

リース空間におけるショケ積分の定式化とその収束定理

信州大学・工学部 河邊 淳* (Jun Kawabe)

Faculty of Engineering, Shinshu University

概要. リース空間値ショケ積分論を包括的に議論する. 特に, リース空間に単調関数連続性条件を仮定すれば, 単調収束定理, Fatou の補題, 優収束定理などの収束定理がリース空間値ショケ積分に対して成立することを示す.

1. 序論

ショケ積分 [4] は, ルベグ積分に代わる積分概念として非加法的測度論で広く利用されており, その理論は断片的にはあるが, 既にリース空間値非加法的測度論の枠組みにまで拡張されている [1, 2, 9]. この論文 (講演要旨) は, リース空間値非加法的測度に関する実数値関数のショケ積分 (以下, 簡単にリース空間値ショケ積分と呼ぶ) の理論を包括的に述べることを目的としている.

この論文の主要部分は第 4 章である. そこでは, リース空間値ショケ積分に対する収束定理の定式化を試みた. リース空間値ショケ積分に対して単調収束定理, Fatou の補題, 優収束定理などを定式化するには, 実数空間における ε - δ 論法に代わるある種の滑らかさの概念をリース空間に導入する必要がある. 今回はリース空間に課すべき滑らかさの新概念として, いかなるリース空間値単調関数に対しても, その不連続点は高々可算であることを保証する “単調関数連続性条件” を考案した. 第 4 章では, この単調関数連続性条件を仮定すれば, リース空間値リーマン・スティルチェス積分に対する Helly-Bray 定理を巧妙に活用して, ショケ積分の収束定理を定式化できることを解説する.

リース空間値非加法的測度に対するショケ積分の定義とその基本性質は第 2 章で与える. 第 3 章ではショケ積分の共単調加法性を取り扱う. この章の結果は既に [1, 2] で, リース空間の表現に関する深遠な Maeda-Ogasawara-Vulikh の定理を利用するエレガントな手法で示されているが, 証明手順の分かりやすさと自己完結性の観点

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 28A25; Secondary 28B15, 28E10, 46G10.

Key words and phrases. non-additive measure, Choquet integral, Riemann-Stieltjes integral, monotone function continuity property, Riesz space.

*Research supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (C) No. 20540163, Japan Society for the Promotion of Sciences (JSPS).

から, [18, Section 7.5] と [20, 21] に沿った直接証明の手順を解説する. この論文は既に公表された論文 [14] の要約であり, 証明などは原論文を参照していただきたい.

2. ショケ積分

この章では, リース空間値非加法的測度に対するショケ積分の定義とその基本性質を与える. ショケ積分を定義するには2つの流儀がある. 一つは, Šipoš [20, 21] によるいわゆる水平積分 (horizontal integral) の考え方をを用いて, 被積分関数の水平方向への分割で定まる近似和の極限としてショケ積分を直接的に定義する流儀である. もう一つは, 被積分関数から定まる減少分布関数の広義リーマン積分としてショケ積分を間接的に定義する流儀で, Choquet [4] 自身や, Denneberg [7], König [15] らがその著作の中でこの流儀による定義を採用している. 今回, リース空間値ショケ積分を新たに定式化するにあたり, 既に確立されているリース空間値関数に対するリーマン(・スティルチェス)積分論を利用できることや, ファジィ測度や非加法的測度を研究する多くの工学者や数学者にとって馴染み深いなどの理由から, 後者の流儀, すなわち, 広義リーマン積分を用いた間接的定義を採用することとした. 最近, Boccutto と Ricčan [3] は, 前者の流儀, すなわち, Šipoš の水平積分を用いた定式化を与えているので, 興味ある読者は参照されたい.

以下この論文を通じて, X は空でない集合, \mathcal{C} は X の部分集合からなる集合族で空集合 \emptyset を含むとする. 実数全体, 自然数全体をそれぞれ \mathbb{R} , \mathbb{N} で表す.

定義 2.1. $f : X \rightarrow [0, \infty]$ は関数とする.

- (1) 任意の $t \geq 0$ に対して $\{x \in X : f(x) > t\} \in \mathcal{C}$ であるとき f は α -可測 (α -measurable) という.
- (2) 任意の $t > 0$ に対して $\{x \in X : f(x) \geq t\} \in \mathcal{C}$ であるとき f は c -可測 (c -measurable) という.

混乱が生じない場合は, 集合 $\{x \in X : f(x) > t\}$ や $\{x \in X : f(x) \geq t\}$ を簡単に $\{f > t\}$ や $\{f \geq t\}$ で表す. また, 集合族が \mathcal{C} であることを強調したい場合は, f は \mathcal{C} に関して α -可測などという.

命題 2.2. 関数 $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$ は α -可測, $c \in \mathbb{R}$ は $c \geq 0$ とする.

- (1) 関数 $f \wedge c, f - f \wedge c, (f - c)^+, cf$ は α -可測.
- (2) 集合族 \mathcal{C} は有限和と有限積で閉じているとする. 関数 $f \vee g$ と $f \wedge g$ は α -可測.
- (3) 集合族 \mathcal{C} は有限積と可算和で閉じているとする. 関数 $f + g$ は α -可測.

