数理解析研究所講究録
第 1615 巻 2008 年 117-125

EKELAND の ε 変分不等式あれこれ

九州工業大学　鈴木 智成 (Tomonari SUZUKI)

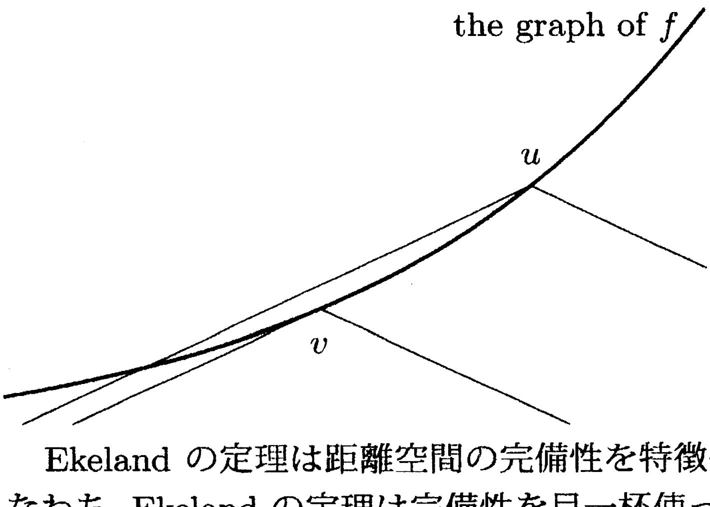
1. 序

最近, 筆者は論文 [17, 19] を書いた. この 2 つの論文に共通する話題は Ekeland の ε 変分不等式 (定理 1) である. そこで, 本稿では, Ekeland の定理を中心にしながら, 論文 [17, 19] の解説をしたいと思う. なお, 論文 [19] の主結果に対する解説を論文 [18] に書いているので, この論文も合わせてご覧頂きたい.

定理 1 (Ekeland [6, 7]). (X, d) を完備距離空間とし, f を X で定義された下半連続で, 下から有界な実数値関数とする. このとき, $u \in X$ と $\lambda > 0$ に対して, 以下を満たす $v \in X$ が存在する.

(i) $f(v) \leq f(u) - \lambda\, d(u, v)$

(ii) $f(w) > f(v) - \lambda\, d(v, w), \quad \forall w \in X \setminus \{v\}$



まず, f のグラフ上の点 $(u, f(u))$ を頂点として, 傾き λ の傘を開く. (i) は, その傘の下に点 $(v, f(v))$ があることを意味する. 次に, その点を頂点として傾き λ の傘を開く. (ii) は, その傘の下には $(v, f(v))$ 以外の点はないことを意味する.

Ekeland の定理は距離空間の完備性を特徴付けることが知られている. すなわち, Ekeland の定理は完備性を目一杯使っていることになる.

定理 2 (Kirk [9], Sullivan [11], Weston [21]). (X, d) を距離空間とする. このとき, 以下は同値である.

- X は完備である.

MSC (2000). 54H25, 54E50.
キーワード. Palais-Smale 条件, coercivity, Ekeland の変分原理, τ-distance.
住所. 〒 804–8550 北九州市戸畑区 九州工業大学数学教室.
電子メール. suzuki-t@mns.kyutech.ac.jp.

- X で定義された下半連続で下から有界な実数値関数 f, $u \in X$ と $\lambda > 0$ に対して, (i), (ii) を満たす $v \in X$ が存在する.

2. 不動点定理

Ekeland の ε 変分不等式は存在定理であるから, 存在定理の代表格である不動点定理と非常に関連が深い. 実際, Ekeland の定理は Caristi の不動点定理と同値である. この節では, まず, Ekeland の定理を使って Banach の縮小原理を証明する.

定理 3 (Banach [1]). (X, d) を完備距離空間とし, T を X 上の写像する. $r \in [0, 1)$ が存在して, すべての $x, y \in X$ について $d(Tx, Ty) \leq r\, d(x, y)$ を満たすとする. このとき, T は不動点を持つ.

