数理解析研究所講究録
第 1615 巻 2008 年 80-87

一般化された skew information に関連した不確定性関係

Uncertainty relations related to generalized skew information

山口大学大学院・理工学研究科 柳　研二郎 (Kenjiro Yanagi)*
Graduate School of Science and Engineering, Yamaguchi University
日本大学・文理学部　古市　茂 (Shigeru Furuichi)†
College of Humanities and Sciences, Nihon University
山口大学大学院・理工学研究科　栗山　憲 (Ken Kuriyama)‡
Graduate School of Science and Engineering, Yamaguchi University

Key Words: skew information, uncertainty relation

MSC(2000): 81Q10, 81S05, 94A15

量子状態 ρ (密度作用素: $\rho^* = \rho \geq 0, Tr[\rho] = 1$) と観測量 H (自己共役作用素: $H^* = H$) との間のある種の非可換性の度合いを表す情報量として次の Wigner-Yanase skew information が知られている:

$$I_\rho(H) \equiv \frac{1}{2}Tr\left[(i[\rho^{1/2}, H])^2\right]. \tag{1}$$

ここで $[X, Y] \equiv XY - YX$ である. また Dyson による一般化

$$I_{\rho,\alpha}(H) \equiv \frac{1}{2}Tr\left[(i[\rho^\alpha, H])(i[\rho^{1-\alpha}, H])\right], \quad \alpha \in [0,1] \tag{2}$$

*This research was partially supported by the Ministry of Education, Science, Sports and Culture, Grant-in-Aid for Scientific Research (B), 18300003 and (C), 20540175
†This research was partially supported by the Ministry of Education, Science, Sports and Culture, Grant-in-Aid for Scientific Research (B), 18300003 and for Encouragement of Young Scientists (B), 20740067
‡This research was partially supported by the Ministry of Education, Science, Sports and Culture, Grant-in-Aid for Scientific Research (C), 20540176

が Wigner-Yanase-Dyson skew information として知られている．近年この種の skew information と不確定性関係に関する研究が盛んになされている [2, 3, 4]．量子状態 ρ と観測量 X, Y に対する Heisenberg の不確定性関係は

$$V_\rho(X)V_\rho(Y) \geq \frac{1}{4}\left|Tr\left[\rho[X,Y]\right]\right|^2 \tag{3}$$

である．ここで分散は $V_\rho(H) \equiv Tr\left[\rho(H - Tr[\rho H]I)^2\right]$ で定義される．これよりも強い結果として Schrodinger の不確定性関係

$$V_\rho(X)V_\rho(Y) - |Cov_\rho(X,Y)|^2 \geq \frac{1}{4}\left|Tr\left[\rho[X,Y]\right]\right|^2$$

が知られている．ただし $Cov_\rho(X,Y) \equiv Tr\left[\rho(X - Tr[\rho X]I)(Y - Tr[\rho Y]I)\right]$ である．下記の不等式 (6) の意味で不等式 (3) より強い結果として

$$I_\rho(X)I_\rho(Y) \geq \frac{1}{4}\left|Tr\left[\rho[X,Y]\right]\right|^2$$

が考えられたがこれは不成立であった．その後 Luo [5] は古典的な混合を取り除いた量子的な不確定性を表す量

$$U_\rho(H) \equiv \sqrt{V_\rho(H)^2 - (V_\rho(H) - I_\rho(H))^2} \tag{4}$$

を導入し次の不等式を導いた:

$$U_\rho(X)U_\rho(Y) \geq \frac{1}{4}\left|Tr\left[\rho[X,Y]\right]\right|^2. \tag{5}$$

ここで以下の関係に注意する．

$$0 \leq I_\rho(H) \leq U_\rho(H) \leq V_\rho(H). \tag{6}$$

そこで (4) 式の一般化

$$U_{\rho,\alpha}(H) \equiv \sqrt{V_\rho(H)^2 - (V_\rho(H) - I_{\rho,\alpha}(H))^2} \tag{7}$$

