数理解析研究所講究録
第 1615 巻 2008 年 34-43

距離射影を用いた非拡大写像族の共通不動点近似について

山梨大学教育人間科学部 厚芝 幸子 (SACHIKO ATSUSHIBA)

1. 序

E を実 Banach 空間とし, C を E の空でない閉凸部分集合とする。C から C への写像 T が C から C への非拡大であるとは任意の $x, y \in C$ に対して

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$$

をみたすときであり, $F(T)$ で集合 $\{x \in C : x = Tx\}$ を表す。非拡大写像の不動点をみつける問題は不動点近似とよばれているが, 不動点への収束定理については多くの数学者によって研究され, 例えば [2, 3, 4, 5, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28] などの Hilbert 空間または Banach 空間における写像の不動点をみつけるための収束定理など多数示されている。また大きく分けて幾つかの不動点をみつけるための点列近似法が研究されている。そのような中で本論文では, 特に Nakajo-Takahashi [17], Matsushita-Takahashi [16] の考えをうけて, hybrid method の考えおよび距離射影を用いて非拡大写像の半群に対する点列を考え, それにより共通不動点への強収束定理を証明する。最後にこれの応用として得られるいくつかの強収束定理についても述べる ([6] 参照)。

2. 準備

本論文では以後, E は実 Banach 空間を表し, E^* は E の共役空間とし, $\langle y, x^* \rangle$ は $x^* \in E^*$ の $y \in E$ での値を表す。$x_n \to x$ は点列 $\{x_n\}$ が x に強収束することを表し, また $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ も x_n が x に強収束することを表す。$\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^+$ はそれぞれ, すべての実数からなる集合, すべての非負の実数からなる集合とする。さらに $\mathbb{N}$ はすべての正整数からなる集合を表す。

Banach 空間 E が狭義凸であるとは $\|x\| = \|y\| = 1, x \neq y$ をみたす任意の $x, y \in E$ について $\|x + y\|/2 < 1$ が成立するときをいう。狭義凸な Banach 空間 E では, 任意の $x, y \in E$, $\lambda \in (0, 1)$ に対して $\|x\| = \|y\| = \|(1-\lambda)x + \lambda y\|$ が成立するならば, $x = y$ となる。$B_r = \{v \in E : \|v\| \leq r\}$ とする。Banach 空間 E が一様凸であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\|x - y\| \geq \varepsilon$ をみたす $x, y \in B_1$ について $\|x + y\|/2 \leq 1 - \delta$ となる

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 47H09, 49M05.
Key words and phrases. Fixed point, nonexpansive mapping, nonexpansive semigroup, weak convergence, strong convergence, iteration.

$\delta > 0$ が存在することである。一様凸な Banach 空間は回帰的であり, 狭義凸であることが知られている。$x \in E$ に対して

$$Jx = \{x^* \in E^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

で定義される E から 2^{E^*} への写像 J を E の双対写像という。Hahn-Banach の定理より, $Jx \neq \emptyset$ が任意の $x \in E$ に対して成立することがわかる。$S_1 = \{v \in E : \|v\| = 1\}$ とする。また, Banach 空間 E のノルムが Gâteaux 微分可能 (E がなめらか) であるとは任意の $x, y \in S_1$ に対して

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \tag{1}$$

が存在するときにいう。E がなめらかであるとき, 双対写像 $J : E \to E^*$ は一価になり, 連続である。ただし, E の位相はノルム位相であり, E^* の位相は 弱* 位相である。

C は回帰的で狭義凸でなめらかな Banach 空間の閉凸部分集合とする。すると, 任意の $x \in E$ に対して,

$$\|x - x_0\| = \min_{y \in C} \|x - y\|$$

をみたす C の元 x_0 が唯一存在する。このとき, $P_C x = x_0$ で定義される写像 P_C は E から C の上への距離射影という。x は E の元で u は C の元とする。このとき, $u = P_C x$ であることの必要十分条件は

$$\langle u - y, J(x - u) \rangle \geq 0 \tag{2}$$

が任意の $y \in C$ に対して成立することである ([29] 参照)。

以後, S は commutative semigroup とし, $B(S)$ は S 上の有界実数値関数全体からなる Banach 空間とし, そのノルムは supremum-norm とする。また, X は $B(S)$ の部分空間を表す。以後, 任意の $s \in S$ と $f \in B(S)$ に対して, $\ell_s f \in B(S)$ を

