$K_M$は$M$の標準束、$\pi_i : M\times M \longrightarrow M$ $(i=1,2)$は第$i$成分への射影を表す. 制限写像$H^{n,0}_{(2)}(M) \longrightarrow K_{M,x}$がすべての$x\in M$に対して全射ならば、$K_M(z) := \sqrt{-1}^{\,n^2} \sum_\nu \varphi_\nu(z)\wedge\overline{\varphi_\nu(z)}$は$M$上の正値$(n,n)$形式であり、従って$K_M^*$(双対束)のファイバー計量でもある. これを$M$のBergman体積要素、または単にBergman核と呼ぶ。$K_M(z,w)$も$M$のBergman核と呼ばれる.

ii) Abelの定理とBergman核(歴史その1)　　閉リーマン面の種数はAbelの定理(1826, 29, 41)にはじめて現れた. 一方、

$$\int_M K_M(z) = \dim H^{n,0}_{(2)}(M) \quad \left(\begin{array}{l} M\text{が閉リーマン面のときは} \\ M\text{の種数に一致} \end{array}\right)$$

ちなみにAbelの定理は次数が0の因子が主因子であるための必要十分条件を与えるが、その証明の要点は条件を$L^2$内積に関する直交性とみなす所にある.

iii) Dirichlet問題とBergman核(歴史その2) 領域の境界上に連続関数を与えて内部で調和な関数を作る問題(=Dirichlet問題)を直交射影の方法で解くために、S. Zarembaは*)再生核をはじめて導入した(1907). J. Mercer '09は再生核を正値性をもつ特殊な積分核として位置付けた. 解析関数としての再生核の研究は、G. Szegö '21, S. Bergman '22, S. Bochner '22の'ベルリン3人衆'の仕事から始まった. 作用素としての再生核は、E.H. Moore '35(正値核の一般論), N. Aronszajn '50(再生核ヒルベルト空間)をへて、L. Schwartzによって一般的な存在定理が確立された(Schwartzの核定理 '52).

iv) Bergman核と双正則幾何(歴史その3) F. KleinやS. Lie以後、群の解析としての幾何が発展した. D. van Dantzig-B.L. van der Waerden '28は、局所コンパクト距離空間のisometry全体がコンパクト開位相に関して局所コンパクトな位相群であることを示した. $\mathbb{C}^n$の有界領域$D$に対してBergman '33はBergman計量 $\partial\bar{\partial}\log K_D(z)$を導入した. これはvan Dantzig-J.A. Schouten '30やE. Kähler '32が導入した'Kähler計量'の例になっている. その後E. Cartan '35は$\mathbb{C}^n$の有界対称領域を分類、H. Cartan '36は有界領域の正則自己同型群がLie群であることを示した. $D$の正則自己同型がB計量に関してisometryであることは著しい.

*) 一般化されたDirichlet問題に対して

## §2. Bergman核の解析

B核を解析するための有力な道具としては、$\bar\partial$方程式を$L^2$評価式つきで解く次の定理(≒公式)がある.

定理 2.1. (L. Hörmander [H, Theorem 2.2.1′])
$D$は$\mathbb{C}^n$の擬凸領域、$\psi$は$D$上の多重劣調和関数、$\rho: D \longrightarrow \mathbb{R}$は次式(*)が$\mathbb{C}^n$の任意の元$(\xi_1, \cdots, \xi_n)$に対して非負測度になるような連続関数とする.

$$(*) \qquad \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z_j \partial \bar z_k} \xi_j \bar\xi_k \;-\; e^{\rho} \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2$$

このとき、$L^{0,q}_{(2)}(D, loc)$ $(q>0)$ の元$v$が$\bar\partial v = 0$かつ

$$\int_D |v|^2 e^{-(\psi+\rho)} d\lambda < \infty$$

をみたせば、$L^{0,q-1}_{(2)}(D, loc)$の要素$u$で$\bar\partial u = v$かつ

$$q \int_D |u|^2 e^{-\psi} d\lambda \;\le\; \int_D |v|^2 e^{-(\psi+\rho)} d\lambda$$

をみたすものが存在する. ただし$d\lambda$は$\mathbb{C}^n$のLebesgue測度、$L^{p,q}_{(2)}(D, loc)$は$D$上の局所2乗可積分$(p,q)$形式の集合を表す.