に対して不等式 (5) に相当するものを考えるのは自然であるが (7) 式を直接用いた一般化はわかっていない．ここでは次の定義を与える．

Definition 1 量子状態 ρ と観測量 H およびパラメータ $0 \leq \alpha \leq 1$ に対して

$$I_{\rho,\alpha}(H) \equiv \frac{1}{2}Tr\left[(i[\rho^\alpha, H_0])(i[\rho^{1-\alpha}, H_0])\right]$$

と

$$J_{\rho,\alpha}(H) \equiv \frac{1}{2}Tr\left[\{\rho^\alpha, H_0\}\{\rho^{1-\alpha}, H_0\}\right]$$

を定義する．ただし $H_0 \equiv H - Tr[\rho H]I$ であり $\{X,Y\} \equiv XY + YX$ である．また煩雑さを避けるために後で

$$A_\alpha(H) \equiv i[\rho^\alpha, H_0], \quad B_\alpha(H) \equiv \{\rho^\alpha, H_0\}$$

という記号を用いる．このとき

$$I_\rho(H) \geq I_{\rho,\alpha}(H), \quad J_\rho(H) \leq J_{\rho,\alpha}(H), \tag{8}$$

$$U_{\rho,\alpha}(H) \equiv \sqrt{I_{\rho,\alpha}(H) J_{\rho,\alpha}(H)} \tag{9}$$

であり

$$0 \leq I_{\rho,\alpha}(H) \leq U_{\rho,\alpha}(H) \leq U_\rho(H) \tag{10}$$

が成り立つ．

このとき次の定理がなりたつ．

Theorem 1 量子状態 ρ と観測量 X, Y に対して

$$\tilde{U}_{\rho,\alpha}(X)\tilde{U}_{\rho,\alpha}(Y) \geq \frac{1}{4}\left|Tr\left[\left(\frac{\rho^\alpha + \rho^{1-\alpha}}{2}\right)^2 [X,Y]\right]\right|^2.$$

ただし

$$\tilde{U}_{\rho,\alpha}(X) \equiv$$
$$\frac{1}{2}\sqrt{\left(Tr\left[\frac{A_\alpha(X)^2 + A_{1-\alpha}(X)^2}{4}\right] + I_{\rho,\alpha}(X)\right)\left(Tr\left[\frac{B_\alpha(X)^2 + B_{1-\alpha}(X)^2}{4}\right] + J_{\rho,\alpha}(X)\right)}.$$

Remark 1 次の2点から上の定理は *trivial* とは言い切れない．

(1) $\left|Tr\left[(\frac{\rho^\alpha+\rho^{1-\alpha}}{2})^2[X,Y]\right]\right|^2$ と $|Tr\,[\rho[X,Y]]|^2$ には大小関係はない．

(2) $U_{\rho,\alpha}(H) \leq U_\rho(H)$ かつ $U_{\rho,\alpha}(H) \leq \tilde{U}_{\rho,\alpha}(H)$ であるが $U_\rho(H)$ と $\tilde{U}_{\rho,\alpha}(H)$ には大小関係はない．

Proof of Theorem 1. $K = \frac{1}{2}(A_\alpha(X) + A_{1-\alpha}(X))x + \frac{1}{2}(B_\alpha(Y) + B_{1-\alpha}(Y))$ とおく．このとき $K^* = K$ である．したがって