V はリース空間とする. リース空間論の標準的な用語については [17] を参照せよ. 順序有界な2重列 $\{r_{i,j}\}_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \subset V$ は, 各 $i \in \mathbb{N}$ に対して $r_{i,j} \downarrow 0$, すなわち, 各 $i, j \in \mathbb{N}$ に対して, $r_{i,j} \geq r_{i,j+1}$ かつ各 $i \in \mathbb{N}$ に対して $\inf_{j \in \mathbb{N}} r_{i,j} = 0$ のとき V の制御

列 (regulator) という。以下では、 \mathbb{N} から \mathbb{N} への写像全体を Θ で表す。デデキント σ -完備なリース空間 V は、任意の制御列 $\{r_{i,j}\}_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \subset V$ に対して $\inf_{\theta \in \Theta} \sup_{i \in \mathbb{N}} r_{i,\theta(i)} = 0$ のとき弱 σ -分配的 (weakly σ -distributive) という。多くの重要な関数空間や数列空間は弱 σ -分配的リース空間である (例えば, [23] を見よ)。

この論文を通じて特に断りがなければ、 V はデデキント完備かつ弱 σ -分配的なリース空間とする。リース空間値シヨケ積分論を展開するには、以下の性質をもつ V に属さない仮想的な要素 $+\infty$ を V に付加すると便利である: (i) すべての $u \in V$ に対して $(+\infty) + u = u + (+\infty) = +\infty$, (ii) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, (iii) すべての実数 $c > 0$ に対して $c \cdot (+\infty) = +\infty$, (iv) $0 \cdot (+\infty) = 0$ 。一方 $(+\infty) - (+\infty)$ と $c \cdot (+\infty)$ ($c < 0$) は定義しない。このとき, (v) すべての $u \in V$ に対して $u < +\infty$ と定めると, V の半順序構造は $V \cup \{+\infty\}$ まで拡張できる。この拡張された空間 $V \cup \{+\infty\}$ の空でない集合 A は, V の要素によって上から有界なとき上に有界 (bounded from above), V の要素によって下から有界なとき下に有界 (bounded from below) と呼ぶことにする。 A が上に有界でないとき, A の上限は $\sup A := +\infty$ と定める。さらに, A が上に有界であるが下に有界でないとき, A の下限は

$$\inf A := \begin{cases} \inf\{u \in A : u < +\infty\} & \text{if } \{u \in A : u < +\infty\} \neq \emptyset \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定める。

定義 2.3. 集合関数 $\mu : \mathcal{C} \rightarrow V$ は

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$
- (ii) 任意の $A, B \in \mathcal{C}$ に対して, $A \subset B$ ならば $\mu(A) \leq \mu(B)$ (単調増加性)

のとき非加法的測度 (non-additive measure) という。

定義 2.4. $\mu : \mathcal{C} \rightarrow V$ は非加法的測度とする。関数 $f : X \rightarrow [0, \infty]$ は α -可測とする。関数 $G_f : [0, \infty) \rightarrow V$ を $G_f(t) := \mu(\{x \in X : f(x) > t\})$ ($t \in [0, \infty)$) で定義し, μ に関する f の減少分布関数 (decreasing distribution function) という。

減少分布関数 G_f はその名の由来通り減少関数なので, リース空間におけるリーマン積分論 (付録参照) より, 各 $b > 0$ に対して G_f は閉区間 $[0, b]$ 上でリーマン可積分で, 関数 $\varphi(s) := \int_0^s G_f(t) dt$ ($s \in [0, \infty)$) は単調増加となる。それゆえ, リース空間値シヨケ積分の広義リーマン積分による定式化が可能である。

定義 2.5. $\mu : \mathcal{C} \rightarrow V$ は非加法的測度とする。関数 $f : X \rightarrow [0, \infty]$ は α -可測とする。 μ に関する f のシヨケ積分 (Choquet integral) を $\int_X f d\mu := \sup_{b > 0} \int_0^b G_f(t) dt$ で定義する。 $\int_X f d\mu < +\infty$, すなわち, 集合 $\left\{ \int_0^b G_f(t) dt : b > 0 \right\}$ が上に有界なとき f はシヨケ可積分 (Choquet integrable) という。

命題 2.6. $\mu : C \rightarrow V$ は非加法的測度, 関数 $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$ は σ -可測とする.

- (1) $c \in \mathbb{R}$ は $c \geq 0$ とする. cf は σ -可測で $\int_X (cf) d\mu = c \int_X f d\mu$.
- (2) すべての $x \in X$ に対して $f(x) \leq g(x)$ とする. このとき $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$.
それゆえ, g がシヨケ可積分ならば f もシヨケ可積分.

命題 2.7. $\mu : C \rightarrow V$ は非加法的測度, 関数 $f : X \rightarrow [0, \infty]$ は σ -可測とする. このとき $\int_X f d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_X (f \wedge n) d\mu$. それゆえ, f がシヨケ可積分であるための必要十分条件は集合 $\{\int_X (f \wedge n) d\mu : n \in \mathbb{N}\}$ が上に有界.

命題 2.8. $\mu : C \rightarrow V$ は非加法的測度, 関数 $f : X \rightarrow [0, \infty]$ は σ -可測とする. $a \in \mathbb{R}$ は $a \geq 0$ とする. このとき $\int_X f d\mu = \int_X (f \wedge a) d\mu + \int_X (f - f \wedge a) d\mu$.

命題 2.9. $\mu : C \rightarrow V$ は非加法的測度, 関数 $f : X \rightarrow [0, \infty]$ は σ -可測とする.

- (1) $\inf_{a>0} \int_X (f \wedge a) d\mu = 0$.
- (2) f がシヨケ可積分ならば $\inf_{a>0} \int_X (f - f \wedge a) d\mu = 0$.

$A \in C$ とする. 関数 $f : X \rightarrow [0, \infty]$ が σ -可測で C が有限積で閉じていれば, 関数 $f\chi_A$ も σ -可測となる. それゆえシヨケ定積分が定義可能である.

定義 2.10. $\mu : C \rightarrow V$ は非加法的測度, 関数 $f : X \rightarrow [0, \infty]$ は σ -可測とする. 集合族 C は有限積で閉じているとする. 各 $A \in C$ に対して f の A 上でのシヨケ積分を $\int_A f d\mu := \int_X f\chi_A d\mu$ で定義する. $\int_A f d\mu < +\infty$ のとき, f は A 上でシヨケ可積分 (Choquet integrable on A) という.