これを用いてHörmanderは強擬凸領域上のB核の境界における漸近展開の主要部を決定した。以下、$D$は擬凸とする。

定理 2.2. $\partial D$ が $x$ で強擬凸ならば、$\partial D$ の定義関数 $r$（ただし $D$ 内で $r>0$）に対し

$$J(z) = (-1)^n \det \begin{pmatrix} 0 & \partial r/\partial z_i \\ \frac{\partial r}{\partial \bar{z}_j} & \frac{\partial^2 r}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \end{pmatrix} \sqrt{-1}^{\,n^2} dz \wedge d\bar{z} \cdot 2^{-n}$$

とおくと

$$\lim_{z \to x} \pi^n K_D(z) \Big/ n!\, J(z)\, r^{-n-1} = 1 .$$

後に C. Fefferman '79，平地 '00 らが $\partial D$ の CR 不変量と B 核の漸近展開の残りの項との関係を解明したが、B 核による開球の特徴付け（Ramadanov 予想）は $n \leq 2$ のときにしか解けていない（C. R. Graham - D. Burns '87 および L. Boutet de Monvel '88）.

定理 2.1 には種々の一般化があり、目的に応じて工夫がなされている。その中でも、岡・Cartan 理論の精密化をめざした H. Skoda '72 や大沢・竹腰 '87 で用いられたものは固有の $L^2$ 評価式を含んでいる。それらは $L^2$ ノルムの定義に定理 2.1 における $\psi$ や $\rho$ の他に、割算問題や拡張問題の条件に現れる正則関数を取り込んだ形をしている。その結果、B 核について次がわかる。

定理 2.3（cf. [O-T]）$\partial D$ が $x$ で Lipschitz 連続ならば、

$$\liminf_{z \to x} K_D(z)\, |z-x|^2 \big/ d\lambda > 0$$

$n=1$ のとき、$K_D$ と $D$ の Green 関数 $g_D(z,w)$ との間には等式

$$K_D(z,w)=\frac{1}{2\pi}\partial_z\partial_{\bar{w}}g_D$$

が成立する（吹田信之）。従って 1 変数の場合には Green 関数を手がかりにして B 核の解析ができ、この方針で米谷文男氏と山口博史氏は開リーマン面のスタイン族 $\mathcal{X}\xrightarrow{\pi}\mathbb{D}$（$\pi$ は全射正則かつ $\operatorname{rank} d\pi\equiv 1$、$\mathcal{X}$ は 2 次元スタイン多様体、$\mathbb{D}=\{\zeta\in\mathbb{C}\mid|\zeta|<1\}$）に対して、$\pi$ のファイバー $X_\zeta=\pi^{-1}(\zeta)$ の Bergman 核 $K_{X_\zeta}(z)$ を $\mathcal{X}$ 上で局所的に複素 2 変数の関数と見たとき $\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log K_{X_\zeta}(z)\geq 0$ であることを示した。（Math. Ann. 2004）この結果は多変数の場合に一般化されたが、証明はリーマン面の族のときとは全く異なり、強擬凸領域をファイバーとする自明族上の、助変数 $\zeta$ にも依存する全空間上の多重劣調和関数を weight とするファイバー上の $L^2$ 正則関数の空間上の再生核（重みつき Bergman 核）の場合に帰着させる。（'05, Berndtsson）。この話は最近、川又の subadjunction theorem の別証に結びついたようである（Berndtsson-Păun '08/5/12）。

$n=1$ のときにはさらに $K_D$ と $g_D$ の間には、Robin 定数

$$\gamma(z)=\lim_{w\to z}\left(g_D(z,w)-\log|z-w|\right)$$

を介した不等式

$$\text{(S)}\quad \pi K_D(z,z)\geq\frac{\sqrt{-1}}{2}e^{2\gamma(z)}dz\wedge d\bar{z}$$