$$
\begin{aligned}
0 &\le Tr[KK^*] \\
&= \frac{1}{4}Tr[(A_\alpha(X)+A_{1-\alpha}(X))^2]x^2 + \frac{1}{2}Tr[(A_\alpha(X)+A_{1-\alpha}(X))(B_\alpha(Y)+B_{1-\alpha}(Y))]x \\
&\quad + \frac{1}{4}Tr[(B_\alpha(Y)+B_{1-\alpha}(Y))^2] \\
&= \left(\frac{1}{4}Tr[A_\alpha(X)^2+A_{1-\alpha}(X)^2] + I_{\rho,\alpha}(X)\right)x^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}Tr[(A_\alpha(X)+A_{1-\alpha}(X))(B_\alpha(Y)+B_{1-\alpha}(Y))]x \\
&\quad + \left(\frac{1}{4}Tr[B_\alpha(Y)^2+B_{1-\alpha}(Y)^2] + J_{\rho,\alpha}(Y)\right).
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\left(Tr[(A_\alpha(X)+A_{1-\alpha}(X))(B_\alpha(Y)+B_{1-\alpha}(Y))]\right)^2 \qquad (11)\\
\le\ & 4\left(\frac{1}{4}Tr[A_\alpha(X)^2+A_{1-\alpha}(X)^2+I_{\rho,\alpha}(X)\right)\left(\frac{1}{4}Tr[B_\alpha(Y)^2+B_{1-\alpha}(Y)^2]+J_{\rho,\alpha}(Y)\right).
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
& Tr[(A_\alpha(X)+A_{1-\alpha}(X))(B_\alpha(Y)+B_{1-\alpha}(Y))] \\
=\ & Tr[(i[\rho^\alpha,X_0]+i[\rho^{1-\alpha},X_0])(\{\rho^\alpha,Y_0\}+\{\rho^{1-\alpha},Y_0\})] \\
=\ & Tr[i(\rho^\alpha X_0 - X_0\rho^\alpha + \rho^{1-\alpha}X_0 - X_0\rho^{1-\alpha})(\rho^\alpha Y_0 + Y_0\rho^\alpha + \rho^{1-\alpha}Y_0 + Y_0\rho^{1-\alpha})] \\
=\ & Tr[i\{(\rho^\alpha+\rho^{1-\alpha})X_0 - X_0(\rho^\alpha+\rho^{1-\alpha})\}\{(\rho^\alpha+\rho^{1-\alpha})Y_0 + Y_0(\rho^\alpha+\rho^{1-\alpha})\}] \\
=\ & iTr[(\rho^\alpha+\rho^{1-\alpha})X_0(\rho^\alpha+\rho^{1-\alpha})Y_0 + (\rho^\alpha+\rho^{1-\alpha})^2X_0Y_0 \\
& -Y_0X_0(\rho^\alpha+\rho^{1-\alpha})^2 - X_0(\rho^\alpha+\rho^{1-\alpha})Y_0(\rho^\alpha+\rho^{1-\alpha})] \\
=\ & iTr[(\rho^\alpha+\rho^{1-\alpha})^2X_0Y_0 - Y_0X_0(\rho^\alpha+\rho^{1-\alpha})^2] \\
=\ & Tr[(\rho^\alpha+\rho^{1-\alpha})^2(i[X_0,Y_0])] \\
=\ & Tr[(\rho^\alpha+\rho^{1-\alpha})^2(i[X,Y])].
\end{aligned}
$$

したがって (11) は次と同値になる.

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\left(Tr[(\rho^\alpha+\rho^{1-\alpha})^2(i[X,Y])]\right)^2 \qquad (12)\\
\le\ & 4\left(\frac{1}{4}Tr[A_\alpha(X)^2+A_{1-\alpha}(X)^2]+I_{\rho,\alpha}(X)\right)\left(\frac{1}{4}Tr[B_\alpha(Y)^2+B_{1-\alpha}(Y)^2]+J_{\rho,\alpha}(Y)\right).
\end{aligned}
$$

同様にして

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\left|Tr[(\rho^\alpha+\rho^{1-\alpha})^2(i[X,Y])]\right|^2 \qquad (13)\\
\le\ & 4\left(\frac{1}{4}Tr[A_\alpha(Y)^2+A_{1-\alpha}(Y)^2]+I_{\rho,\alpha}(Y)\right)\left(\frac{1}{4}Tr[B_\alpha(X)^2+B_{1-\alpha}(X)^2]+J_{\rho,\alpha}(X)\right).
\end{aligned}
$$