$$(\ell_s f)(t) = f(s + t), \qquad t \in S$$

で定義する。また ℓ_s^* で ℓ_s の共役作用素を表す。$\mu \in X^*$ に対して, $\mu(f)$ は μ の $f \in X$ での値を表すが, $\mu(f)$ を $\mu_t(f(t))$ や $\int f(t) d\mu(t)$ で表すこともある。X が 1 を含むとき, X 上の線形汎関数 μ は $\|\mu\| = \mu(1) = 1$ をみたすならば X 上の mean という。さらに X は ℓ_s-invariant であるとする, つまり $\ell_s(X) \subset X$ がすべての $s \in S$ に対して成り立つとする。このとき, 任意の $s \in S$ と $f \in X$ に対して $\mu(\ell_s f) = \mu(f)$ が成立するならば, X 上の mean μ は invariant という。$s \in S$ に対して, point evaluation δ_s を $\delta_s(f) = f(s)$ をすべての $f \in B(S)$ に対して成立させるものと定義する。point evaluations の凸結合を S 上の finite mean という。S 上の finite mean は $B(S)$ の部分空間で 1 を含む任意の部分空間 X 上の mean でもある。

C を Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とする。f を S から E への関数とし, $\{f(x) : t \in S\}$ の弱閉包が弱コンパクトであることを仮定する。X を $B(S)$ の部分空間で $1 \in X$ で任意の $s \in S$ に対して ℓ_s-invariant であり, また任意の $x^* \in E^*$ に対して, $t \mapsto \langle f(t), x^* \rangle$ は X の元とする。このとき, X 上の任意の mean μ に対して $\langle f_\mu, y \rangle = \mu_s \langle f(s), y \rangle$ が任意の $y \in E^*$ に対して成立する $f_\mu \in C$ を考えられる ([25, 10])。

C を Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とする。C から C への写像の族 $\mathcal{S} = \{T(s) : s \in S\}$ が次の (i),(ii) をみたすとき, $\mathcal{S} = \{T(s) : s \in S\}$ は C 上の nonexpansive semigroup であるという。

(i) $T(s+t) = T(s)T(t)$ が任意の $t, s \in S$ に対して成立する;

(ii) $\|T(s)x - T(s)y\| \leq \|x - y\|$ が任意の $x, y \in C$ と $s \in S$ に対して成立する。

また, $F(\mathcal{S})$ は $\{T(s) : s \in S\}$ の共通不動点, すなわち $F(\mathcal{S}) = \bigcap_{s \in S} F(T(s))$ を表す。

C を Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とする。$\mathcal{S} = \{T(t) : t \in S\}$ を C 上の nonexpansive semigroup で $F(\mathcal{S})$ が空でないとする。さらに任意の $x \in C$ に対して $\{T(t)x : t \in S\}$ の弱閉包が弱コンパクトであることを仮定する。X を $B(S)$ の部分空間で $1 \in X$ で任意の $s \in S$ に対して ℓ_s-invariant であり, また任意の $x \in C$ と $x^* \in E^*$ に対して, $t \mapsto \langle T(t)x, x^* \rangle$ は X の元とする。x を C の元とする。このとき, X 上の任意の mean μ に対して $\langle T_\mu x, y \rangle = \mu_s \langle T(s)x, y \rangle$ が任意の $y \in E^*$ に対して成立する $T_\mu : C \to C$ を考えられる ([25, 10])。また, T_μ は C から C への nonexpansive mapping になることや $x \in F(\mathcal{S})$ に対して $T_\mu x = x$ が成立することも知られている。

3. Hybrid method を用いた不動点近似

この節では, 不動点をみつけるための点列近似法として, hybrid method を用いての収束定理について記す。E を実 Banach 空間とし, C を E の空でない閉凸部分集合とする。T を Banach 空間の空でない閉凸部分集合 C から C への非拡大写像とする。Nakajo-Takahashi [17] は数理計画法の hybrid method の考えを基にして, Hilbert 空間において以下の点列を導入し, Hilbert 空間における非拡大写像の不動点への強収束定理を証明した。

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x \in C, \\
y_n &= \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T x_n, \\
C_n &= \{z \in C : \|y_n - z\| \leq \|x_n - z\|\}, \\
Q_n &= \{z \in C : \langle x_n - z, x_1 - x_n \rangle \geq 0\}, \\
x_{n+1} &= P_{C_n \cap Q_n}(x_1), \quad (n \in \mathbb{N}).
\end{aligned}
$$