命題 2.11. $\mu : C \rightarrow V$ は非加法的測度とする. 集合族 C は有限積で閉じているとする. 関数 $f : X \rightarrow [0, \infty]$ は σ -可測で, $A \in C$ とする. このとき $\int_A f d\mu = \sup_{b>0} \int_0^b G_{f,A}(t) dt$. ここで, $G_{f,A}(t) := \mu(\{x \in A : f(x) > t\})$ ($t \geq 0$) と定める. さらに, f がシヨケ可積分ならば f は A 上でシヨケ可積分. 特に $\int_A 1 d\mu = \mu(A)$.

命題 2.12. $\mu : C \rightarrow V$ は非加法的測度とする. 集合族 C は有限積で閉じているとする. 関数 $f : X \rightarrow [0, \infty]$ は σ -可測かつシヨケ可積分とする. このとき, 任意の集合列 $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C$ に対して, $\mu(A_n) \rightarrow 0$ ならば $\int_{A_n} f d\mu \rightarrow 0$.

有限個の値をとる σ -可測関数 $h : X \rightarrow [0, \infty)$ の全体を $S(C)$ で表す. $S(C)$ に属する関数を σ -可測な単関数 (simple function) という. 集合族 C は有限積と有限和で閉じているとき束 (lattice) という.

命題 2.13. $\mu : C \rightarrow V$ は非加法的測度で, C は束とする. 関数 $f : X \rightarrow [0, \infty)$ は次の形の単関数とする: $f = \sum_{i=1}^r t_i \chi_{A_i}$, ただし $r \in \mathbb{N}$, $t_1, t_2, \dots, t_r \in \mathbb{R}$ で $t_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, r$), $A_1, \dots, A_r \in C$ で $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_r$. このとき f は σ -可測かつシヨケ可積分で $\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^r t_i \mu(A_i)$.

命題 2.14 ([1, Proposition 3.12]). $\mu: \mathcal{C} \rightarrow V$ は非加法的測度とする. 関数 $f: X \rightarrow [0, \infty]$ は σ -可測で, \mathcal{C} は束とする. このとき $\int_X f d\mu = \sup \{ \int_X h d\mu : h \in S(\mathcal{C}), h \leq f \}$. それゆえ, f がシヨケ可積分であるための必要十分条件は $\{ \int_X h d\mu : h \in S(\mathcal{C}), h \leq f \}$ が上に有界.

定義 2.15. (X, \mathcal{F}) は可測空間とする. 集合関数 $\mu: \mathcal{F} \rightarrow V$ は

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$ かつ任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して $\mu(A) \geq 0$
- (ii) 互いに素な集合からなる任意の集合列 $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ に対して $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^n \mu(A_k)$

のとき σ -測度 (σ -measure) という.

Wright [22, 24] は, 実数値関数 f と σ -測度 μ に対して, ルベーク型の積分を定義した. その積分を $(L) \int_X f d\mu$ で表す.

命題 2.16 ([8, Theorem 4]). (X, \mathcal{F}) は可測空間とする. $\mu: \mathcal{F} \rightarrow V$ は σ -測度で, 関数 $f: X \rightarrow [0, \infty]$ は \mathcal{F} -可測とする. このとき $\int_X f d\mu = (L) \int_X f d\mu$.

3. シヨケ積分の共単調線形性

この章では, 共単調な被積分関数の和に関してシヨケ積分が加法性をもつことを, 実数値シヨケ積分の共単調線形性を用いずに直接的に示す手順を述べる. 以下では, X は空でない集合, \mathcal{C} は X の部分集合からなる集合族で \emptyset を含むとする. V はデデキント完備かつ弱 σ -分配的なリース空間とする.

定義 3.1. \mathcal{C} は束とする. 非加法的測度 $\mu: \mathcal{C} \rightarrow V$ は

- (1) 任意の $A, B \in \mathcal{C}$ に対して $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) \leq \mu(A) + \mu(B)$ のとき劣モジュラ (submodular) という.
- (2) 任意の $A, B \in \mathcal{C}$ に対して, $A \cap B = \emptyset$ ならば $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$ のとき劣加法的 (subadditive) という.
- (3) 任意の $A, B \in \mathcal{C}$ に対して $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) \geq \mu(A) + \mu(B)$ のとき優モジュラ (supermodular) という.
- (4) 任意の $A, B \in \mathcal{C}$ に対して, $A \cap B = \emptyset$ ならば $\mu(A \cup B) \geq \mu(A) + \mu(B)$ のとき優加法的 (superadditive) という.
- (5) 劣モジュラかつ優モジュラのとき評価 (valuation) という.

命題 3.2. $\mu: \mathcal{C} \rightarrow V$ は非加法的測度, 関数 $f, g: X \rightarrow [0, \infty]$ は σ -可測とする. \mathcal{C} は束とする. μ が劣モジュラならば $\int_X (f \wedge g) d\mu + \int_X (f \vee g) d\mu \leq \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$. μ が優モジュラならば逆向きの不等式が成り立つ.

命題 3.3. $\mu : C \rightarrow V$ は非加法的測度, 関数 $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$ は σ -可測とする. 束 C は可算和で閉じているとする. μ が劣モジュラならば $\int_X (f+g)d\mu \leq \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$. μ が優モジュラならば逆向きの不等式が成り立つ.

命題 3.4. $\mu : C \rightarrow V$ は非加法的測度とする. \mathcal{M} は C の部分族で空集合 \emptyset を含み, 有限積と可算和で閉じているとする. 次の条件は同値.

- (i) μ は \mathcal{M} 上の評価.
- (ii) \mathcal{M} に関して σ -可測な任意の関数 $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$ に対して $\int_X (f+g)d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$.

定義 3.5. $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$ は関数とする. X の任意の要素対 (x, x') に対して $f(x) < f(x')$ ならば $g(x) \leq g(x')$ のとき, f と g は**共単調** (comonotonic) という.

注意 3.6. $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$ は関数とする. f と g が共単調であるための必要十分条件は X の部分集合族 $\{\{f > t\}, \{g > s\} : t, s \in [0, \infty)\}$ が (集合の包含関係で定まる半順序に関して) 鎖となることである.