証明. X から $[0, \infty)$ への連続関数 f を

$$f(x) = d(x, Tx)$$

と定義する. Ekeland の定理より,

$$f(w) > f(z) - (1 - r)\, d(z, w), \quad \forall w \in X \setminus \{z\}$$

を満たす $z \in X$ が存在する. $z \neq Tz$ を仮定すると,

$$\begin{aligned} r\, d(z, Tz) &\geq d(Tz, T^2 z) = f(Tz) \\ &> f(z) - (1 - r)\, d(z, Tz) = r\, d(z, Tz) \end{aligned}$$

となり, 矛盾する. すなわち, z は T の不動点である. □

Ekeland の定理を用いると Caristi の不動点定理を非常に簡単に証明できる.

定理 4 (Caristi [4], Caristi & Kirk [5]). (X, d) と f は定理 1 と同じとし, T を X 上の写像とする. すべての $x \in X$ について, $f(Tx) + d(x, Tx) \leq f(x)$ を満たすと仮定する. このとき, T は不動点を持つ.

証明. Ekeland の定理より,

$$f(w) > f(z) - d(z, w), \quad \forall w \in X \setminus \{z\}$$

を満たす $z \in X$ が存在する. $z \neq Tz$ を仮定すると,

$$f(Tz) > f(z) - d(z, Tz)$$

となり仮定に矛盾する. □

なお, Caristi の定理を用いて, Ekeland の定理を簡単に証明することもできる. すなわち, この 2 つの定理は同値である. 他に同値な定理としては, 例えば, Takahashi の最小値定理 [20] 等がある. そして, これらの同値な定理の中で, 一番最初に証明されたのは, Ekeland の定理である.

3. 強 Ekeland の定理

1988 年に, Georgiev は興味深い定理を証明した. この定理は '**強**' Ekeland の定理と呼ばれる.

定理 5 (Georgiev [10]). (X, d) と f は定理 1 と同じとする. このとき, $u \in X$, $\lambda > 0$ と $\delta > 0$ に対して, 以下を満たす $v \in X$ が存在する.

(i)' $f(v) \leq f(u) - \lambda\, d(u,v) + \delta$
(ii) $f(w) > f(v) - \lambda\, d(v,w), \quad \forall w \in X \setminus \{v\}$
(iii) $\lim_n \big(f(x_n) + \lambda\, d(v, x_n)\big) = f(v)$ ならば $\{x_n\}$ は v に収束する

名前に '強' という文字があるが, この定理は Ekeland の定理と同値である. すなわち, Ekeland の定理の 1 つの変形である. 実際, 条件 (ii) は共通であり, 条件 (iii) は新たに付け加えられたものであるが, 条件 (i)' は若干弱くなっている.

条件 (i)–(iii) が結論になる定理でなければ「強い」という名前は付けにくい. しかし, 何も仮定しないと反例が簡単にできてしまう. そこで, 空間 X と関数 f に条件を付けて, 結論が (i)–(iii) となる定理を 2 つ証明した.

定理 6 ([17]). (X, d) をコンパクト距離空間とし, f を X で定義された下半連続とする. このとき, $u \in X$ と $\lambda > 0$ に対して, 以下を満たす $v \in X$ が存在する.

(i) $f(v) \leq f(u) - \lambda\, d(u,v)$
(ii) $f(w) > f(v) - \lambda\, d(v,w), \quad \forall w \in X \setminus \{v\}$
(iii) $\lim_n \big(f(x_n) + \lambda\, d(v, x_n)\big) = f(v)$ ならば $\{x_n\}$ は v に収束する

定理 7 ([17]). X を回帰的なバナッハ空間とし, f を X で定義された下半連続で, 下から有界な実数値関数とする. f は準凸関数 (quasiconvex) であると仮定する, すなわち, すべての実数 α に対して, $\{x : f(x) \leq \alpha\}$ は凸であると仮定する. このとき, $u \in X$ と $\lambda > 0$ に対して, (i)–(iii) を満たす $v \in X$ が存在する.

なお, 論文 [17] において, 定理 7 は次の定理から証明されている.

定理 8 ([17]). X をバナッハ空間の共役空間とし, f を X で定義された弱 $*$ 位相の意味で下半連続で, 下から有界な実数値関数とする. このとき, $u \in X$ と $\lambda > 0$ に対して, (i), (ii) と以下の (iii)' を満たす $v \in X$ が存在する.

(iii)' $\lim_\alpha \big(f(x_\alpha) + \lambda\, d(v, x_\alpha)\big) = f(v)$ ならばネット $\{x_\alpha\}$ は v に弱 $*$ 収束する

4. τ-DISTANCE 版の EKELAND の定理

τ-distance 版の Ekeland の定理も証明されているので, この節で紹介したい. まず τ-distance の定義から述べる.