ここで $0 \leq \alpha_n \leq 1$ であり, $P_{C_n \cap Q_n}$ は Hilbert 空間 H から $C_n \cap Q_n$ への距離射影である。この定理は Hilbert 空間における強収束定理であるが, hybrid method を用いての Banach 空間における強収束定理としては, Matsushita-Takahashi [14, 15] が擬非拡大写像に対する強収束定理を擬射影を用いて示している (擬射影に関しては [1] 参照)。一方, Nakajo-Takahashi [17] をうけて, Xu [30] は以下のような別の hybrid method を導入し, Banach 空間において擬射影を用いて強収束定理を証明した:

$$
\begin{aligned}
&x_1 = x \in C, \\
&C_n = \overline{\mathrm{co}}\{z \in C : \|z - Tz\| \leq t_n \|x_n - Tx_n\|\}, \\
&Q_n = \{z \in C : \langle x_n - z, Jx - Jx_n \rangle \geq 0\}, \\
&x_{n+1} = \Pi_{C_n \cap Q_n}(x_1), \quad (n \in \mathbb{N}).
\end{aligned}
$$

ここで, $0 < t_n < 1$ であり, $\Pi_{C_n \cap Q_n}$ は E から $C_n \cap Q_n$ の上への擬射影である。Nakajo-Takahashi [17] や Xu [30] をうけて, Matsushita-Takahashi [16] は以下の点列を導入し, 距離射影を用いて一様凸で滑らかな Banach 空間における非拡大写像の不動点への強収束定理を証明した:

$$
\begin{aligned}
&x_1 = x \in C, \\
&C_n = \overline{\mathrm{co}}\{z \in C : \|z - Tz\| \leq t_n \|x_n - Tx_n\|\}, \\
&Q_n = \{z \in C : \langle x_n - z, J(x - x_n) \rangle \geq 0\}, \\
&x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n}(x_1), \quad (n \in \mathbb{N}).
\end{aligned}
$$

ここで, $0 < t_n < 1$ であり, $P_{C_n \cap Q_n}$ は E から $C_n \cap Q_n$ の上への距離射影である。次節では Matsushita-Takahashi [16] の考えを受けて, 距離射影を用いて非拡大半群の共通不動点への強収束定理を示す。

4. 非拡大半群に対する強収束定理

この節では, hybrid method を用いて, 非拡大半群の共通不動点への強収束定理を示す。主結果を述べる前に, 補題を記す ([6] 参照) 。

Lemma 4.1 ([6]). C は回帰的で狭義凸で滑らかな Banach 空間 E の空でない閉凸集合とする。S は可換半群とし, $\mathcal{S} = \{T(t) : t \in S\}$ は $F(\mathcal{S}) \neq \emptyset$ をみたす C 上の非拡大半群とする。X は $B(S)$ の部分空間で $1 \in X$ で任意の $s \in S$ に対して ℓ_s-invariant であり, また 任意の $x \in C$ と $x^* \in E^*$ に対して, $t \mapsto \langle T(t)x, x^* \rangle$ が X の元になるものとする。$\{\mu_n\}$ は任意の $s \in S$ に対して $\lim_{n\to\infty} \|\mu_n - \ell_s^* \mu_n\| = 0$ をみたす X 上の means の

点列とする。また, $\{T_{\mu_n}\}$ は任意の $x \in C$ と $x^* \in E^*$ に対して

$$\langle T_{\mu_n}x, x^*\rangle = (\mu_n)_t\langle T(t)x, x^*\rangle$$

をみたす C 上の非拡大写像の列とする。$\{x_n\}$ を以下のように定義される点列とする:

$$\begin{aligned} &x_1 = x \in C, \\ &C_n = \overline{\mathrm{co}}\{z \in C : \|z - T_{\mu_n}z\| \leq t_n\|x_n - T_{\mu_n}x_n\|\}, \\ &D_n = \{z \in C : \langle x_n - z, J(x - x_n)\rangle \geq 0\}, \\ &:x_{n+1} = P_{C_n \cap D_n}(x_1) \quad (n \in \mathbb{N}). \end{aligned} \tag{3}$$

ここで $P_{C_n \cap Q_n}$ は E から $C_n \cap Q_n$ の上への距離射影であり, $\{t_n\}$ は $0 < t_n < 1$ をみたし, $t_n \to 0$ をみたす実数列とする。すると $\{x_n\}$ は well-defined である。