が成立することが吹田信之氏によって予想された('72). (S)は $D=\mathbb{D}$ のときは等号で成立し, $D=\{z \mid r<|z|<R\}$ $(0<r<R)$ のときは真の不等式であることを吹田氏は示した。2007年, Z. Błocki (Nagoya Math. J.) は $2\pi K_D(z,z) \geq \frac{\sqrt{-1}}{2} e^{2\gamma(z)} dz \wedge d\bar{z}$ を示した。また, (S)の右辺が座標 $z$ のとり方によらない (1,1)形式であることから, 吹田予想は Green 関数をもつ任意のリーマン面上で意味がある。リーマン面 $M$ 上で定義された(S)の右辺を $c_M^2$ と書くと, $750\pi K_M \geq c_M^2$ が成立する (大沢'93 Nagoya Math. J. '98 数理研講究録(補足))。$M$ が Green 関数をもたなくても $K_M \neq 0$ となることは多い。たとえば $M$ がコンパクトであり, その種数が $0$ でなければ $K_M \neq 0$ である。このような場合に $K_M$ の下からの評価を Poincaré 計量に関する $M$ の入射半径とラプラシアンの最小正固有値を用いて与えることができる。'Kazhdan の収束定理'にはこのような評価が関わってくるのだが, これについてはあとで述べよう (cf. §4)。

## §3. Bergman計量の幾何

i) 完備性の問題と $L^2$ 評価　　Bergman計量は $K_M(z)$ の Ricci 曲率が負であるような多様体 $M$ 上の計量として一般化される (小林昭七 '59). $M$ が $\mathbb{C}^n$ の領域のとき, その B 計量が完備なら $M$ は正則凸であることから (H. Bremermann '55), B 計量が完備な複素多様体の

特徴付けが問題とされた(小林 59,60). これに対し、多重ポテンシャル論の発達を受けて次の結果が得られた.

定理3.1. (B.-Y. Chen '04)*) 有界な多重劣調和皆既関数**) をもつスタイン多様体のB計量は完備である.

この定理の条件をみたす多様体は超凸(hyperconvex)であるという. Teichmüller空間は超凸である(Krushkal '91). T空間についてはBersの埋め込み定理より、B計量についてもっと詳しく次が示されている.

定理3.2. (K. Liu-X. Sun-S.-T. Yau '04)⁂) T空間上ではB計量、小林計量、Carathéodory計量はすべて同値である.

さて、$C^\infty$級の有界皆既関数 $\varphi: M \to (-\infty, 0)$ が $\partial\bar\partial\varphi > 0$ をみたせば、$\omega := -\sqrt{-1}\,\partial\bar\partial \log(-\varphi)$ は $M$ 上の完備なKähler形式であり、$\sup|\bar\partial \log(-\varphi)|_\omega < \infty$ となる. Kähler多様体 $(M, \omega)$ に対し、$\omega = d\eta$ をみたす有界な1形式 $\eta$ が存在するとき、$(M, \omega)$ は $d$-有界であるという. $\mathbb{C}^n$ の有界等質領域はB計量に関して $d$-有界である(Donnelly '97, 大沢・甲斐 '07). より一般に、ジーゲル領域のB計量は完備であり、$d$-有界である(伊師). $d$-有界な完備Kähler多様体上の $\bar\partial$ 作用素については次の $L^2$ 評価式が基本的である. (Donnelly-Fefferman '83, M. Gromov '91)

*) $\mathbb{C}^n$ の有界領域に対しては、Z. Błocki-P. Pflug '98, G. Herbort '99 が独立にこれを示した.

**) $\varphi: M \to (-\infty, a)$ は皆既関数 $:\Longleftrightarrow$ $\forall c < a$ に対し $\{x \mid \varphi(x) < c\} \Subset M$.

⁂) S.K. Yeung, B.-Y. Chen もこれを独立に示した.