よって (12) と (13) をかけて両辺の平方根をとると

$$\begin{aligned}
&\left\{\frac{1}{4}\left(Tr[(\rho^{\alpha}+\rho^{1-\alpha})^2(i[X,Y])]\right)^2\right\}^2 \\
\leq\ & 4\left(\frac{1}{4}Tr[A_{\alpha}(X)^2+A_{1-\alpha}(X)^2]+I_{\rho,\alpha}(X)\right)\left(\frac{1}{4}Tr[B_{\alpha}(Y)^2+B_{1-\alpha}(Y)^2]+J_{\rho,\alpha}(Y)\right) \\
& 4\left(\frac{1}{4}Tr[A_{\alpha}(Y)^2+A_{1-\alpha}(Y)^2]+I_{\rho,\alpha}(Y)\right)\left(\frac{1}{4}Tr[B_{\alpha}(X)^2+B_{1-\alpha}(X)^2]+J_{\rho,\alpha}(X)\right).
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\left(Tr[(\rho^{\alpha}+\rho^{1-\alpha})^2(i[X,Y])]\right)^2 \\
\leq\ & 2\sqrt{\left(\frac{1}{4}Tr[A_{\alpha}(X)^2+A_{1-\alpha}(X)^2]+I_{\rho,\alpha}(X)\right)\left(\frac{1}{4}Tr[B_{\alpha}(Y)^2+B_{1-\alpha}(Y)^2]+J_{\rho,\alpha}(Y)\right)} \\
& 2\sqrt{\left(\frac{1}{4}Tr[A_{\alpha}(Y)^2+A_{1-\alpha}(Y)^2]+I_{\rho,\alpha}(Y)\right)\left(\frac{1}{4}Tr[B_{\alpha}(X)^2+B_{1-\alpha}(X)^2]+J_{\rho,\alpha}(X)\right)}.
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\frac{1}{4}\left(Tr\left[\left(\frac{\rho^{\alpha}+\rho^{1-\alpha}}{2}\right)^2(i[X,Y])\right]\right)^2 \leq \tilde{U}_{\alpha}(\rho,X)\tilde{U}_{\alpha}(\rho,Y).$$

最後に

$$\overline{Tr\left[\left(\frac{\rho^{\alpha}+\rho^{1-\alpha}}{2}\right)^2[X,Y]\right]} = -Tr\left[\left(\frac{\rho^{\alpha}+\rho^{1-\alpha}}{2}\right)^2[X,Y]\right]$$

より

$$Re\left[\left(\frac{\rho^{\alpha}+\rho^{1-\alpha}}{2}\right)^2[X,Y]\right] = 0$$

となるので

$$Tr\left[\left(\frac{\rho^{\alpha}+\rho^{1-\alpha}}{2}\right)^2[X,Y]\right] = i\mathrm{Im}Tr\left[\left(\frac{\rho^{\alpha}+\rho^{1-\alpha}}{2}\right)^2[X,Y]\right].$$

したがって

$$\begin{aligned}
&\left(Tr\left[\left(\frac{\rho^{\alpha}+\rho^{1-\alpha}}{2}\right)^2(i[X,Y])\right]\right)^2 \\
=\ & -\left(Tr\left[\left(\frac{\rho^{\alpha}+\rho^{1-\alpha}}{2}\right)^2[X,Y]\right]\right)^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\left(i\mathrm{Im}Tr\left[\left(\frac{\rho^{\alpha}+\rho^{1-\alpha}}{2}\right)^2[X,Y]\right]\right)^2 \\
&= \left(\mathrm{Im}Tr\left[\left(\frac{\rho^{\alpha}+\rho^{1-\alpha}}{2}\right)^2[X,Y]\right]\right)^2 \\
&= \left|Tr\left[\left(\frac{\rho^{\alpha}+\rho^{1-\alpha}}{2}\right)^2[X,Y]\right]\right|^2.
\end{aligned}
$$

以上より結論を得る. q.e.d.

もう 1 つの定理が成り立つ.

Definition 2 量子状態 ρ と観測量 H およびパラメータ $0 \leq \alpha \leq 1$ に対して

$$W_{\rho,\alpha}(H) \equiv \frac{1}{4}\sqrt{Tr\left[(i[\rho^{\alpha},H_0])^2\right]Tr\left[(i[\rho^{1-\alpha},H_0])^2\right]Tr\left[\{\rho^{\alpha},H_0\}^2\right]Tr\left[\{\rho^{1-\alpha},H_0\}^2\right]}$$

と定義する.

このとき次の定理が成り立つ.

Theorem 2 量子状態 ρ と観測量 X,Y に対して

$$\sqrt{W_{\rho,\alpha}(X)W_{\rho,\alpha}(Y)} \geq \frac{1}{4}\left|Tr\left[\rho^{2\alpha}[X,Y]\right]Tr\left[\rho^{2(1-\alpha)}[X,Y]\right]\right|.$$

Remark 2 次の *(1), (2)* から定理 *1* の不等式と定理 *2* の不等式との強弱関係はない.