命題 3.7. 関数 $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$ は σ -可測とする. 次の条件は同値.

- (i) f と g は共単調.
- (ii) 任意の非加法的測度 $\mu : C \rightarrow V$ に対して $\int_X (f+g)d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$.

4. ショケ積分の収束定理

この章ではショケ積分の収束定理を定式化する. その際, リース空間値単調関数の不連続点集合の濃度が重要な役割を果たす. 以下では, V はデデキント完備リース空間, $a, b \in \mathbb{R}$ は $a < b$ を満たす定数とする.

定義 4.1 ([19, Definition 5.6.4]). 関数 $g : [a, b] \rightarrow V$ は, 制御列 $\{r_{i,j}\}_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \subset V$ が存在して, 任意の $\theta \in \Theta$ に対して, 適当な $\delta > 0$ を選べば, 任意の $t \in [a, b]$ に対して, $|t - t_0| < \delta$ ならば $|g(t) - g(t_0)| \leq \sup_{i \in \mathbb{N}} r_{i, \theta(i)}$ となるとき点 t_0 で**連続** (continuous) という. また, すべての $t \in [a, b]$ で連続のとき, g は $[a, b]$ 上で連続という.

注意 4.2. (1) 定義 4.1 の制御列 $\{r_{i,j}\}_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ を**連続性を定義する制御列**と呼ぶことがある.

(2) 右側連続性や左側連続性も同様に定義される.

関数 $g : [a, b] \rightarrow V$ は, 任意の $t_1, t_2 \in [a, b]$ に対して, $t_1 < t_2$ ならば $g(t_1) \leq g(t_2)$ のとき**単調増加** (monotonely increasing) という. 単調減少関数も同様に定義できる. 関数が単調増加または単調減少のとき単に**単調** (monotone) という. 以下では右側連続なベクトル関数のもつ性質を考察するが, 簡単な修正で左側連続の場合や連続な場合にも同様な結果が得られる.

命題 4.3. 関数 $g : [a, b] \rightarrow V$ は単調増加で, $t_0 \in [a, b)$ とする. 次の2つの条件を考える.

- (i) g は点 t_0 で右側連続.
- (ii) $g(t_0) = \inf\{g(s) : s \in [a, b], t_0 < s\}$

V が弱 σ -分配的のとき (i) ならば (ii) が成り立つ. V が順序可分のときは (ii) ならば (i) が成り立つ.

単調な実数値関数の不連続点の集合は高々可算であるが, リース空間値単調関数に対しては, その不連続点の集合が非可算となる場合がある.

例 4.4. 各 $t \in [0, 1]$ に対して, $h_t \in \mathbb{R}^{[0,1]}$ を

$$h_t(\xi) := \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq \xi \leq t \\ 0 & \text{if } \xi > t \end{cases} \quad (\xi \in [0, 1])$$

で定義する. 各 $t, \xi \in [0, 1]$ に対して $g(t)(\xi) := h_t(\xi)$ とおく. 関数 $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{[0,1]}$ は単調増加であるが $(0, 1]$ の各点で不連続. それゆえ, g の不連続点の集合は非可算.

上で与えた例は, リース空間に新たな有用な族があることを示唆している.

定義 4.5. リース空間 V は, \mathbb{R} の任意の有界閉区間上で定義されたすべての V -値単調関数が高々可算な不連続点をもつとき **単調関数連続性条件** (monotone function continuity property) を満たすという.

単調関数連続性条件を満たす具体的なリース空間の例を与えるために, σ -滑らかな可算サブノルムリース空間の概念を導入する. この概念はリース空間の滑らかさの新概念として [13] で導入されたものの一つである. 関数 $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ は次の3つの公理を満たすときリース空間 V 上の**束サブノルム** (lattice subnorm) という.

- (i) 任意の $u \in V$ に対して $\|u\| \geq 0$. さらに $\|0\| = 0$.
- (ii) 任意の $u, v \in V$ に対して $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.
- (iii) 任意の $u, v \in V$ に対して, $|u| \leq |v|$ ならば $\|u\| \leq \|v\|$.

以下の2つの性質は上の条件から自動的に導かれる.

- (iv) 任意の $u \in V$ に対して $\||u|\| = \|u\|$. それゆえ $\|-u\| = \|u\|$.
- (v) 任意の $u, v \in V$ に対して $\||u\| - \|v|\| \leq \|u - v\|$.

束サブノルムは一般には V 上に局所凸位相を定義しないことに注意せよ. V 上の束サブノルム $\|\cdot\|$ は, 任意の点列 $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ に対して, $u_n \downarrow 0$ ならば $\|u_n\| \rightarrow 0$ のとき **σ -順序連続** (σ -order continuous) といい, 任意の有向族 $\{u_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma} \subset V$ に対して, $u_\alpha \downarrow 0$ ならば $\|u_\alpha\| \rightarrow 0$ のとき **順序連続** (order continuous) という. 点を分離する束サブノルムの可算族をもつリース空間を**可算サブノルムリース空間** (countably subnormed Riesz space) という. 可算サブノルムリース空間は, 順序空間としてデデ

キント σ -完備で、その束サブノルムがすべて σ -順序連続のとき σ -滑らか (σ -smooth) という。

以下では、 σ -滑らかな可算サブノルムリース空間のもつ性質をまとめる (詳細は [13] を見よ)。エゴロフ性や漸近のエゴロフ性の定義及びその性質、さらにリース空間値非加法的測度に対するエゴロフ定理の成立性と漸近のエゴロフ性との密接な関係については [11, 12] を参照せよ。

命題 4.6. V は可算サブノルムリース空間とする。

- (1) V が σ -滑らかならば V は超デデキント完備で、その束サブノルムはすべて順序連続。
- (2) V が σ -滑らかならば V は漸近のエゴロフ性とエゴロフ性を満たす。さらに V は弱 σ -分配的。

