数理解析研究所講究録
第1615巻 2008年 157-164

On $\widetilde{C}_{NJ}(X) = C_{NJ}(X)$

松江工業高等専門学校　中村　元 (Gen Nakamura)
Matsue National College of Technology
広島女学院大学　橋本　一夫 (Kazuo Hashimoto)
Hiroshima Jogakuin University

1 準備

$(X, \|\cdot\|)$ を実 Banach 空間とする. Banach 空間 X の von Neumann-Jordan (NJ-) 定数 $C_{NJ}(X)$ は次の不等式が成り立つ定数 C の最小値を表す:

$$\frac{1}{C} \leq \frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{2(\|x\|^2 + \|y\|^2)} \leq C \quad \forall x, \forall y \in X, (x,y) \neq (0,0).$$

次の結果は良く知られている:

(i) 任意の Banach 空間 X に対して, $1 \leqq C_{NJ}(X) \leqq 2$, X が Hilbert 空間であるための必要条件は $C_{NJ}(X) = 1$ (Jordan and von Neumann [5]).

(ii) $C_{NJ}(L_p) = 2^{2/t-1}$. ここで, $t = \min\{p, p'\}$, $1/p + 1/p' = 1$ ([2]).

また, X の定数 $\widetilde{C}_{NJ}(X)$ は次で定義される：

$$\widetilde{C}_{NJ}(X) = \inf\{C_{NJ}(X, |\cdot|) : |\cdot| \text{ はノルム } \|\cdot\| \text{ に同値なノルム }\}.$$

定義から, 次のことが容易に分かる:

(iii) $1 \leq \widetilde{C}_{NJ}(X) \leq C_{NJ}(X) \leq 2$.

(iv) Y が X の部分空間ならば $\widetilde{C}_{NJ}(Y) \leq \widetilde{C}_{NJ}(X)$.

我々は次のことに関心がある: 与えられた Banach 空間 X に対して, X と位相同型な Banach 空間 $\widetilde{X}$ を適当に取れば,

$$\widetilde{C}_{NJ}(X) = C_{NJ}(\widetilde{X})$$

とできるか？

この問題は, $\widetilde{C}_{NJ}(X) = 2$ のときは, 明らかに, $\widetilde{C}_{NJ}(X) = C_{NJ}(X) = 2$ だから, 肯定的な結果として得られる. [13] で, 我々は $\widetilde{C}_{NJ}(X) = 1$ のときに反例を挙げることで, 上記の問題に対する否定的な結果を与えた.

本報告では, $1 \leq \widetilde{C}_{NJ}(X) < 2$ の場合にも, $\widetilde{C}_{NJ}(X) = 1$ の場合と同様の手法で上記の問題に対して否定的な結果を与えるができることを示す.

---

[1]2000 Mathematics Subject Classification. 46B20, 46B03.

[2]Key words and phrases. von Neumann-Jordan constant, n-th von Neumann-Jordan constant, type and cotype, finite representability.

2 結果

定義 1 *Banach*空間 X と, 任意の $n \geq 1$ に対して *n-th von Neumann-Jordan*定数を次で定義する:

$$C_{NJ}^{(n)}(X) := \sup\left\{ \sum_{\theta_j=\pm1} \left\| \sum_{j=1}^{n} \theta_j x_j \right\|^2 \Big/ 2^n \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^2 : \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^2 \neq 0, x_j \in X \right\}.$$

ここで, 定義から $C_{NJ}^{(2)}(X) = C_{NJ}(X)$ は明らかである. また, 次のことが知られている ([10, Theorem 5]):

(v) $1 \leq C_{NJ}^{(n)}(X) \leq n$.

(vi) $C_{NJ}^{(n)}(X) \leq C_{NJ}^{(n+1)}(X)$.

(vii) $n \geq 2$ に対して, $C_{NJ}^{(n)}(X) = 1$ となるための必要十分要件は X が Hilbert 空間となることである.

先ず, 次の命題が得られる.

