数理解析研究所講究録
第 1615 巻 2008 年 67-70

L^2 関数で定まる Lorentz-Zygmund 数列空間

本田あおい　　岡崎悦明　　佐藤坦
九州工業大学・情報工学部　　九州大学・名誉教授

1 はじめに

$1 \leq p < +\infty, f \in L^p(\mathbb{R}, dx), f \neq 0$ とし

$$\Lambda_p(f) := \left\{ (a_n) \in \mathbb{R}^\infty \;\middle|\; \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-a_n) - f(x)|^p dx < +\infty \right\}$$

と定義する．さらに f が絶対連続関数の場合には

$$I_p(f) = \int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|^p dx$$

とおく．2007 年研究集会 [1] で筆者たちは

1. $\Lambda_p(f) \subset \ell_p$,
2. $I_p(f) < +\infty$ のとき, $\ell_p \subset \Lambda_p(f)$,
3. $1 < p < +\infty$ とする．このとき $\ell_p \subset \Lambda_p(f)$ ならば, $I_p(f) < +\infty$
4. 特に $f_0(x) := \sqrt{x} e^{-x} \mathbf{I}_{[0,+\infty)}(x)$ とするとき,

$$\Lambda_2(f_0) = \left\{ (a_n) \;\middle|\; \sum |a_n|^2 \left(1 + \log \frac{1}{|a_n|}\right) < +\infty \right\}$$

を示すことによって，実際に $\Lambda_2(f) \neq \ell_2$ となる場合のあることを示した．また

$$\begin{aligned} \Psi_p(\boldsymbol{a} : f) &:= \left(\sum_n \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-a_n) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \\ d_p(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) &:= \Psi_p(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} : f) \end{aligned}$$

と定義すると，位相と線形構造に関して

5. $(\Lambda_p(f), d_p(\cdot,\cdot))$ は完備可分距離空間である．さらに $d_p(\cdot,\cdot)$ は加法に関して平行移動不変な距離であり, $(\Lambda_p(f), d_p(\cdot,\cdot))$ は位相群となる．
6. f が単峰関数なら, $\Lambda_p(f)$ は線形空間で $d_p(\cdot,\cdot)$ は線形位相を定める．

しかし $\Lambda_p(f)$ が線形空間になるかどうかは一般には分っていない．

---

[0]2000 Mathematics Subject Classification. Primary 26D10, 46A45; Secondary 60G30.
Keywords and phrases. ℓ_p, L^2, Lorentz-Zygmund sequence space.

他方 $f \in L^2(\mathbb{R}, dx)$ のフーリエ変換を

$$\hat{f}(\alpha) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} f(x) dx$$

とすると $(a_n) \in \Lambda_2(f)$ は

$$\sum_n \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-a_n) - f(x)|^2 dx = 2 \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos(a_n \alpha)) \left| \hat{f}(\alpha) \right|^2 d\alpha < +\infty$$

と同等である.

本稿の目的は $p=2$ の場合にフーリエ解析を適用することによって $\Lambda_2(f)$ の新しい例を構成し，次にそれらの例が Rudnick[5] により定義された Lorentz-Zygmund 数列空間のあるものと位相を含めて同一視できることを報告することにある．この事実は Lorentz-Zygmund 数列空間の解析に新しい方法を提案するものではないかと期待される.

2 Lorentz-Zygmund 数列空間

まず Rudnick[5] による Lorentz-Zygmund 数列空間の定義を紹介しよう.

$0 < p, a \le +\infty$, $-\infty < s < +\infty$ に対して

$$\ell_{p,a}(\log \ell)^s := \left\{ (a_n) \;\middle|\; \|(a_n)\|_{p,a;s} := \left[\sum \left(n^{\frac{1}{p}} |a_n^*| (1+\log n)^s \right)^a n^{-1} \right]^{\frac{1}{a}} < +\infty \right\}$$

と定義する． ただし, (a_n^*) は (a_n) の non-increasing rearrangement, すなわち $(|a_n|)$ を $|a_n|$ の降順に並べ替えたものである. 特に

$$\ell_p(\log \ell)^s := \ell_{p,p}(\log \ell)^s = \left\{ (a_n) \;\middle|\; \sum |a_n^*|^p (1+\log n)^s < +\infty \right\}$$

と表すことにし，さらに $s=1$ の場合に ℓ_{p-} と書く.

このとき $\|(a_n)\|_{p,a;s}$ は準ノルムになる. 特に $1 < p \le +\infty$, $1 \le a \le +\infty$, $-\infty < s < +\infty$ であれば，この準ノルムと同値なバナッハノルムの存在することが知られている [3, 4].

補題 1. $\{a_n\}$ を単調非増加な正数列とする．このとき $s > 0$ に対して

$$\sum_n a_n (1 + |\log a_n|)^s < +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_n a_n (\log n)^s < +\infty.$$

上記補題を用いて次の定理が得られる.