命題 4.7. σ -滑らかな可算サブノルムリース空間はつねに単調関数連続性条件を満たす。

注意 4.8. 論文 [16, Theorem], [5, Proposition 3] の結果と命題 4.3 より、 V がデデキント σ -完備なバナハ束ならば、 V のノルムの順序連続性と V が単調関数連続性条件を満たすことは同値となる ([6] も見よ)。

(T, \mathcal{T}, ν) は σ -有限な測度空間とする。 $\mathcal{L}_0(\nu)$ で T 上で定義された ν -可測な実数値関数の a.e. での同値類からなるリース空間を表す。 $0 < p < \infty$ とし、 $\mathcal{L}_p(\nu)$ で $\int_T |f|^p d\nu < \infty$ を満たす要素からなる $\mathcal{L}_0(\nu)$ の順序イディアルを、 $\mathcal{L}_\infty(\nu)$ で ν -本質的に有界な要素からなる $\mathcal{L}_0(\nu)$ の順序イディアルを表す。

例 4.9 ([13, Corollary 1, Proposition 5]). 次の数列空間や関数空間は σ -滑らかな可算サブノルムリース空間。

- (1) 実数列全体からなる超デデキント完備リース空間 s 及びその順序イディアル c_0 や l_p ($0 < p \leq \infty$).
- (2) 超デデキント完備リース空間 $\mathcal{L}_0(\nu)$ 及びその順序イディアル $\mathcal{L}_p(\nu)$ ($0 < p \leq \infty$).

以下では、 (X, \mathcal{F}) は可測空間、 V はデデキント完備で弱 σ -分配的なリース空間とする。

定義 4.10. 非加法的測度 $\mu : \mathcal{F} \rightarrow V$ は

- (1) 任意の $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ と $A \in \mathcal{F}$ に対して、 $A_n \downarrow A$ ならば $\mu(A_n) \downarrow \mu(A)$ のとき **上から連続** (continuous from above) という。
- (2) 任意の $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ と $A \in \mathcal{F}$ に対して、 $A_n \uparrow A$ ならば $\mu(A_n) \uparrow \mu(A)$ のとき **下から連続** (continuous from below) という。

シヨケ積分の収束定理を証明する際には、付録でまとめたリーマン・スティルチェス積分の収束に関する Helly-Bray 定理 (定理 A.10) が決定的な役割を果たす。

定理 4.11. 非加法的測度 $\mu : \mathcal{F} \rightarrow V$ は下から連続とする。 V は単調関数連続性条件を満たすとする。 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は X 上で定義された \mathcal{F} -可測な拡大実数値非負関数の単調増加列で、 f もそのような関数とする。 すべての $x \in X$ に対して $f_n(x) \uparrow f(x)$ ならば $\int_X f d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_X f_n d\mu$ 。

補題 4.12. $\mu : \mathcal{F} \rightarrow V$ は非加法的測度、関数 $f : X \rightarrow [0, \infty]$ は \mathcal{F} -可測とする。

- (1) $t \in [0, \infty)$ が関数 $t \rightarrow \mu(\{f \geq t\})$ の連続点ならば $\mu(\{f \geq t\}) = \mu(\{f > t\})$ 。
- (2) V は単調関数連続性条件を満たすとする。 このとき、 $[0, \infty)$ 内の高々可算個の点を除いて $\mu(\{f \geq t\}) = \mu(\{f > t\})$ 。

定理 4.13. 非加法的測度 $\mu : \mathcal{F} \rightarrow V$ は上から連続とする。 V は単調関数連続性条件を満たすとする。 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は X 上で定義された \mathcal{F} -可測かつシヨケ可積分な拡大実数値非負関数の単調減少列で、 f は X 上で定義された \mathcal{F} -可測な拡大実数値非負関数とする。 すべての $x \in X$ に対して $f_n(x) \downarrow f(x)$ ならば、 f はシヨケ可積分で $\int_X f d\mu = \inf_{n \in \mathbb{N}} \int_X f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$ 。

定理 4.14. $\mu : \mathcal{F} \rightarrow V$ は非加法的測度とする。 V は単調関数連続性条件を満たすとする。 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は X 上で定義された \mathcal{F} -可測な拡大実数値非負関数の列とする。

- (1) μ は下から連続とする。 このとき $\int_X (\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$ 。
- (2) μ は上から連続とする。 X 上で定義された \mathcal{F} -可測かつシヨケ可積分な拡大実数値非負関数 g が存在して、すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n \leq g$ とする。 このとき $\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \leq \int_X (\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n) d\mu$ 。

定理 4.15. 非加法的測度 $\mu : \mathcal{F} \rightarrow V$ は連続とする。 V は単調関数連続性条件を満たすとする。 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は X 上で定義された \mathcal{F} -可測な拡大実数値非負関数の列で、 f もそのような関数とする。 X 上で定義された \mathcal{F} -可測かつシヨケ可積分な拡大実数値非負関数 g が存在して、すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n \leq g$ とする。 すべての $x \in X$ に対して $f_n(x) \rightarrow f(x)$ ならば、 f はシヨケ可積分で $\int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu$ 。

付録 A. リース空間におけるリーマン・スティルチェス積分論

この付録ではリース空間におけるリーマン・スティルチェス積分論を概観する。 実際にはより一般的なクルズワイル・スティルチェス積分の理論が [19] で既に確立されているが、シヨケ積分の定式化との結び付きを考慮して、リーマン・スティルチェス積分に限定してその理論の概要を紹介する。 以下この付録を通じて、 V はリース空間、 $a, b \in \mathbb{R}$ は $a < b$ を満たす定数とする。

まず区間の分割に関する定義を復習する。有界閉区間 $[a, b]$ の分割 (partition)

$$\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{i-1} < t_i < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$$