(1) $4W_{\rho,\alpha}(X)$ と

$$\left(Tr\left[\frac{A_{\alpha}(X)^2+A_{1-\alpha}(X)^2}{4}\right]+I_{\rho,\alpha}(X)\right)\left(Tr\left[\frac{B_{\alpha}(X)^2+B_{1-\alpha}(X)^2}{4}\right]+J_{\rho,\alpha}(X)\right)$$

との大小関係はない. 即ち
$\sqrt{Tr\left[(i[\rho^{\alpha},X_0])^2\right]Tr\left[(i[\rho^{1-\alpha},X_0])^2\right]}$ と

$$Tr\left[\frac{(i[\rho^{\alpha},X_0])^2+(i[\rho^{1-\alpha},X_0])^2}{4}\right]+\frac{1}{2}Tr\left[(i[\rho^{\alpha},X_0])(i[\rho^{1-\alpha},X_0])\right]$$

および $\sqrt{Tr\left[\{\rho^{\alpha},X_0\}^2\right]Tr\left[\{\rho^{1-\alpha},X_0\}^2\right]}$ と

$$Tr\left[\frac{\{\rho^{\alpha},X_0\}^2+\{\rho^{1-\alpha},X_0\}^2}{4}\right]+\frac{1}{2}Tr\left[\{\rho^{\alpha},X_0\}\{\rho^{1-\alpha},X_0\}\right]$$

との大小関係はない.

(2) $\left|Tr\left[\rho^{2\alpha}[X,Y]\right]Tr\left[\rho^{2(1-\alpha)}[X,Y]\right]\right|$ と $\left|Tr\left[(\frac{\rho^{\alpha}+\rho^{1-\alpha}}{2})^2[X,Y]\right]\right|^2$
との大小関係はない．即ち
$\left|Tr\left[\rho^{2\alpha}[X,Y]\right]\right|$ と $\left|Tr\left[\left(\frac{\rho^{\alpha}+\rho^{1-\alpha}}{2}\right)^2[X,Y]\right]\right|$
および $\left|Tr\left[\rho^{2(1-\alpha)}[X,Y]\right]\right|$ と $\left|Tr\left[\left(\frac{\rho^{\alpha}+\rho^{1-\alpha}}{2}\right)^2[X,Y]\right]\right|$
との大小関係はない．

(3) $\alpha = 1/2$ のとき定理 *1* と定理 *2* はどちらも *Luo* の結果を得る．

Proof of Theorem 2. $K = i[\rho^{\alpha}, X_0]x + \{\rho^{\alpha}, Y_0\}$ とおく．このとき $K^* = K$ である．したがって

$$\begin{aligned} 0 &\leq Tr\,[KK^*] \\ &= Tr\left[(i[\rho^{\alpha},X_0]x+\{\rho^{\alpha},Y_0\})^2\right] \\ &= Tr\left[(i[\rho^{\alpha},X_0])^2\right]x^2 + 2iTr\left[[\rho^{\alpha},X_0]\{\rho^{\alpha},Y_0\}\right]x + Tr\left[\{\rho^{\alpha},Y_0\}^2\right] \\ &= Tr\left[(i[\rho^{\alpha},X_0])^2\right]x^2 + 2ii\mathrm{Im}Tr\left[\rho^{2\alpha}[X,Y]\right]x + Tr\left[\{\rho^{\alpha},Y_0\}^2\right]. \end{aligned}$$

したがって

$$|Tr\left[\rho^{2\alpha}[X,Y]\right]|^2 = (\mathrm{Im}Tr\left[\rho^{2\alpha}[X,Y]\right])^2 \leq Tr\left[(i[\rho^{\alpha},X_0])^2\right]Tr\left[\{\rho^{\alpha},Y_0\}^2\right].$$

X と Y を入れ替えて

$$|Tr\left[\rho^{2\alpha}[X,Y]\right]|^2 \leq Tr\left[(i[\rho^{\alpha},Y_0])^2\right]Tr\left[\{\rho^{\alpha},X_0\}^2\right].$$

