

結合振動子系のクラスター振動のヘテロクリニック構造： 理論と化学振動子を用いた実験

郡 宏*

お茶の水女子大学 先端融合系 お茶大アカデミック・プロダクション

概要

大域結合振動子集団で、slow switching 現象と呼ばれるクラスター振動現象が知られている。この現象の背後にはヘテロクリニック構造があり、これについて解説する。さらに、近年提案された制御手法を用いることにより、化学反応の実験系でこの現象を再現することに成功した。その制御手法と結果も簡単に解説する。

1 はじめに

結合振動子集団は非常に豊かな現象を示す。比較的単純なクラスである、振動子の性質が同一で、すべてがすべてと同様に結合する、いわゆる大域結合振動子集団でも、完全同期状態、クラスター状態、大自由度カオス、小自由度カオスなど、その振る舞いは多彩である [1, 2]。本稿では、slow switching 現象と呼ばれるクラスター振動現象について解説する。slow switching 現象とは、図 1 のように、クラスターの崩壊と生成を伴い、2つの集団の相対位置をスイッチさせながら 2 クラスター解に接近していく現象である。この現象は奥田、および、Hansel らが最初に発見し、構造安定なヘテロクリニック構造があることを示唆した [3, 4]。これは 2つのサドル間の遍歴現象で、様々な文脈から興味深い [5]。その機構は著者らの研究で明らかにされた [6, 7]。2 節では、どのようにしてヘテロクリニック構造が現れるのか、その機構を解説する。3 節では分岐を解析し、現象の一般性を明らかにする。ここまでは位相振動子モデルに限定しているが、4 節でリミットサイクル振動子に拡張し、さらに、リミットサイクル振動子集団で位相ダイナミクスをデザインする手法について解説する。

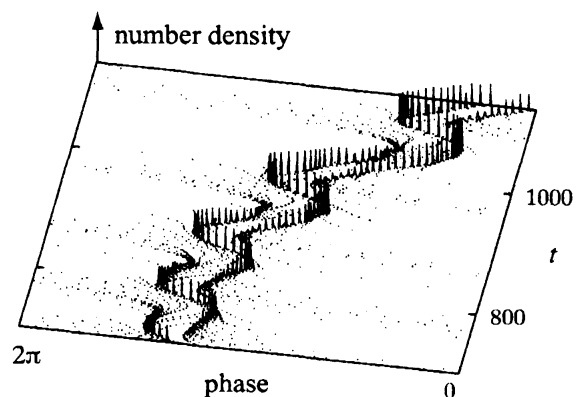


図 1: slow switching 現象。ある結合振動子集団モデル (100 個の振動子集団) を用いて、位相のヒストグラムの時間発展を表示している。(見やすいように、適当な慣性系からみた位相にしている。個々の振動子の振動周期は $O(1)$ である)。ランダムな初期条件から始めているが、やがて 2つの集団に分かれ、それぞれクラスターを形成する。しかし、位相的に先行しているクラスターはやがて崩壊し、もう一方のクラスターと相対的な位置をスイッチさせて、再びクラスターを形成する。やがてまた、新しく位相的に先行したクラスターが崩壊し、相対位置が逆転する。これを繰り返しながら、クラスターの輪郭は次第にはっきりしていき、同時に、クラスターの寿命も伸びていく。個々の振動子の振動周期に比べてずっと遅い時間スケールの集団運動の遷移現象である。

*electronic address: kori.hiroshi@ocha.ac.jp

2 Hanselらの位相モデル

次の運動方程式を考える.

$$\dot{\phi}_i = \omega + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \Gamma(\phi_i - \phi_j) \quad (1)$$

ここで, ϕ_i は振動子 i の位相 ($i = 1, \dots, N$), ω は自然振動数, $\Gamma(\phi)$ は結合関数と呼ばれる 2π 周期関数, $K > 0$ は結合強度である. このモデルは位相振動子モデルと呼ばれ, 弱く相互作用するリミットサイクル振動子集団の一次の摂動系として求まる, 一般的な運動方程式である [1]. 式 (1) では, $\phi - \omega t \rightarrow \phi$ と回転座標系に移り, さらに時間を $Kt \rightarrow t$ とリスケールすることにより, 一般性を失わずに $\omega = 0, K = 1$ とできる. 従って, この系の解の存在と安定性は結合関数 $\Gamma(\phi)$ だけに依存する. 以後 $\omega = 0$ とおき, $K > 0$ の値は便利のように適当にとる.