次の補題は Bruck [8] によって示されたもので, 主定理の証明には重要な役割を担っている。

Lemma 4.2 ([8]). C は一様凸な Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とする。すると, 任意の正の実数 r に対して, 狭義単調増加で凸連続関 $\gamma : [0, \infty) \to [0, \infty)$ で $\gamma(0) = 0$ をみたし,

$$\gamma\left(\left\|T\left(\sum_{j=0}^{n}\lambda_j x_j\right) - \sum_{j=0}^{n}\lambda_j Tx_j\right\|\right) \leq \max_{0\leq j\leq k\leq n}\left(\|x_j - x_k\| - \|Tx_j - Tx_k\|\right)$$

を任意の $n \in \mathbb{N}$, $\{\lambda_i\}_{i=0}^n \in \Delta_n$, $\{x_i\}_{i=0}^n \subset C \cap B_r$, $T \in Lip(C,1)$ に対してみたすものが存在する。ここで, $\Delta_n = \{\{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\} : 0 \leq \lambda_i (0 \leq i \leq n), \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1\}$ であり, また $B_r = \{z \in E : \|z\| \leq r\}$ であり, $Lip(C,1)$ は C から E の全ての非拡大写像の集合とする。

次の補題は [21, 2] に示されている ([10] も参照).

Lemma 4.3. C は一様凸な Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とする。S は可換半群とし, $\mathcal{S} = \{T(t) : t \in S\}$ は $F(\mathcal{S}) \neq \emptyset$ をみたす C 上の非拡大半群とする。X は $B(S)$ の部分空間で $1 \in X$ で任意の $s \in S$ に対して ℓ_s-invariant であり, また 任意の $x \in C$ と $x^* \in E^*$ に対して, $t \mapsto \langle T(t)x, x^*\rangle$ が X の元となるものとする。$\{\mu_n\}$ は任意の $s \in S$ に対して $\lim_{n\to\infty}\|\mu_n - \ell_s^*\mu_n\| = 0$ をみたす X 上の means の点列とする。また, $\{T_{\mu_n}\}$ は任意の $x \in C$ と $x^* \in E^*$ に対して

$$\langle T_{\mu_n}x, x^*\rangle = (\mu_n)_t\langle T(t)x, x^*\rangle$$

をみたす C 上の非拡大写像の列とする。すると, 任意の正の実数 r, C の元 w, $t \in S$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in D_r} \|T_{\mu_n}y - T(t)T_{\mu_n}y\| = 0,$$

が成立する。ここで, $D_r = \{z \in C : \|z - w\| \le r\}$ である。

Lemma 4.1 をまず示し, Lemmas 4.2, 4.3 などを用いて次の強収束定理を示せる ([6] 参照)。

Theorem 4.4 ([6]). C の一様凸で滑らかな Banach 空間 E の有界閉凸部分集合とする。S は可換半群とし, $\mathcal{S} = \{T(t) : t \in S\}$ は C 上の非拡大半群とする。X は $B(S)$ の部分空間で $1 \in X$ で任意の $s \in S$ に対して ℓ_s-invariant であり, また 任意の $x \in C$ と $x^* \in E^*$ に対して, $t \mapsto \langle T(t)x, x^*\rangle$ が X の元になるものとする。$\{\mu_n\}$ は任意の $s \in S$ に対して $\lim_{n\to\infty} \|\mu_n - \ell_s^*\mu_n\| = 0$ をみたす X 上の means の点列とする。また, $\{T_{\mu_n}\}$ は任意の $x \in C$ と $x^* \in E^*$ に対して

$$\langle T_{\mu_n}x, x^*\rangle = (\mu_n)_t\langle T(t)x, x^*\rangle$$

をみたす C 上の非拡大写像の列とする。$\{x_n\}$ を以下のように定義される点列とする:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \in C, \\ C_n &= \overline{\mathrm{co}}\{z \in C : \|z - T_{\mu_n}z\| \le t_n\|x_n - T_{\mu_n}x_n\|\}, \\ D_n &= \{z \in C : \langle x_n - z, J(x - x_n)\rangle \ge 0\}, \\ x_{n+1} &= P_{C_n\cap D_n}(x_1) \quad (n \in \mathbb{N}). \end{aligned} \tag{4}$$