命題 1 任意の *Banach*空間 X に対して, 次の不等式が成り立つ.

$$C_{NJ}^{(2^n)}(X) \leq (C_{NJ}(X))^n \ \textit{for}\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

証明 $C_{NJ}(X) = C$ と置き, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し, $S_n = \{1, -1\}^{\{1,2,\cdots,n\}}$ と定める. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $\sum_{i=1}^{2n} \|x_i\|^2 \neq 0$ を満たす X の元 x_i $(1 \leq i \leq 2n)$ を任意に取ると,

$$\begin{aligned} &\sum_{\sigma_1 \in S_{2n}} \left\| \sum_{i=1}^{2n} \sigma_1(i) x_i \right\|^2 \\ = &\sum_{\sigma_2, \sigma_3 \in S_n} \left\| \sum_{j=1}^{n} \sigma_2(j) x_j + \sum_{k=1}^{n} \sigma_3(k) x_{n+k} \right\|^2. \end{aligned}$$

一方,

$$\text{左辺} = \sum_{\sigma_2, \sigma_3 \in S_n} \left\| \sum_{j=1}^{n} \sigma_2(j) x_j - \sum_{k=1}^{n} \sigma_3(k) x_{n+k} \right\|^2$$

が成り立つので,

$$\begin{aligned} &\sum_{\sigma_1 \in S_{2n}} \left\| \sum_{i=1}^{2n} \sigma_1(i) x_i \right\|^2 \\ = &\frac{1}{2} \sum_{\sigma_2, \sigma_3 \in S_n} \left\{ \left\| \sum_{j=1}^{n} \sigma_2(j) x_j + \sum_{k=1}^{n} \sigma_3(k) x_{n+k} \right\|^2 + \left\| \sum_{j=1}^{n} \sigma_2(j) x_j - \sum_{k=1}^{n} \sigma_3(k) x_{n+k} \right\|^2 \right\}. \end{aligned}$$

ここで, 定数 C の定め方

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 \leq 2C(\|x\|^2+\|y\|^2) \quad x,\, y \in X$$

より,

$$\begin{aligned}
&\sum_{\sigma_1\in S_{2n}}\left\|\sum_{i=1}^{2n}\sigma_1(i)x_i\right\|^2 \\
\leq\ & C\sum_{\sigma_2,\sigma_3\in S_n}\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n}\sigma_2(j)x_j\right\|^2+\left\|\sum_{k=1}^{n}\sigma_3(k)x_{n+k}\right\|^2\right\} \\
=\ & C\left\{\sum_{\sigma_2,\sigma_3\in S_n}\left\|\sum_{j=1}^{n}\sigma_2(j)x_j\right\|^2+\sum_{\sigma_2,\sigma_3\in S_n}\left\|\sum_{k=1}^{n}\sigma_3(k)x_{n+k}\right\|^2\right\} \\
=\ & C\cdot 2^n\left\{\sum_{\sigma_2\in S_n}\left\|\sum_{j=1}^{n}\sigma_2(j)x_j\right\|^2+\sum_{\sigma_3\in S_n}\left\|\sum_{k=1}^{n}\sigma_3(k)x_{n+k}\right\|^2\right\} \\
\leq\ & C\cdot 2^n\left\{2^nC_{NJ}^{(n)}(X)\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^2+2^nC_{NJ}^{(n)}(X)\sum_{k=1}^{n}\|x_{n+k}\|^2\right\} \\
=\ & C\cdot 2^{2n}\cdot C_{NJ}^{(n)}(X)\sum_{j=1}^{2n}\|x_j\|^2 .
\end{aligned}$$

$\{x_i\}_{i=1}^{2n}$ の取り方が任意なので, $C_{NJ}^{(2n)}(X)$ の定義から,

$$C_{NJ}^{(2n)}(X) \leq C\cdot C_{NJ}^{(n)}(X) \quad \text{for } n\in\mathbb{N}.$$

一方, $C_{NJ}^{(1)}(X)=1$ だから, $C_{NJ}^{(2^n)}(X)\leq C^n=(C_{NJ}(X))^n$ for $n\in\mathbb{N}$. ■

定理 1 ([10, Theorem 3 (ii)]) $1\leq p\leq 2$ で, L_p が無限次元空間であれば, 次が成り立つ

$$C_{NJ}^{(n)}(L_p)=n^{\frac{2}{p}-1}.$$

定理 2 任意の *Banach* 空間 X に対して,

$$\widetilde{C}_{NJ}(X)=\widetilde{C}_{NJ}(X^*)$$

が成り立つ.

証明 先ず, $\widetilde{C}_{NJ}(X)\geq\widetilde{C}_{NJ}(X^*)$ を示す. X と位相同型な任意の Banach 空間 Y に対し X^*, Y^* も位相同型となるので,

$$\begin{aligned}
C_{NJ}(Y) &= C_{NJ}(Y^*) \quad (\because [14, \textit{Lemma } 2]) \\
&\geq \widetilde{C}_{NJ}(Y^*) \\
&= \widetilde{C}_{NJ}(X^*).
\end{aligned}$$

X と位相同型な Banach 空間として Y の取り方は任意だから

$$\widetilde{C}_{NJ}(X) \geq \widetilde{C}_{NJ}(X^*).$$

また, これより,

$$\widetilde{C}_{NJ}(X^*) \geq \widetilde{C}_{NJ}(X^{**}).$$

他方, $X \subset X^{**}$ だから $\widetilde{C}_{NJ}(X) \leq \widetilde{C}_{NJ}(X^{**})$. 故に,

$$\widetilde{C}_{NJ}(X) = \widetilde{C}_{NJ}(X^*)(= \widetilde{C}_{NJ}(X^{**})).$$

■

上の結果と $C_{NJ}(X) = C_{NJ}(X^*)$ ([14, Lemma 2]) より, 次は明らかである.