定義 9 ([12]). (X, d) を距離空間とし, p を $X \times X$ から $[0, \infty)$ への関数とする. このとき, p が X 上の **τ-distance** であるとは $X \times [0, \infty)$ から $[0, \infty)$ への関数 η が存在して以下の 5 条件を満たすことをいう.

(τ1) $p(x, z) \le p(x, y) + p(y, z)$ がすべての $x, y, z \in X$ について成り立つ

(τ2) $\eta(x, 0) = 0$ と $\eta(x, t) \ge t$ がすべての $(x, t) \in X \times [0, \infty)$ について成り立ち, η は第 2 変数について凹かつ連続である

(τ3) $\lim_n x_n = x$ かつ $\lim_n \sup\{\eta(z_n, p(z_n, x_m)) : m \ge n\} = 0$ ならば $p(w, x) \le \liminf_n p(w, x_n)$ がすべての $w \in X$ について成立する

(τ4) $\lim_n \sup\{p(x_n, y_m) : m \ge n\} = 0$ かつ $\lim_n \eta(x_n, t_n) = 0$ ならば $\lim_n \eta(y_n, t_n) = 0$ が成立する

(τ5) $\lim_n \eta(z_n, p(z_n, x_n)) = 0$ かつ $\lim_n \eta(z_n, p(z_n, y_n)) = 0$ ならば $\lim_n d(x_n, y_n) = 0$ が成立する

注意. 距離関数 d は 1 つの τ-distance である. また, 「$p(x, y) = p(y, x)$」, 「$p(x, x) = 0$」, 「$p(x, y) = 0 \Longrightarrow x = y$」等は一般には成立しない. その為, 定理を証明する際は若干不自由を感じることが多いが, その分色々な所で使うことができる. [8, 12–19] 等を参照のこと.

さて, τ-distance 版の Ekeland の定理と強 Ekeland の定理を述べる. 定理 10 は, 論文 [19] の主結果を証明する際に, 非常に役に立った.

定理 10 ([12]). (X, d) と f は定理 1 と同じとする. p を X 上の τ-distance とする. このとき, $p(u, u) = 0$ を満たす $u \in X$ と $\lambda > 0$ に対して, 以下を満たす $v \in X$ が存在する.

(i) $f(v) \le f(u) - \lambda\, p(u, v)$

(ii) $f(w) > f(v) - \lambda\, p(v, w), \quad \forall w \in X \setminus \{v\}$

定理 11 ([17]). (X,d) と f は定理 1 と同じとする. p を X 上の τ-distance とする. このとき, $p(u,u)=0$ を満たす $u \in X$, $\lambda > 0$ と $\delta > 0$ に対して, 以下を満たす $v \in X$ が存在する.

(i)' $f(v) \leq f(u) - \lambda p(u,v) + \delta$

(ii) $f(w) > f(v) - \lambda p(v,w), \quad \forall w \in X \setminus \{v\}$

(iii) $\lim_n \big(f(x_n) + \lambda p(v,x_n)\big) = f(v)$ ならば $\{x_n\}$ は v に収束し, かつ $p(v,v) = \lim_n p(v,x_n) = 0$ を満たす.

5. PS 条件とコアシブ性

いくつかの定義から始めたい. f をバナッハ空間 X で定義された実数値関数とする. f が $x \in X$ で**ガトー微分 (Gâteaux differentiable)** 可能であるとは, X 上で定義された実数値線形連続関数 $f'(x)$ が存在して, すべての $y \in X$ について

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+ty) - f(x)}{t} = \langle f'(x), y \rangle$$

が成立することをいう (この定義と異なるガトー微分の定義もあるので注意). f が**コアシブ (coercive)** であるとは,

$$\lim_{r \to \infty} \Big(\inf \big\{f(x) : \|x\| \geq r\big\}\Big) = \infty$$

が成立することをいう. また, f が **PS 条件 (Palais-Smale condition)** を満たすとは, 以下が成立することである.

- X の点列 $\{x_n\}$ について, $\{f(x_n)\}$ が有界でかつ $\lim_{n \to \infty} \|f'(x_n)\| = 0$ を満たすならば, $\{x_n\}$ は収束する部分列を持つ

Ekeland の定理 (定理 1) を用いると以下の定理を簡単に証明することができる.