ここで $P_{C_n\cap Q_n}$ は E から $C_n \cap Q_n$ の上への距離射影であり, $\{t_n\}$ は $0 < t_n < 1$ をみたし, $t_n \to 0$ をみたす実数列とする。すると $\{x_n\}$ は $P_{F(\mathcal{S})}x$ に強収束する。ここで $P_{F(\mathcal{S})}$ は E から $F(\mathcal{S})$ の上への距離射影である。

5. 応用

この節では主定理 Theorem 4.4 から直接得られる強収束定理を記す ([29] 参照)。以後, E は一様凸で滑らかな Banach 空間で C は E の有界閉凸部分集合とする。

Theorem 5.1. T は C から C への非拡大写像とし, x は C の元とする。$\{x_n\}$ は次のように定義される点列とする。

$$
\begin{aligned}
&x_1 = x \in C,\\
&C_n = \overline{\mathrm{co}}\left\{z \in C : \left\|z - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T^i z\right\| \le t_n \left\|x_n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T^i x_n\right\|\right\},\\
&D_n = \{z \in C : \langle x_n - z, J(x - x_n)\rangle \ge 0\},\\
&x_{n+1} = P_{C_n \cap D_n}(x_1) \quad (n \in \mathbb{N}).
\end{aligned} \tag{5}
$$

ここで $P_{C_n \cap Q_n}$ は E から $C_n \cap Q_n$ の上への距離射影であり, $\{t_n\}$ は $0 < t_n < 1$ をみたし, $t_n \to 0$ をみたす実数列とする。すると $\{x_n\}$ は $P_{F(T)}x$ に強収束する。ここで $P_{F(T)}$ は E から $F(T)$ の上への距離射影である。

Theorem 5.2. T は C から C への非拡大写像とし, x は C の元とする。$\{q_{n,m} : n, m \in \mathbb{N}\}$ は $q_{n,m} \ge 0$, $\sum_{m=0}^{\infty} q_{n,m} = 1$ を任意の $n \in \mathbb{N}$ に対してみたし, $\lim_n \sum_{m=0}^{\infty} |q_{n,m+1} - q_{n,m}| = 0$ もみたす実数列とする。$\{x_n\}$ は次のように定義される点列とする。

$$
\begin{aligned}
&x_1 = x \in C,\\
&C_n = \overline{\mathrm{co}}\left\{z \in C : \left\|z - \sum_{m=0}^{\infty} q_{n,m} T^m z\right\| \le t_n \left\|x_n - \sum_{m=0}^{\infty} q_{n,m} T^m x_n\right\|\right\},\\
&D_n = \{z \in C : \langle x_n - z, J(x - x_n)\rangle \ge 0\},\\
&x_{n+1} = P_{C_n \cap D_n}(x_1) \quad (n \in \mathbb{N}).
\end{aligned} \tag{6}
$$

ここで $P_{C_n \cap Q_n}$ は E から $C_n \cap Q_n$ の上への距離射影であり, $\{t_n\}$ は $0 < t_n < 1$ をみたし, $t_n \to 0$ をみたす実数列とする。すると $\{x_n\}$ は $P_{F(T)}x$ に強収束する。ここで $P_{F(T)}$ は E から $F(T)$ の上への距離射影である。

Theorem 5.3. U,T は C から C への非拡大写像で $UT = TU$ であり, x は C の元とする。$\{x_n\}$ は次のように定義される点列とする。

$$
\begin{aligned}
&x_1 = x \in C,\\
&C_n = \overline{\mathrm{co}}\left\{z \in C : \left\|z - \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{i,j=0}^{n} T^i U^j z\right\| \le t_n \left\|x_n - \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{i,j=0}^{n} T^i U^j x_n\right\|\right\},\\
&D_n = \{z \in C : \langle x_n - z, J(x - x_n)\rangle \ge 0\},\\
&x_{n+1} = P_{C_n \cap D_n}(x_1) \quad (n \in \mathbb{N}).
\end{aligned} \tag{7}
$$

ここで $P_{C_n \cap Q_n}$ は E から $C_n \cap Q_n$ の上への距離射影であり, $\{t_n\}$ は $0 < t_n < 1$ をみたし, $t_n \to 0$ をみたす実数列とする。すると $\{x_n\}$ は $P_{F(T)\cap F(U)}x$ に強収束する。ここで $P_{F(T)\cap F(U)}$ は E から $F(T) \cap F(U)$ の上への距離射影である。