定理3.3. $L^{p,q}_{(2)}(M,\omega)$ で $\omega$ に関する $M$ 上の $L^2$ $(p,q)$ 形式の成す Hilbert 空間を表し、$\bar\partial^*$ で閉作用素 $\bar\partial : L^{p,q-1}_{(2)}(M,\omega) \to L^{p,q}_{(2)}(M,\omega)$ の共役作用素を表すとき、$(M,\omega)$ が $d$-有界かつ連結であれば、ある定数 $C$ に対し、$L^2$ ノルムの不等式

$$\|u\| \leq C\left(\|\bar\partial u\| + \|\bar\partial^* u\|\right)$$

がすべての $u \in \mathrm{Dom}\,\bar\partial \cap \mathrm{Dom}\,\bar\partial^* \cap L^{p,q}_{(2)}(M,\omega)$ $(p+q \neq n)$ について成立する。

## §4. 'Kazhdanの収束定理' について

$M$ は $n$ 次元複素多様体、$\widehat{M} \longrightarrow M$ はガロア被覆であるとし、その被覆変換群 $\Gamma \subset \mathrm{Aut}\,\widehat{M}$ の部分群の減小列

$$\Gamma_1 = \Gamma \supset \Gamma_2 \supset \Gamma_3 \supset \cdots \supset \Gamma_k \supset \cdots$$

で $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \Gamma_k = \{id\}$ をみたすものに対して、$M_k = \widehat{M}/\Gamma_k$ とおき、$\pi_k : \widehat{M} \longrightarrow M_k$ を射影とする。

一般的な問題：

(K) $\displaystyle \lim_{k\to\infty} \pi_k^* \partial\bar\partial \log K_{M_k} = \partial\bar\partial \log K_{\widehat{M}}$ (広義一様)

が成り立つための条件を求めよ。

Yau [Y] によれば $\tilde{M}$ が Bergman 計量をもてば十分である。しかしその証明は現在の技術の及ぶところではなさそうである。$n=1$ のときには $M_k$ の Poincaré 計量に関するラプラシアンの正スペクトルの下限 $\lambda_1(M_k)$ を用いて十分条件を述べることができる。

定理4.1 ('93, Rhodes) $\tilde{M}=\mathbb{D}$ であり、$M_k$ はすべてコンパクトで $\liminf_{k\to\infty} \lambda_1(M_k) > 0$ が成り立つとすれば、(K) が成立する。

$M_k$ のコンパクト性が不要な仮定であることを示すため、ここで定理4.1の証明を与えよう。

[証明] $\lim_{k\to\infty} \pi_k^* K_{M_k}(0) = K_{\mathbb{D}}(0)$ を示せば十分である。そのためには $M_k$ 上の正則1形式の列 $\gamma_k$ $(k=1,2,\cdots)$ で

$$\sqrt{-1}\int_{M_k} \gamma_k \wedge \overline{\gamma_k} \longrightarrow 1 \quad (k\to\infty)$$

かつ

$$\pi_k^* \gamma_k(0) \longrightarrow \left.\frac{dz}{\sqrt{2}}\right|_{z=0}$$

をみたすものが存在することをいえば十分である。(これにより $\lim_{k\to\infty} \pi_k^* K_{M_k}(0) \geq K_{\mathbb{D}}(0)$ がいえるが、逆向きの不等式は $\lambda_1(M_k)$ の条件がなくても簡単に示せる。)

$\bigcap_k \Gamma_k = \{id\}$ より、$\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$ となる正数列 $\varepsilon_k$ が存在して、$\pi_k|\{|z|<1-\varepsilon_k\}$ は単射となる。

従って $\pi_k(\{|z|<1-\varepsilon_k\})$ はPoincaré計量 $\omega_k$ に関する $M_k$ 内の測地円板であり、その半径 $r_k$ は $k\to\infty$ のとき $\infty$ に発散する。