定理 2. $p > 0, s > 0$ に対して,

$$\ell_p(\log \ell)^s = \left\{ (a_n) \;\middle|\; \sum |a_n|^p \left(1 + \log \frac{1}{|a_n|} \right)^s < +\infty \right\}$$

3 $\Lambda_2(f)$ と Lorentz-Zygmund 数列空間

定理 3. $\theta > 1$ とするとき定数 $m, M, R > 0$ が存在して,

$$0 < m \le |\alpha|^{\theta}|\hat{f}(\alpha)|^2 \le M < +\infty, \text{ for } |\alpha| \ge R$$

とする. このとき

$$\Lambda_2(f) = \begin{cases} \ell_{\theta-1}, & 1 < \theta < 3, \\ \ell_{2-}, & \theta = 3, \\ \ell_2, & 3 < \theta \end{cases}$$

が成り立つ.

例 4. $f(x) := x^s e^{-x}\mathbf{I}_{[0,\infty)}(x), s > -1$ とする. このとき

$$|\hat{f}(\alpha)|^2 = \Gamma(s+1)^2 \frac{1}{(1+\alpha^2)^{s+1}}$$

となり ([4]), 定理 3 より

$$\Lambda_2(f) = \begin{cases} \ell_{2s+1}, & -\frac{1}{2} < s < \frac{1}{2}, \\ \ell_{2-}, & s = \frac{1}{2}, \\ \ell_2, & s > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

定理 5. $s > 0$ とするとき 定数 $m, M, R > 0$ が存在して,

$$\frac{m\,(\log|\alpha|)^{s-1}}{|\alpha|^3} \le |\hat{f}(\alpha)|^2 \le \frac{M\,(\log|\alpha|)^{s-1}}{|\alpha|^3}, \quad |\alpha| \ge R$$

が成り立つとする. このとき $\Lambda_2(f) = \ell_2\,(\log \ell)^s$ となる. 位相も同相である.

4 $\Lambda_2(f)$ の位相

Lorentz-Zygmund 空間は準ノルム $\|(a_n)\|_{p,p;s}$ により, 準バナッハ空間となることが知られている. しかしながら $\|(a_n)\|_{p,p;s}$ は non-increasing rearrangement を使って定義されたものであり, 評価しやすいとは言えない. 一方, $\Lambda_2(f)$ は距離 $d_2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \Psi_2(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} : f)$ について完備可分距離空間となる. 次の命題 6 により, 定理 3 の条件を満たす $f \in L^2(\mathbb{R}, dx)$ を使って $\ell_p (p > 0)$ あるいは ℓ_{2-} に位相同値な完備な, ノルムまたは準ノルムを導入できる.

命題 6. $f \in L^2(\mathbb{R}, dx)$ について $\Lambda_2(f) = \ell_p\ (p > 0)$ または ℓ_{2-} とする. このとき $\Lambda_2(f)$ の距離による位相はそれぞれ ℓ_p または ℓ_{p-} の位相と同相である.

5 $\Lambda_2(f)$ の線形性

$\Lambda_2(f)$ はいつも線形空間になるだろうか, あるいは線形空間になるための条件は何であろうか. 例えば, f が単峰な関数ならば $\Lambda_2(f)$ は線形空間になることがわかっている. ここでは $\Lambda_2(f)$ が線形空間となる別の条件を与える.

定理 7. $\hat{f}$ が Δ_2 条件を満たすとき, $\Lambda_2(f)$ は線形空間になる. ただし Δ_2 条件とは, ある $R, K > 0$ が存在して, 任意の $|\alpha| > R$ に対して $|\hat{f}(2\alpha)| \le K|\hat{f}(\alpha)|$ が成り立つことである,

例 8. $f \in L^2(I\!R, dx)$ に対して, ある $R > 0$ が存在して $|\alpha| > R$ に対して $|\hat{f}(\alpha)|$ が単調ならば $\Lambda_2(f)$ は線形空間となる.

参考文献

[1] 本田あおい, 岡崎悦明, 佐藤坦, Linear and topological properties of a sequence space defined by an L_p-function, 数理解析研究所講究録 1570 バナッハ空間, 関数空間および不等式の研究と応用, pp. 8-13, 2007 年 10 月.

[2] A. Honda, Y. Okazaki and H. Sato, An L_p-function determines ℓ_p, Proc. Japan Acad., **84**, Ser. A, No. 3, pp.39-41, 2008.

[3] R. A. Hunt, On $L(p,q)$ spaces, L'Eenseignement Mathematiques, XII, pp. 249-276, 1966.

[4] 森口繁一, 一松信, 宇田川銈久, 数学公式 II, 岩波書店, 1987.

[5] K. Rudnick, Lorentz-Zygmund spaces and interpolation of weak type operators, Thesis, 1976.