定理 12 ([2, 3] 等). f をバナッハ空間 X で定義されたガトー微分可能な下半連続で下から有界な実数値関数とする. このとき, もし f が PS 条件を満たせば, f はコアシブである.

定理 2 で述べたように, Ekeland の定理は距離空間の完備性を特徴付ける. そこで, 「定理 12 における完備性の条件を外すとどうなるだろうか ?」という疑問が湧いてくる. 次の例は, この疑問に対する否定的な回答である.

例 13 ([19]). 集合 X を

$$X = \{x : x \text{ は実数列で途中から } 0 \text{ の並びになる }\}$$

とし, X に ℓ_1 ノルム $\|x\| = \sum_{j=1}^{\infty} |x(j)|$ を入れる. $\mathbb{R}$ から $(0,\infty)$ への関数 f を

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \exp\left(2^j\, x(j)\right)$$

で定義する. すると, f は下半連続, 非連続, 凸, 下から有界, ガトー微分可能, そして PS 条件を満たすが, コアシブではない.

証明. $e_n \in X$ $(n \in \mathbb{N})$ を

$$e_n(j) = \begin{cases} 0 & \text{if } j \neq n, \\ 1 & \text{if } j = n \end{cases}$$

と定める. $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への関数 f_j $(j \in \mathbb{N})$ を $f_j(t) = 2^{-j}\exp(2^j\, t)$ で定義する. また, X から $\mathbb{N}$ への写像 ν を

$$x(j) = 0, \quad \forall j > \nu(x)$$

を満たすように定義する.

(f は well-defined であること) $x \in X$ に対して,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \exp\left(2^j\, x(j)\right) \\ &= \sum_{j=1}^{\nu(x)} \frac{1}{2^j} \exp\left(2^j\, x(j)\right) + \sum_{j=\nu(x)+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \\ &\leq \sum_{j=1}^{\nu(x)} \frac{1}{2^j} \exp\left(2^j\, x(j)\right) + 1 \\ &< \infty. \end{aligned}$$

よって, f は well-defined である.

(f は下半連続関数) X から $\mathbb{R}$ への関数 $x \mapsto f_j\big(x(j)\big)$ は連続関数 $(j \in \mathbb{N})$, すなわち, 下半連続関数であることに注意する. f は

$$f(x) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^{k} f_j\big(x(j)\big)$$

と有限和と上限を用いて表せるので, f は下半連続関数である.

(f はすべての点において連続ではない) $x \in X$ と $\varepsilon > 0$ に対して,

$$\begin{aligned} \sup\left\{f(y) : \|x-y\| \leq \varepsilon\right\} &\geq \sup\left\{f(x+\varepsilon\, e_j) : j > \nu(x)\right\} \\ &= \sup\left\{f(x) + f_j(\varepsilon) - f_j(0) : j > \nu(x)\right\} \\ &= \infty \end{aligned}$$

が成立する．よって，すべての $x \in X$ において，f は連続ではない．

(f は凸関数) $x \mapsto f_j\big(x(j)\big)$ は凸なので，f は凸である．

(f は下から有界) $f_j(x) > 0$ より $f(x) > 0$ である．

(f はガトー微分可能) $x, y \in X$ を固定する．このとき

$$\begin{aligned}
&\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(f(x + t\,y) - f(x)\right) \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \sum_{j=1}^{\nu(y)} \Big(f_j\big(x(j) + t\,y(j)\big) - f_j\big(x(j)\big)\Big) \\
&= \sum_{j=1}^{\nu(y)} f_j{}'\big(x(j)\big)\,y(j) \\
&= \Big\langle \sum_{j=1}^{\infty} \exp\big(2^j\,x(j)\big)\,e_j,\ y \Big\rangle.
\end{aligned}$$

従って，f は x においてガトー微分可能で，そのガトー微分は

$$f'(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \exp\big(2^j\,x(j)\big)\,e_j$$

である．

(f はPS条件を満たす) すべての $x \in X$ において

$$\|f'(x)\| = \Big\| \sum_{j=1}^{\infty} \exp\big(2^j\,x(j)\big)\,e_j \Big\| = \sup_{j \in \mathbb{N}} \Big(\exp\big(2^j\,x(j)\big) \Big) \geq 1$$

である．従って，PS条件の仮定が満たされることなはない．つまり f はPS条件を満たす．

(f はコアシブではない) X の点列 $\{u_n\}$ を

$$u_n(j) = \begin{cases} -n & \text{if } j \leq n, \\ 0 & \text{if } j > n \end{cases}$$