$C^\infty$ 級関数 $\chi:\mathbb{R}\to[0,1]$ で $\chi|(-\infty,\frac{1}{2})=1$ かつ $\chi|(1,\infty)=0$ となるものを固定し、$\rho_k: M_k\to[0,\infty)$ を

$$\rho_k(x)=\chi(\mathrm{dist}_k(\pi_k(0),x)/r_k)$$

で定義する。ただし $\mathrm{dist}_k$ は $\omega_k$ に関する距離を表す。

$\rho_k\cdot(\pi_k^{-1})^*\gamma$ を $\pi_k(\{|z|<1-\varepsilon_k\})$ の外では $0$ とおいて $M_k$ 上の $C^\infty$ 級1形式として拡張したものを $\hat{\gamma}_k$ とし、$\bar\partial$ 方程式

$$\bar\partial u_k=\bar\partial\hat{\gamma}_k$$

を $M_k$ 上で $L^2$ 評価式つきで解く。$\lambda_1(M_k)$ の条件より ある定数 $C>0$ が存在して、$u_k$ として

$$\|u_k\|\le C\|\bar\partial\hat{\gamma}_k\|$$

をみたすものがとれる。$k\to\infty$ のとき、$r_k\to\infty$ より

$$\|\bar\partial\hat{\gamma}_k\|\longrightarrow 0$$

であるから、$\gamma_k=\hat{\gamma}_k-u_k$ とおけばよい。

この証明により、明らかに次が成立する。(cf. 定理3.3)

定理4.2. $n=1$ であり、$(\tilde{M},\sqrt{-1}\partial\bar\partial\log K_{\tilde{M}})$ は $d$-有界、かつ $\liminf_{k\to\infty}\lambda_1(M_k)>0$ ならば (K) が成立する。

さて $\mathbb{D} \simeq \mathbb{H} = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ であるが、Luo-Rudnick-Sarnak [L-R-S] によれば、$PSL(2,\mathbb{Z})$ ($= \operatorname{Aut}\mathbb{H}$) の主合同部分群 $\Gamma(N)$ ($N \in \mathbb{N}$) に対して

$$\lambda_1(\mathbb{H}/\Gamma(N)) > 171/748$$

が成り立つ．従って、$M_k = \mathbb{H}/\Gamma(2^k)$ ($k = 1, 2, \cdots$) は定理4.2の適用例となる。もちろん上の証明より明らかなように $\mathbb{H}\times\mathbb{H}$ 上でも

$$\lim_{k\to\infty} \pi_k^* K_{M_k} = K_{\mathbb{H}}$$

が成り立つわけである。($\pi_k^* K_{M_k}$ の $k\to\infty$ のときの漸近挙動が求まれば面白いかもしれない。)

Rhodes は次の十分条件も見出している。

定理4.3. $\widetilde{M} = \mathbb{D}$ であり、$M_k$ はすべてコンパクトであり、しかも $\Gamma_k$ はすべて $\Gamma$ の正規部分群であるとする。このとき (K) が成立する。

より一般には次が成り立つ．

定理4.4. $(\widetilde{M}, \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log K_{\widetilde{M}})$ は d-有界かつ等質 $M$ はコンパクト、かつすべての $\Gamma_k$ は $\Gamma$ の正規部分群であるとする。このとき (K) が成立する。

これは次の定理の系である。

定理4.5 (cf. [O-2]). (K) は以下の条件がみたされれば成立する。

1) $(\widetilde{M}, \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log K_{\widetilde{M}})$ は $d$-有界な完備Kähler多様体である。

2) $\widetilde{M}$ のコンパクト部分集合の列 $Q_k$ で $\pi_k|Q_k$ が単射であるものに対し、定数 $N \in \mathbb{N}$, $A_k \subset M_k$, および発散数列 $r_k$ が存在して、$\pi_k^{-1}$ は $\{p \mid \mathrm{dist}_k(p, q) < r_k^2\}$ $(\forall q \in A_k)$ 上で存在し、

$$\sup\{\mathrm{dist}_k(p, A_k) \mid p \in Q_k\} < r_k^2 - r_k$$

および、$A \subset A_k$ かつ $\# A > N$ なる任意の $A$ に対して

$$\bigcap_{q \in A}\{p \mid \mathrm{dist}_k(p, q) < r_k^2\} = \phi$$

が成立する。ただし $\mathrm{dist}_k$ は $\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log K_{\widetilde{M}}$ によって誘導される $M_k$ 上の距離関数を表す.