同様にして

$$|Tr\left[\rho^{2(1-\alpha)}[X,Y]\right]|^2 \leq Tr\left[(i[\rho^{1-\alpha},X_0])^2\right]Tr\left[\{\rho^{1-\alpha},Y_0\}^2\right].$$

X と Y を入れ替えて

$$|Tr\left[\rho^{2(1-\alpha)}[X,Y]\right]|^2 \leq Tr\left[(i[\rho^{1-\alpha},Y_0])^2\right]Tr\left[\{\rho^{1-\alpha},X_0\}\right].$$

ここで

$$S_{\rho,\alpha}(X) \equiv \frac{1}{2}Tr\left[(i[\rho^{\alpha},X_0])^2\right],\quad T_{\rho,\alpha}(X) \equiv \frac{1}{2}Tr\left[\{\rho^{\alpha},X_0\}^2\right]$$

$$S_{\rho,1-\alpha}(X) \equiv \frac{1}{2}Tr\left[(i[\rho^{1-\alpha},X_0])^2\right],\quad T_{\rho,1-\alpha}(X) \equiv \frac{1}{2}Tr\left[\{\rho^{1-\alpha},X_0\}^2\right]$$

$$S_{\rho,\alpha}(Y) \equiv \frac{1}{2}Tr\left[(i[\rho^{\alpha},Y_0])^2\right],\quad T_{\rho,\alpha}(Y) \equiv \frac{1}{2}Tr\left[\{\rho^{\alpha},Y_0\}^2\right]$$

$$S_{\rho,1-\alpha}(Y) \equiv \frac{1}{2}Tr\left[(i[\rho^{1-\alpha}, Y_0])^2\right],\quad T_{\rho,1-\alpha}(Y) \equiv \frac{1}{2}Tr\left[\{\rho^{1-\alpha}, Y_0\}^2\right]$$

とおくと次を得る.

$$|Tr\left[\rho^{2\alpha}[X,Y]\right]|^2 \leq 4\sqrt{S_{\rho,\alpha}(X)T_{\rho,\alpha}(X)S_{\rho,\alpha}(Y)T_{\rho,\alpha}(Y)}.$$

$$|Tr\left[\rho^{2(1-\alpha)}[X,Y]\right]|^2 \leq 4\sqrt{S_{\rho,1-\alpha}(X)T_{\rho,1-\alpha}(X)S_{\rho,1-\alpha}(Y)T_{\rho,1-\alpha}(Y)}.$$

ここで

$$W_{\rho,\alpha}(X) \equiv \sqrt{S_{\rho,\alpha}(X)S_{\rho,1-\alpha}(X)T_{\rho,\alpha}(X)T_{\rho,1-\alpha}(X)},$$

$$W_{\rho,\alpha}(Y) \equiv \sqrt{S_{\rho,\alpha}(Y)S_{\rho,1-\alpha}(Y)T_{\rho,\alpha}(Y)T_{\rho,1-\alpha}(Y)}$$

とおくと目標の不等式

$$\sqrt{W_{\rho,\alpha}(X)W_{\rho,\alpha}(Y)} \geq \frac{1}{4}|Tr\left[\rho^{2\alpha}[X,Y]\right]Tr\left[\rho^{2(1-\alpha)}[X,Y]\right]|.$$

を得る. q.e.d.

References

[1] E.P.Wigner and M.M.Yanase, Information aontent of distribution, Proc.Nat.Acad.Sci., U.S.A., vol.49, pp.910-918, 1963.

[2] S.Luo and Q.Zhang, On skew information, IEEE Trans. Information Theory, vol.50, pp.1778-1782, 2004, and Correction to "On skew information", IEEE Trans. Information Theory, vol.51, p.4432, 2005.

[3] K.Yanagi, S.Furuichi and K.Kuriyama, A generalized skew information and uncertainty relation, IEEE Trans. Information Theory, vol.51,pp.4401-4404, 2005.

[4] H.Kosaki, Matrix trace inequality related to uncertainty principle, International J.Math., vol.16, pp.629-646, 2005.

[5] S.Luo, Heisenberg uncertainty relation for mixed states, Phys.Rev.A, vol.72, p.042110, 2005.