と定める．このとき

$$\begin{aligned}
f(u_n) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^j} \exp\big(-2^j\,n\big) + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \exp(0) \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^j} \exp\big(-n\big) + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \\
&\leq \exp(-n) + 2^{-n}
\end{aligned}$$

が成り立つ. 従って, $\lim_n f(u_n) = 0$ である. また, $\lim_n \|u_n\| = n^2 = \infty$ なので

$$\lim_{r\to\infty}\left(\inf\left\{f(x) : \|x\| \geq r\right\}\right) = 0 < \infty$$

が成り立つ. つまり, f はコアシブではない. □

上記の「f は下半連続」の証明は, 論文 [19] における証明よりもかなり簡潔である. この証明は, 講演の際に佐藤坦氏にアドバイス頂いたものである. この場を借りて氏に感謝の意を述べたい.

この反例から自然に湧いてくる未解決問題を提示して, 本稿を終えたい.

問題 14. 定理 12 は完備性を特徴付けるか ?

参考文献

[1] S. Banach, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*, Fund. Math., **3** (1922), 133–181.

[2] H. Brézis and L. Nirenberg, *Remarks on finding critical points*, Comm. Pure Appl. Math., **44** (1991), 939–963.

[3] L. Caklovic, S. J. Li and M. Willem, *A note on Palais-Smale condition and coercivity*, Differential Integral Equations, **3** (1990), 799–800.

[4] J. Caristi, *Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions*, Trans. Amer. Math. Soc., **215** (1976), 241–251.

[5] J. Caristi and W. A. Kirk, *Geometric fixed point theory and inwardness conditions*, Lecture Notes in Math., Vol. 490, pp. 74–83, Springer, Berlin, 1975.

[6] I. Ekeland, *On the variational principle*, J. Math. Anal. Appl., **47** (1974), 324–353.

[7] ———, *Nonconvex minimization problems*, Bull. Amer. Math. Soc., **1** (1979), 443–474.

[8] O. Kada, T. Suzuki and W. Takahashi, *Nonconvex minimization theorems and fixed point theorems in complete metric spaces*, Math. Japon., **44** (1996), 381–391.

[9] W. A. Kirk, *Caristi's fixed point theorem and metric convexity*, Colloq. Math., **36** (1976), 81–86.

[10] P. G. Georgiev, *The strong Ekeland variational principle, the strong drop theorem and applications*, J. Math. Anal. Appl., **131** (1988), 1–21.

[11] F. Sullivan, *A characterization of complete metric spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **83** (1981), 345–346.

[12] T. Suzuki, *Generalized distance and existence theorems in complete metric spaces*, J. Math. Anal. Appl., **253** (2001), 440–458.

[13] ———, *On Downing-Kirk's theorem*, J. Math. Anal. Appl., **286** (2003), 453–458.

[14] ———, *Several fixed point theorems concerning τ-distance*, Fixed Point Theory Appl., **2004** (2004), 195–209.

[15] ———, *Generalized Caristi's fixed point theorems by Bae and others*, J. Math. Anal. Appl., **302** (2005), 502–508.

[16] ———, *Contractive mappings are Kannan mappings, and Kannan mappings are contractive mappings in some sense*, Comment. Math. Prace Mat., **45** (2005), 45–58.

[17] ———, *The strong Ekeland variational principle*, J. Math. Anal. Appl., **320** (2006), 787–794.

[18] ———, *Zhong による弱 Palais-Smale 条件と coercivity について*, in Banach Spaces, Function Spaces, Inequalities and their Applications (K.-S. Saito Ed.), RIMS Kokyuroku, 1570 (2007), pp 145–151.

[19] ———, *On the relation between the weak Palais-Smale condition and coercivity given by Zhong*, Nonlinear Anal., **68** (2008), 2471–2478.

[20] W. Takahashi, *Existence theorems generalizing fixed point theorems for multivalued mappings*, in Fixed Point Theory and Applications (M. A. Théra and J. B. Baillon Eds.), Pitman Research Notes in Mathematics Series 252, 1991, pp. 397–406, Longman Sci. Tech., Harlow, 1991.

[21] J. D. Weston, *A characterization of metric completeness*, Proc. Amer. Math. Soc., **64** (1977), 186–188.