この証明は定理3.3を用いれば容易である.

定理4.4が定理4.5から従う理由は、$M$ のコンパクト性と $\Gamma_k$ の正規性により

$$\liminf_{k\to\infty}\ \inf_{p \in M} \sup\{r \,;\, \pi_k|\{x \in \widetilde{M} \mid \mathrm{dist}(p, x) < r\} \text{ は単射}\} = \infty$$

となるからである。実際、もし $p_k, q_k \in \widetilde{M}$ が存在して

$0 < \mathrm{dist}(p_k, q_k) < \mathrm{const}$ かつ $\pi_k(p_k) = \pi_k(q_k)$

となったとすると、$M$ がコンパクトで $\Gamma_k$ が正規であることから $p_1 = p_2 = \cdots = p_k = \cdots$ としてよく、従って $\Gamma_k$ の元 $\gamma_k \neq id$

の列 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots$ で $\gamma_k(p_1)$ が集積点をもつものが存在し、これは仮定 $\bigcap_{k=1}^{\infty} \Gamma_k = \{id\}$ に反する。等質性をどう使うかは演習問題。

## References


[H] Hörmander, L., Acta Math. 113 (1965), 89-152.

[K] Kazhdan, D., Actes du Congrès International Mathématiciens, 1970, 321-325

[Mi] Milne, J.S., arXiv: math/0106197v2 [math.DG] 12 Jul 2001.

[M] Mumford, D., Curves and their Jacobians, Univ. Michigan Press, 1975.

[O-1] Ohsawa, T., On the extension of $L^2$ holomorphic functions III: negligible weights, Math. Z. 219 (1995), 215-225.

[O-2] ———, A remark on Kazhdan's theorem on sequences of Bergman metrics, to appear in Kyushu J. Math.

[O-T] Ohsawa, T. and Takegoshi, K., Math. Z. 195 (1987), 197-204.

[R] Rhodes, J.A. Duke Math. J. 72 (1993), 725-738.

[Y] Yau, S.T., Monograph de l'enseignement math. 33, 1986.

[L-R-S] Luo, W., Rudnick, Z. and Sarnak, P., Geom. Funct. Anal. 5 (1995), 387-401.

付記

1) B計量の完備性に関する小林の問題に区切りをつけたBlock-Pflug, Herbort, Chenらの仕事では定理2.1の改良形であるJ.-P. Demailly[82]のL²消滅定理が用いられる. 定理3.3は定理2.1におけるρのようなweightの存在を前提としない所が要点であり、これを用いてラプラシアンの正固有値の下限が評価できる.

2) 超凸な多様体M上には必ず非定数正則関数が存在するかどうかは知られていないが、Mを離散群の作用で割ってできるコンパクトな多様体が射影的であることは、Mが$\mathbb{C}^n$の有界領域のときと同様にBergman核を用いて示すことができる. 超凸多様体上の解析的なファイバー束は、ファイバーが超凸であれば全空間も超凸である(Stehlé, Vajaitu).

問. 超凸多様体上の群の作用について、Bergman核を用いてわかることはないだろうか. 例えば最近C. Miebach氏によって示された次の結果を、そのような方針で超凸多様体に対して一般化することはできないだろうか.

定理(Miebach 08/3/31) Dは$\mathbb{C}^n$の有界等質領域、$\Gamma \subset \mathrm{Aut}\,D$は1個の元で生成される離散群とすると、$D/\Gamma$はスタイン空間である。

(B.-Y. Chenの最近の論文'On properly discontinuous groups of bounded domains'ではBergman核を用いてMiebachよりも'弱い'結果が得られている。)