系 1 任意の *Banach* 空間 X に対して, $\widetilde{C}_{NJ}(X) = C_{NJ}(X)$ ならば $\widetilde{C}_{NJ}(X^*) = C_{NJ}(X^*)$ が成り立つ.

定理 3 L_p を無限次元空間とする. 任意の $1 \leq p \leq \infty$ に対して,

$$\widetilde{C}_{NJ}(L_p) = C_{NJ}(L_p) = 2^{\frac{2}{t}-1}$$

が成り立つ. ここで, $t = \min\{p, p'\}$, $1/p + 1/p' = 1$.

証明 先ず, $1 \leq p \leq 2$ のとき, 定理が成り立つことを示す. Clarkson の結果から

$$\widetilde{C}_{NJ}(L_p) \leq C_{NJ}(L_p) = 2^{2/p-1}.$$

次に L_p と位相同型な Banach 空間 X を任意に取ると, 位相同型の仮定から, ある $M > 0$ が存在して, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$M \cdot C_{NJ}^{(n)}(X) \geq C_{NJ}^{(n)}(L_p).$$

が成り立つ. 命題 1, 定理 1 より

$$M(C_{NJ}(X))^n \geq M \cdot C_{NJ}^{(2^n)}(X) \geq C_{NJ}^{(2^n)}(L_p) = 2^{2n/p-n}.$$

よって, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\left(\frac{2^{2/p-1}}{C_{NJ}(X)}\right)^n \leq M$$

が成立することになるので,

$$\frac{2^{2/p-1}}{C_{NJ}(X)} \leq 1.$$

が成り立つことが分かる. つまり, $2^{2/p-1} \leq C_{NJ}(X)$. X が任意だから, $2^{2/p-1} \leq \widetilde{C}_{NJ}(L_p)$ が得られる. 以上のことから, $1 \leq p \leq 2$ のとき,

$$\widetilde{C}_{NJ}(L_p) = C_{NJ}(L_p) = 2^{2/p-1}(= 2^{2/t-1})$$

が示された.

次に, $2 \leq p \leq \infty$ の場合, p' を $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ を満たすものとすれば, $1 \leq p' \leq 2$ で, 上の結果と定理 2 から

$$\widetilde{C}_{NJ}(L_p) = \widetilde{C}_{NJ}(L_{p'}) = 2^{2/p'-1} = 2^{2/t-1}$$

が成り立つ. ■

注意. この定理は Banach 空間の type, finitely representability を用いた Maurey-Pisier [12] の結果からも得られるが, ここでは直接的な証明を与えた. 彼らの結果を用いた別証明を与える前に次の 2 つの定義を述べる.

X, Y を Banach 空間とする. Banach 空間 Y が X で *finitely representable* (Y is f.r. in X) であるとは, 任意の $\lambda > 1$ と Y の任意の有限次元部分空間 Y_0 に対して次の不等式が成立する Y_0 から X の中への位相同型写像 T が存在する:

$$\lambda^{-1}\|y\| \le \|Ty\| \le \lambda\|y\| \quad (\forall y \in Y_0).$$

$1 < p \le 2$ とする. ある定数 M と s $(1 \le s < \infty)$ が存在して, 任意の $x_1, \cdots, x_n \in X$ に対して

$$\left(\frac{1}{2^n}\sum_{\theta_j=\pm1}\left\|\sum_{j=1}^{n}\theta_j x_j\right\|^s\right)^{1/s} \le M\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^p\right)^{1/p}$$

が成り立つとき, X は *type p* であるという. また, $p(X) = \sup\{p : X \text{ is of type } p\}$ と置く.