を考える。ここで t_1, t_2, \dots, t_{n-1} は分割 Δ の分割点 (dividing point) という。分割 Δ を簡単に $\Delta = \{[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, t_n]\}$ とかき, その全体を $\mathcal{D}[a, b]$ で表す。分割 Δ の大きさ (size) は $|\Delta| := \max\{|t_i - t_{i-1}| : 1 \leq i \leq n\}$ で定義される。

区間 $[a, b]$ の分割 $\Delta = \{[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, t_n]\}$ と各小区間から選ばれた点

$$\xi_1 \in [t_0, t_1], \xi_2 \in [t_1, t_2], \dots, \xi_n \in [t_{n-1}, t_n]$$

の組を $(\Delta, \xi) = \{([t_0, t_1], \xi_1), ([t_1, t_2], \xi_2), \dots, ([t_{n-1}, t_n], \xi_n)\}$ で表し, 組 (Δ, ξ) のことも $[a, b]$ の分割という。簡単のため, 分割 Δ 自身及び組 (Δ, ξ) の両方に対して, それらの全体を同じ記号 $\mathcal{D}[a, b]$ を用いて表す。

定義 A.1 ([19, Definition 5.6.2], [8]). V はデデキント σ -完備とする。 $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ と $g : [a, b] \rightarrow V$ は関数とする。要素 $J \in V$ と制御列 $\{r_{i,j}\}_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \subset V$ が存在して, 任意の $\theta \in \Theta$ に対して, 適当な $\delta > 0$ を選べば可積分性条件 (integrability condition): 任意の $(\Delta, \xi) = \{([t_0, t_1], \xi_1), \dots, ([t_{n-1}, t_n], \xi_n)\} \in \mathcal{D}[a, b]$ に対して, $|\Delta| < \delta$ ならば $|J - S_h(g, \Delta, \xi)| \leq \sup_{i \in \mathbb{N}} r_{i, \theta(i)}$ が成り立つとき, g は h に関して $[a, b]$ 上でリーマン・スティルチェス可積分 (Riemann-Stieltjes integrable) という。ここで $S_h(g, \Delta, \xi) := \sum_{i=1}^n (h(t_i) - h(t_{i-1}))g(\xi_i)$ を g の h に関するリーマン・スティルチェス和 (Riemann-Stieltjes sum) という。要素 J が一意に定まるとき, J を g の h に関する $[a, b]$ 上のリーマン・スティルチェス積分 (Riemann-Stieltjes integral) といい, $\int_a^b g dh$ とかく。また, 制御列 $\{r_{i,j}\}_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ を積分を定める制御列 (defining regulator for the integral) という。 $h(t) := t$ とした特別な場合には, $S(\Delta, \xi) := \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})g(\xi_i)$ と $\int_a^b g dt$ をそれぞれ g の $[a, b]$ 上のリーマン和 (Riemann sum), リーマン積分 (Riemann integral) という。

注意 A.2. (1) 上の定義で分割の各小区間内の点 $\xi_1 \in [t_0, t_1], \xi_2 \in [t_1, t_2], \dots, \xi_n \in [t_{n-1}, t_n]$ はすべて異なるように選べる。さらに, V が弱 σ -分配的な場合は J は一意的に定まることが容易に示せる。

(2) 以下では “Riemann-Stieltjes”, “Riemann” をそれぞれ “RS”, “R” と略記する。

(3) h の g に関するリーマン・スティルチェス積分も同様に定義し $\int_a^b h dg$ で表す。

(4) 通常の設定と同様に, $\int_a^a g dh := 0$, $\int_b^a g dh := -\int_a^b g dh$ と約束する。

リース空間におけるリーマン・スティルチェス積分に対しても部分積分法の公式が成立する。詳細は [19, Proposition 5.6.3] または [8, Theorem 1] を参照せよ。

命題 A.3. V はデデキント σ -完備かつ弱 σ -分配的とする。 $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ と $g : [a, b] \rightarrow V$ は関数とする。 h が g に関して $[a, b]$ 上で RS-可積分であるための必要十

分条件は g が h に関して $[a, b]$ 上で RS-可積分となることであり，部分積分法の公式 $\int_a^b h dg = h(b)g(b) - h(a)g(a) - \int_a^b g dh$ が成り立つ。

以下では，RS-積分 $\int_a^b g dh$ のもつ性質をまとめる．もう一つのタイプの RS-積分 $\int_a^b h dg$ については自明な修正を施せばよい．関数 $g : [a, b] \rightarrow V$ は，適当な $v \in V$ が存在して，任意の分割 $\Delta = \{[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, t_n]\} \in \mathcal{D}[a, b]$ に対して $v_g(\Delta) := \sum_{i=1}^n |g(t_i) - g(t_{i-1})| \leq v$ のとき **有界変動** (of bounded variation) という．リース空間 V がデデキント完備のとき，関数 g の $[a, b]$ 上の **全変動** (total variation) を $v_g := \sup\{v_g(\Delta) : \Delta \in \mathcal{D}[a, b]\}$ で定義する．これらの定義は実数値関数に対しては通常の見方と一致する．任意の単調関数 $g : [a, b] \rightarrow V$ は有界変動である．したがって，有界，すなわち，集合 $\{g(t) : t \in [a, b]\}$ は V で順序有界となる．リース空間値有界変動関数に関するさらなる情報については [9] を見よ．

リーマン・スティルチェス積分の可積分性に関するコーシー型の判定条件は [8, Theorem 2] と同様にして示せる．

命題 A.4. V はデデキント完備かつ弱 σ -分配的とする．関数 $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ は有界変動，関数 $g : [a, b] \rightarrow V$ は有界とする．次の条件は同値．