C を E の空でない閉凸部分集合とし, $\mathcal{S} = \{T(t) : t \in [0, \infty)\}$ を C から C への写像の族とする。このとき, $\mathcal{S}$ がつぎの条件をみたすならば C 上の one-parameter nonexpansive semigroup という:

(1) 任意の $t \in [0, \infty)$ に対して $T(t)$ は非拡大である;
(2) $T(0) = I$;
(3) $T(t+s) = T(t)T(s)$ が任意の $t, s \in [0, \infty)$ に対して成立する;
(4) 任意の $x \in C$ に対して $t \mapsto T(t)x$ は連続である。

Theorem 5.4. $\mathcal{S} = \{T(t) : t \in [0, \infty)\}$ は C 上の one-parameter nonexpansive semigroup で関数 $t \mapsto \langle T(t)x, x^* \rangle$ および $t \mapsto \|T(t)x - y\|$ は任意の $x, y \in C$ と $x^* \in E^*$ に対して可測であるとする。x は C の元とし, $\{s_n\}$ は $s_n \to \infty$ をみたす正の実数列とする。$\{x_n\}$ は次のように定義される点列とする。

$$\begin{aligned}
&x_1 = x \in C,\\
&C_n = \overline{\mathrm{co}} \left\{ z \in C : \left\| z - \frac{1}{s_n} \int_0^{s_n} T(t)z\,dt \right\| \le t_n \left\| x_n - \frac{1}{s_n} \int_0^{s_n} T(t)x_n\,dt \right\| \right\},\\
&D_n = \{z \in C : \langle x_n - z, J(x - x_n) \rangle \ge 0\},\\
&x_{n+1} = P_{C_n \cap D_n}(x_1) \quad (n \in \mathbb{N}).
\end{aligned} \tag{8}$$

ここで $P_{C_n \cap Q_n}$ は E から $C_n \cap Q_n$ の上への距離射影であり, $\{t_n\}$ は $0 < t_n < 1$ をみたし, $t_n \to 0$ をみたす実数列とする。すると $\{x_n\}$ は $P_{F(\mathcal{S})}x$ に強収束する。ここで $P_{F(\mathcal{S})}$ は E から $F(\mathcal{S})$ の上への距離射影である。

Theorem 5.5. $\mathcal{S} = \{T(t) : t \in [0, \infty)\}$ は Theorem 5.4 と同様であり, x は C の元とする。$\{r_n\}$ は $r_n \to 0$ をみたす正の実数列とする。$\{x_n\}$ は次のように定義される点列とする。

$$\begin{aligned}
&x_1 = x \in C,\\
&C_n = \overline{\mathrm{co}} \left\{ z \in C : \left\| z - r_n \int_0^{\infty} e^{-r_n t} T(t)z\,dt \right\| \le t_n \left\| x_n - r_n \int_0^{\infty} e^{-r_n t} T(t)x_n\,dt \right\| \right\},\\
&D_n = \{z \in C : \langle x_n - z, J(x - x_n) \rangle \ge 0\},\\
&x_{n+1} = P_{C_n \cap D_n}(x_1) \quad (n \in \mathbb{N}).
\end{aligned} \tag{9}$$

ここで $P_{C_n \cap Q_n}$ は E から $C_n \cap Q_n$ の上への距離射影であり, $\{t_n\}$ は $0 < t_n < 1$ をみたし, $t_n \to 0$ をみたす実数列とする。すると $\{x_n\}$ は $P_{F(S)}x$ に強収束する。ここで $P_{F(S)}$ は E から $F(S)$ の上への距離射影である。

References

[1] Y.I.Alber., *Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications*, in Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type, A.G.Kartsatos, Ed., Vol. 178 of Lecture Notes in Pure and Appl. Math., pp. 15-50, Dekker, New York, 1996.

[2] S. Atsushiba, N. Shioji and W. Takahashi, *Approximating common fixed points by the Mann iteration procedure in Banach spaces,* J. Nonlinear Convex Anal. **1** (2000), 351–361.

[3] S. Atsushiba and W. Takahashi, *Approximating common fixed points of nonexpansive semigroups by the Mann iteration process*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska **51** (1997), 1–16.

[4] S. Atsushiba and W. Takahashi, *Approximating common fixed points of two nonexpansive mappings in Banach Spaces*, Bull. Austral. Math. Soc. **57** (1998), 117-127.