[定理 3 の別証明] いま, $\widetilde{X}$ を L_p と位相同型な Banach 空間とすると, $p(L_p) = p$ であるから, $p(\widetilde{X}) = p$. Maurey-Pisier([12]) の定理より, ℓ_p が $\widetilde{X}$ で finitely representable となるので $2^{2/p-1} = C_{NJ}(\ell_p) \le C_{NJ}(\widetilde{X})$. よって, $\widetilde{C}_{NJ}(L_p) = 2^{2/p-1}$ ■

定理 4 $1 \le t < 2$ とする. $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ を次の条件を満足する *Banach* 空間の列とする:

(I) 各 X_n は有限次元,

(II) $\sup_{m,n} C_{NJ}^{(2^m)}(X_n)/t^m = \infty$,

(III) $\lim_{n\to\infty} C_{NJ}(X_n) = t$.

また, $X = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\oplus X_n\right)_{\ell_2}$ ($\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ の ℓ_2-直和) と置く. このとき, $\widetilde{C}_{NJ}(X) = t$ で, X と位相同型なすべての *Banach* 空間 $\widetilde{X}$ に対して $t < C_{NJ}(\widetilde{X})$ が成り立つ. 特に, $\widetilde{C}_{NJ}(X) < C_{NJ}(X)$ が成り立つ.

証明 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$\begin{aligned}
\widetilde{C}_{NJ}(X) &= \widetilde{C}_{NJ}\left(\left((\sum_{k=1}^{n}\oplus X_k)_{\ell_2} \oplus (\sum_{k=n+1}^{\infty}\oplus X_k)_{\ell_2}\right)_{\ell_2}\right)\\
&= \max\left\{\widetilde{C}_{NJ}\left((\sum_{k=1}^{n}\oplus X_k)_{\ell_2}\right), \widetilde{C}_{NJ}\left((\sum_{k=n+1}^{\infty}\oplus X_k)_{\ell_2}\right)\right\} \quad (\because [13, \text{Corollary } 2.4])\\
&\le \max\left\{\widetilde{C}_{NJ}\left((\sum_{k=1}^{n}\oplus X_k)_{\ell_2}\right), C_{NJ}\left((\sum_{k=n+1}^{\infty}\oplus X_k)_{\ell_2}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

$(\sum_{k=1}^{n} \oplus X_k)_{\ell_2}$ は有限次元であり, Hilbert 空間と位相同型だから $\widetilde{C}_{NJ}\left((\sum_{k=1}^{n} \oplus X_k)_{\ell_2}\right) = 1$.
他方, [13, Lemma 2.3] と定理の仮定 (III) から,

$$\lim_{n\to\infty} C_{NJ}\left((\sum_{k=n+1}^{\infty} \oplus X_k)_{\ell_2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left\{\sup_{m\geq n+1} C_{NJ}(X_k)\right\} = t.$$

従って,

$$\widetilde{C}_{NJ}(X) \leq t. \tag{1}$$

次に X と位相同型な任意の $\widetilde{X}$ に対して, $t < C_{NJ}(\widetilde{X})$ が成り立つことを示す. 各 X_n の位相同型写像による像を $\widetilde{X}_n$ と置けば, ある $M > 0$ が存在して, 全ての $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$C_{NJ}^{(m)}(\widetilde{X}_n) \geq M \cdot C_{NJ}^{(m)}(X_n) \tag{2}$$

が成り立つ.

$$\begin{aligned}(C_{NJ}(\widetilde{X}))^m &\geq (C_{NJ}(\widetilde{X}_n))^m \quad (\because \widetilde{X} \supset \widetilde{X}_n)\\ &\geq C_{NJ}^{(2^m)}(\widetilde{X}_n) \quad (\because \text{命題 } 1)\\ &\geq M \cdot C_{NJ}^{(2^m)}(X_n) \quad (\because (2))\end{aligned}$$

$\dfrac{C_{NJ}(\widetilde{X})}{t}$ を評価するために, 次の不等式を評価する.

$$\begin{aligned}&\sup_{m\in\mathbb{N}}\left(\frac{C_{NJ}(\widetilde{X})}{t}\right)^m\\ \geq\ &\sup_{m,n\in\mathbb{N}} \frac{M\, C_{NJ}^{(2^m)}(X_n)}{t^m}\\ =\ &M \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \frac{C_{NJ}^{(2^m)}(X_n)}{t^m}\\ =\ &\infty. \quad (\because \text{定理の仮定 (II)})\end{aligned}$$

よって, $\dfrac{C_{NJ}(\widetilde{X})}{t} > 1$, 即ち, $t < C_{NJ}(\widetilde{X})$ であることが分かる. ここで, (X と位相同型な Banach 空間 として) $\widetilde{X}$ が任意だから, 不等式

$$t \leq \widetilde{C}_{NJ}(X)$$

が得られる.