- (i) RS-積分 $\int_a^b g dh$ が存在する．すなわち， g は h に関して $[a, b]$ 上で RS-可積分．
- (ii) Cauchy-Bolzano 条件が成り立つ．すなわち，制御列 $\{r_{i,j}\}_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \subset V$ が存在して，任意の $\theta \in \Theta$ に対して，適当な $\delta > 0$ を選べば，可積分性条件：任意の $(\Delta_1, \xi), (\Delta_2, \eta) \in \mathcal{D}[a, b]$ に対して， $|\Delta_1|, |\Delta_2| < \delta$ ならば $|S_h(g, \Delta_1, \xi) - S_h(g, \Delta_2, \eta)| \leq \sup_{i \in \mathbb{N}} r_{i, \theta(i)}$ が成り立つ．

命題 A.3 と A.4 より，通常の場合と同様にして次の 2 つの結果を示すことができる．

命題 A.5 ([19, Theorem 5.6.6], [8, Corollary 1]). V はデデキント完備かつ弱 σ -分配的とする．関数 $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ は連続，関数 $g : [a, b] \rightarrow V$ は有界変動とする．このとき， h は g に関して $[a, b]$ 上で RS-可積分．それゆえ g も h に関して RS-可積分．

命題 A.6. V はデデキント完備かつ弱 σ -分配的とする．関数 $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ は有界変動，関数 $g : [a, b] \rightarrow V$ は有界とする． $[c, d]$ は $[a, b]$ の部分区間とする． g が h に関して $[a, b]$ 上で RS-可積分ならば $[c, d]$ 上でも RS-可積分．

大雑把に言えば，積分論における ε - δ 論法を制御列を用いる論法で置き換えることにより，通常のリーマン・スティルチェス積分論の基本的な結果が，リース空間値関数に対するリーマン・スティルチェス積分に対しても成立することを確かめることができる．以下では読者の便利のためにリーマン・スティルチェス積分の基本的性質を簡潔にまとめておく．

命題 A.7. V はデデキント σ -完備かつ弱 σ -分配的とする. $h, h_1, h_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ と $g, g_1, g_2 : [a, b] \rightarrow V$ は関数とする. $\alpha \in \mathbb{R}$, $e \in V$ とする.

- (1) $\int_a^b edh$ は存在し $\int_a^b edh = (h(b) - h(a))e$.
- (2) 関数 h は有界変動で $\int_a^b gdh$ が存在すると仮定する. さらに適当な $u \in V$ が存在して, すべての $t \in [a, b]$ に対して $|g(t)| \leq u$ とする. このとき $\left| \int_a^b gdh \right| \leq v_h \cdot u$.
- (3) $\int_a^b g_1 dh$ と $\int_a^b g_2 dh$ が存在すれば $\int_a^b (g_1 + g_2) dh$ も存在して $\int_a^b (g_1 + g_2) dh = \int_a^b g_1 dh + \int_a^b g_2 dh$.
- (4) $\int_a^b gdh$ が存在すれば $\int_a^b (\alpha g) dh$ も存在して $\int_a^b (\alpha g) dh = \alpha \int_a^b gdh$.
- (5) $\int_a^b gdh_1$ と $\int_a^b gdh_2$ が存在すれば $\int_a^b gd(h_1 + h_2)$ も存在して $\int_a^b gd(h_1 + h_2) = \int_a^b gdh_1 + \int_a^b gdh_2$.
- (6) $\int_a^b gdh$ が存在すれば $\int_a^b gd(\alpha h)$ も存在して $\int_a^b gd(\alpha h) = \alpha \int_a^b gdh$.
- (7) $c \in (a, b)$ とする. g が h に関して $[a, c]$, $[c, d]$, $[a, b]$ 上で RS-可積分ならば $\int_a^b gdh = \int_a^c gdh + \int_c^b gdh$.
- (8) $c \in (a, b)$ とする. g は有界で, h は c で連続とする. g が h に関して $[a, c]$ と $[c, b]$ 上で RS-可積分ならば $[a, b]$ 上でも RS-可積分で $\int_a^b gdh = \int_a^c gdh + \int_c^b gdh$.
- (9) g_1 と g_2 は h に関して $[a, b]$ 上で RS-可積分で, $[a, b]$ 内の高々可算個の点を除けば $g_1(t) = g_2(t)$ とする. このとき $\int_a^b g_1 dh = \int_a^b g_2 dh$.
- (10) 分割 $\Delta = \{[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, t_n]\} \in \mathcal{D}[a, b]$ を考える. h は分割 Δ の分割点 t_1, t_2, \dots, t_{n-1} で連続とする. 関数 $g : [a, b] \rightarrow V$ を $g(t) := u_i$ if $t \in [t_{i-1}, t_i)$ ($1 \leq i \leq n$), $g(b) := u_{n+1}$ で定義する. このとき g は h に関して $[a, b]$ 上で RS-可積分で $\int_a^b gdh = \sum_{i=1}^n (h(t_i) - h(t_{i-1})) u_i$.
- (11) h は単調増加で, g_1, g_2 は h に関して $[a, b]$ 上で RS-可積分とする. すべての $t \in [a, b]$ に対して $g_1(t) \leq g_2(t)$ ならば $\int_a^b g_1 dh \leq \int_a^b g_2 dh$.
- (12) h は単調増加で, g と $|g|$ は h に関して $[a, b]$ 上で RS-可積分とする. このとき $\left| \int_a^b gdh \right| \leq \int_a^b |g| dh$.
- (13) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ で $\alpha > 0$ とする. 関数 $g_{\alpha, \beta} : \mathbb{R} \rightarrow V$ を $g_{\alpha, \beta}(t) := g(\alpha t + \beta)$ ($t \in \mathbb{R}$) で定義する. g は $[\alpha a + \beta, \alpha b + \beta]$ 上で R-可積分とする. このとき $g_{\alpha, \beta}$ は $[a, b]$ 上で R-可積分で, 置換積分公式 $\int_a^b g_{\alpha, \beta}(t) dt = \int_a^b g(\alpha t + \beta) dt = \int_{\alpha a + \beta}^{\alpha b + \beta} g(t) dt / \alpha$ が成り立つ.