[5] S. Atsushiba and W. Takahashi, *A weak convergence theorem for nonexpansive semigroups by the Mann iteration process in Banach spaces,* in Nonlinear Analysis and Convex Analysis (W. Takahashi and T. Tanaka Eds.), pp. 102–109, World Scientific, Singapore, 1999.

[6] S. Atsushiba and W. Takahashi, *Approximating common fixed points of nonexpansive semigroups in Banach Spaces by metric projections*, Sci. Math. Jpn., to appear.

[7] F. E. Browder, *Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **54** (1965), 1041–1044.

[8] R. E. Bruck, *On the convex approximation property and the asymptotic behavior of nonlinear contractions in Banach spaces*, Israel J. Math. **38** (1981), 304-314.

[9] R. De Marr, *Common fixed pointsfor commuting contraction mappings*, Pacific J. Math. **13** (1963), 1139-1141.

[10] N. Hirano, K. Kido and W. Takahashi, *Nonexpansive retractions and nonlinear ergodic theorems in Banach spaces*, Nonlinear Anal. **12** (1988), 1269-1281.

[11] K. Kido and W. Takahashi, *Mean ergodic theorems for semigroups of linear continuous operators in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **103** (1984), 387–394.

[12] K. Kido and W. Takahashi, *Means on commutative semigroups and nonlinear ergodic theorems*, J. Math. Anal. Appl. **111** (1985), 585–605.

[13] W. R. Mann, *Mean value methods in iteration*, Proc. Amer. Math.Soc. **4** (1953), 506–510.

[14] S. Matsushita and W.Takahashi, An iterative algorithm for relatively nonexpansive mappings by a hybrid method and applications, Nonlinear analysis and convex analysis, 305–313, Yokohama Publ., Yokohama, 2004.

[15] S. Matsushita and W.Takahashi, *A strong convergence theorem for relatively nonexpansive mappings in a Banach space*, J. Approx. Theory 134 (2005),257–266.

[16] S. Matsushita and W.Takahashi, *Approximating fixed points of nonexpansive mappings in a Banach space by metric projections*, Appl. Math. Comput. **196** (2008), 422-245.

[17] K. Nakajo and W.Takahashi, *Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and nonexpansive semigroups*, J. Math. Anal. Appl. **279** (2003), 372-379.

[18] S. Reich, *Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **67** (1979), 274–276.

[19] G. Rodé, *An ergodic theorem for semigroups of nonexpansive mappings in a Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl. **85** (1982), 172–178.

[20] T. Shimizu and W. Takahashi, *Strong convergence to common fixed points of families of nonexpansive mappings,* J. Math. Anal. Appl. **211** (1997), 71-83.

[21] N. Shioji and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for asymptotically nonexpansive semigroups in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **1** (2000), 73–87.

[22] T. Suzuki, *Strong convergence theorem to common fixed points of two nonexpansive mappings in general Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **3** (2002), 381–391.

[23] T. Suzuki and W. Takahashi, *Strong convergence of Mann's type sequences for one-parameter nonexpansive semigroups in general Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **5** (2004), 209–216.

[24] W. Takahashi, *Fixed point theorem for amenable semigroups of nonexpansive mappings,* Kodai Math. Sem. Rep. **21** (1969), 383-386.

[25] W. Takahashi, *A nonlinear ergodic theorem for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space,* Proc. Amer. Math. Soc. **81** (1981), 253-256.

[26] W. Takahashi, *A nonlinear ergodic theorem for a reversible semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space,* Proc. Amer. Math. Soc. **96** (1986), 55-58.

[27] W. Takahashi, *Fixed point theorem and nonlinear ergodic theorem for nonexpansive semigroups without convexity,* Canad. J. Math. **44** (1992), 880-887.

[28] W. Takahashi, *Fixed point theorems and nonlinear ergodic theorems for nonlinear semigroups and their applications,* Nonlinear Anal. **30** (1997), 1287-1293.

[29] W. Takahashi, Nonlinear Functional Analysis, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[30] H.K. Xu, *Strong convergence of approximating fixed point sequences for nonexpansive mappings,* Bull. Austral. Math. Soc. **74** (2006), 143–151.

(S. Atsushiba) DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND PHYSICS, INTERDISCIPLINARY SCIENCES COURSE, FACULTY OF EDUCATION AND HUMAN SCIENCES, UNIVERSITY OF YAMANASHI, 4-4-37 TAKEDA KOFU-SHI, YAMANASHI 400-8510, JAPAN

E-mail address: `asachiko@yamanashi.ac.jp`