(1) と合わせて, $\widetilde{C}_{NJ}(X) = t$ が成り立つ. ■

最後に, 定理 4 の条件 (I), (II), (III) を満たす例を紹介する.

$1 \leq t < 2$ とする. $t = 2^{2/p-1}$ を満たすように p をとる. すると, $1 < p \leq 2$ である. 更に, $1 \leq p_1 < p_2 < \cdots \nearrow p$ となるように数列 $\{p_n\}$ を任意にとる. 任意の n に対

して, ℓ_p^n の基本ベクトル $e_1=(1,0,\cdots,0)$, $\cdots$, $e_n=(0,\cdots,0,1)$ からなる元を $x_i=e_i$ $(1\le i\le n)$ と置き, 定義に従って評価すれば容易に次の不等式が得られる.

$$C_{NJ}^{(n)}(\ell_p^n)\ge n^{\frac{2}{p}-1}.$$

これより,

$$C_{NJ}^{(2^m)}(\ell_{p_n}^{2^m})\ge 2^{\frac{2m}{p_n}-m}=2^{(\frac{2}{p_n}-\frac{2}{p})m}\cdot t^m \quad \text{for } n,\, m\in\mathbb{N}.$$

ここで, 任意 n に対して, $\frac{2}{p_n}-\frac{2}{p}>0$ に注意すれば, 十分大きな m をとれば, $2^{(\frac{2}{p_n}-\frac{2}{p})m}\ge n$ とできる. つまり,

$$C_{NJ}^{(2^m)}(\ell_{p_n}^{2^m})\ge n\cdot t^m$$

が成り立つ. そこで, 各 n に対してこの条件を満たす m を選んで, $a_n=m$ と置く. このようにして得られた数列 $\{a_n\}$ を用いて有限次元 Banach 空間 X_n を定義する:

$$X_n=\ell_{p_n}^{2^{a_n}}.$$

このようにして X_n に対して定理 4 の条件 (I) が満たされていることがわかる.

また, a_n の定め方から,

$$\frac{C_{NJ}^{(2^{a_n})}(X_n)}{t^{a_n}}\ge n.$$

が得られ, 条件 (II) が成り立つことがわかる.

最後に,

$$\lim_{n\to\infty}C_{NJ}(X_n)=\lim_{n\to\infty}C_{NJ}(\ell_{p_n}^{2^{a_n}})=\lim_{n\to\infty}2^{\frac{2}{p_n}-1}=t.$$

より, 条件 (III) も成り立つことがわかる.

References

[1] G. Birkhoff, Orthogonality in linear metric spaces, Duke Math. J. **1**(1935), 169–172.

[2] J. A. Clarkson, The von Neumann-Jordan constant for the Lebesgue space, Ann. of Math. **38**(1937), 114–115

[3] R. C. James, Orthognality in normed linear spaces, Duke Math. J. **12**(1945), 291–302.

[4] R. C. James, Orthonality and linear functionals in normed linear spaces, Trans. Amer. Math. Soc. **61**(1947), 265–292.

[5] P. Jordan and J. von Neumann, On inner products in linear metric spaces, Ann. of Math. **36**(1935), 719–723.

[6] M. Kato and K. Miyazaki, The von Neumann-Jordan constant for $l_p^n(L_p)$-spaces, Bull. Kyushu Inst. Tech. Math. Natur. Sci. **40**(1993), 23–27.

[7] M. Kato and Y. Takahashi, Uniform convexity, uniform non-squareness and von Neumann-Jordan constant for Banach spaces, RIMS Kokyuroku (Kyoto Univ.) **939**(1996), 87–96.

[8] ———, On the von Neumann-Jordan constant for Banach spaces, Proc. Amer. Math. Soc. **125**(1997), 1055–1062.

[9] ———, Von Neumann-Jordan constant for Lebesgue-Bochner spaces, J. Inequal. Appl. **2**(1998), 89–97.

[10] M. Kato and Y. Takahashi and K. Hashimoto, On n-th von Neumann-Jordan constants for Banach spaces, Bull. Kyushu Inst. Tech. Pure Appl. Math. **45**(1998), 25–33.

[11] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, Classical Banach Spaces II, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1979.

[12] B. Maurey and G. Pisier, Series de variables aleatoires vectorielles independantes et properties geometriques des espaces de Banach, Studia Math. **58**(1976), 45–90.

[13] G. Nakamura and K. Hashimoto, On Banach spaces with $\widetilde{C}_{NJ}(X) = 1$, in preparation.

[14] Y. Takahashi and M. Kato, Von Neumann-Jordan constant and uniformly non-square Banach spaces, Nihonkai Math. J. **9**(1998), 155–169.