注意 A.8. 定義 A.1 は通常のリーマン・スティルチェス積分の定義がもつと同じ欠陥をもつ。例えば、共通の不連続点をもつ関数 g, h に対しては RS-積分 $\int_a^b gdh$ は存在しない。命題 A.7 の (8) と (10) で関数 h に特別な点での連続性を仮定せざるを得ないのはこの欠陥のためである。

次の 2 つの定理は [19, Theorem 5.7.3] の僅かな一般化である。詳細については [5, 6, 9] も参照せよ。

定理 A.9 (The first Helly-Bray theorem). V はデデキント完備かつ弱 σ -分配的とする。任意の有界閉区間上で定義されたどんな V -値単調関数も高々可算個の不連続点をもつとする。関数 $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ は連続とする。関数 $g_n, g : [a, b] \rightarrow V$ は有界変動で、次の 3 つの性質を満たすとする。

- (i) $g_n (n = 1, 2, \dots)$ の全変動は一様有界。すなわち、適当な $v \in V$ が存在して、すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $v_{g_n} \leq v$ 。
- (ii) $[a, b]$ 内の高々可算個の点を除いて $g_n(t) \rightarrow g(t)$ 。
- (iii) $g_n(a) \rightarrow g(a)$ かつ $g_n(b) \rightarrow g(b)$ 。

このとき $\int_a^b h dg_n \rightarrow \int_a^b h dg$ 。

定理 A.10 (The first Helly-Bray theorem). V はデデキント完備かつ弱 σ -分配的とする。任意の有界閉区間上で定義されたどんな V -値単調関数も高々可算個の不連続点をもつとする。関数 $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ は連続とする。関数 $g_n, g : [a, b] \rightarrow V$ は有界変動で、次の 3 つの性質を満たすとする。

- (i) $g_n (n = 1, 2, \dots)$ の全変動は一様有界。すなわち、適当な $v \in V$ が存在して、すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $v_{g_n} \leq v$ 。
- (ii) $[a, b]$ 内の少なくとも一点で $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は一様有界。すなわち、適当な $c \in [a, b]$ と $u \in V$ が存在して、すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $|g_n(c)| \leq u$ 。
- (iii) $[a, b]$ 内の高々可算個の点を除いて $g_n(t) \rightarrow g(t)$ 。

このとき $\int_a^b g_n dh \rightarrow \int_a^b g dh$ 。

参考文献

- [1] A. Boccuto, A.R. Sambucini, On the De Giorgi-Letta integral with respect to means with values in Riesz spaces, *Real Analysis Exchange* 21 (1995/96) 793–810.
- [2] A. Boccuto, A.R. Sambucini, The monotone integral with respect to Riesz space-valued capacities, *Rend. Mat. Appl.* (7) 16 (1996) 491–524.
- [3] A. Boccuto, B. Riečan, The symmetric choquet integral with respect to Riesz-space-valued capacities, *Czechoslovak Math. J.* 58(133) (2008) 289–310.
- [4] G. Choquet, Theory of capacities, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 5 (1953–54) 131–295.
- [5] C. Debiève, M. Duchoň, M. Duhoux, Helly's theorem in some Banach lattices, *Math. J. Toyama Univ.* 23 (2000) 163–174.

- [6] C. Debiève, M. Duchoň, M. Duhoux, A Helly theorem in the settings of Banach spaces, *Tatra Mt. Math. Publ.* 22 (2001) 105–114.
- [7] D. Denneberg, *Non-additive Measure and Integral*, second ed., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.
- [8] M. Duchoň, J. Haluška, B. Riečan, On the Choquet integral for Riesz space valued measure, *Tatra Mt. Math. Publ.* 19 (2000) 75–89.
- [9] M. Duchoň, B. Riečan, Generalized moment problem in vector lattices, *Novi. Sad. J. Math.* 26 (1996) 53–61.
- [10] D.H. Fremlin, *Topological Riesz spaces and measure theory*, Cambridge University Press, 1974.
- [11] J. Kawabe, The Egoroff theorem for non-additive measures in Riesz spaces, *Fuzzy Sets and Systems* 157 (2006) 2762–2770.
- [12] J. Kawabe, The Egoroff property and the Egoroff theorem in Riesz space-valued non-additive measure theory, *Fuzzy Sets and Systems* 158 (2007) 50–57.
- [13] J. Kawabe, The countably subnormed Riesz space with applications to non-additive measure theory, in: T. Murofushi, W. Takahashi, M. Tsukada (Eds.), *2005 Symposium on Applied Functional Analysis—Information Sciences and Related Fields*, Yokohama Publishers, 2007, pp. 279–292.
- [14] J. Kawabe, The Choquet integral in Riesz space, *Fuzzy Sets and Systems* 159 (2008) 629–645.
- [15] H. König, *Measure and Integration*, Springer, Berlin, 1997.
- [16] B. Lavrič, A characterization of Banach lattices with order continuous norm *Rad. Mat.* 8 (1992) 37–41.
- [17] W.A.J. Luxemburg, A.C. Zaanen, *Riesz Spaces I*, North-Holland, Amsterdam, 1971.
- [18] E. Pap, *Null-Additive Set Functions*, Kluwer Academic Publishers, Bratislava, 1997.
- [19] B. Riečan and T. Neubrunn, *Integral, Measure, and Ordering*, Kluwer, Bratislava, 1997.
- [20] J. Šipoš, Integral with respect to a pre-measure, *Math. Slovaca* 29 (2) (1979) 141–155.
- [21] J. Šipoš, Non linear integrals, *Math. Slovaca* 29 (3) (1979) 257–270.
- [22] J.D.M. Wright, Stone-algebra-valued measures and integrals, *Proc. London Math. Soc.* 19 (1969) 107–122.
- [23] J.D.M. Wright, The measure extension problem for vector lattices, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 21 (1971) 65–85.
- [24] J.D.M. Wright, Measures with values in a partially ordered vector space, *Proc. London Math. Soc.* 25 (1972) 675–688.