この節では, Hansel らが導入した次の結合関数を考える [4].

$$\Gamma(\phi) = -\sin(\phi + \alpha) + r \sin(2\phi). \quad (2)$$

パラメタ α と r の値により, 例えば, 完全同期解や, 集団が均等に分裂し, 位相差が π となる 2 クラスタ解の安定性が変化する. これらの解はどのような結合関数でも存在する自明解である. 一方, 集団間の位相差が π でない非自明な 2 クラスタ解も存在できる. 例えば, $\alpha = 1.25, r = 0.25$ (図 2 参照) と選ぶとそのような解が現れ, このとき slow switching 現象が現れる [4].

2.1 Slow switching 現象

Slow switching 現象は $N \geq 4$ で現れる. ここでは最小の $N = 4$ とする. $\alpha = 1.25, r = 0.25$ では, ランダムな初期条件から始めると, 初期条件によらず, 図 3 のようにクラスタの構築と崩壊を伴いながら, クラスタの相対位置を繰り返しスイッチさせる現象が繰り返される. 以下に示すように, 2 クラスタ解の安定性を調べるとサドル解である. そして, 相対位置を反転させた別の 2 クラスタ解との間に, 構造安定でアトラクティングな heteroclinic loop が存在し, 系がそこに接近することによって slow switching 現象が起こる.

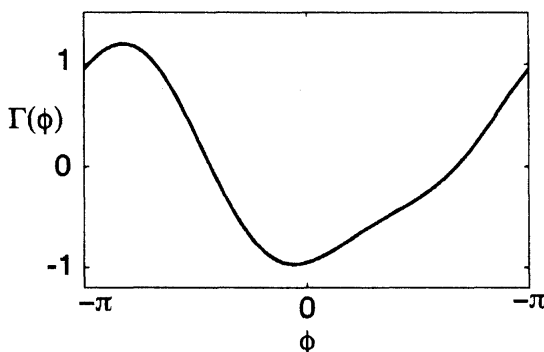


図 2: Hansel らの結合関数. $\alpha = 1.25, r = 0.25$.

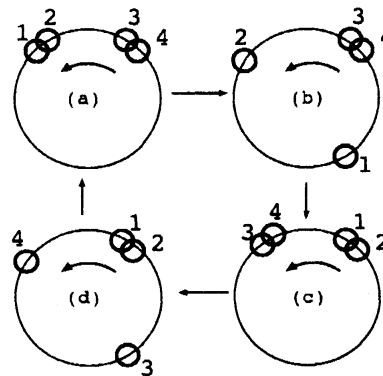


図 3: slow switching (2 クラスタ振動) 現象. (a) と (c) に長時間滞在する.

2.2 2 クラスタ解の存在と安定性

ある結合関数 $\Gamma(\phi)$ が与えられたとき、2 クラスタ解の存在と安定性は次のように与えられる。2 つのクラスタを、それぞれ A クラスタ、B クラスタと呼び、それぞれ 2 つずつの振動子 ($1, 2 \in A; 3, 4 \in B$) で構成されているとする。このとき (1) は

$$\dot{\phi}_{i \in A} = \Gamma(0) + \Gamma(x), \quad (3)$$

$$\dot{\phi}_{i \in B} = \Gamma(0) + \Gamma(-x), \quad (4)$$

となる。ここで x はクラスタ間の位相差 $x \equiv \phi_{i \in A} - \phi_{i \in B}$ である。式 (3) から式 (4) を引くと、次を得る。

$$\dot{x} = \Gamma(x) - \Gamma(-x), \quad (5)$$

定常解 $\dot{x} = 0$ (位相差がロックした解) を 2 クラスタ解と呼ぶことにし、そのときの位相差を x^* と記す。この解の線形安定性を調べると、次の 4 つの固有値が得られる。

$$\lambda_0 = 0, \quad (6)$$

$$\lambda_1 = \Gamma'(0) + \Gamma'(x^*), \quad (7)$$

$$\lambda_2 = \Gamma'(0) + \Gamma'(-x^*), \quad (8)$$

$$\lambda_3 = \Gamma'(x^*) + \Gamma'(-x^*). \quad (9)$$

ここで、 $\lambda_{1(2)}$ はそれぞれ、A(B) クラスタを構成する 2 つの振動子間の距離への摂動に対する安定性に対応する。つまり、それぞれ摂動方向 $\Delta \vec{\phi} = (1, -1, 0, 0)$ と $\Delta \vec{\phi} = (0, 0, 1, -1)$ に対応する。 λ_3 は 2 つのクラスタ内部はそのままに、クラスタ間の距離に対する摂動 $\Delta \vec{\phi} = (1, 1, -1, -1)$ に対応する。 $\lambda_0 = 0$ は全位相のシフト (つまり $\Delta \vec{\phi} = (1, 1, 1, 1)$) に関係し、この運動は振動子間の相対運動に寄与しない。従って以後、この自由度をのぞいた $N - 1$ 次元の相空間の構造に着目する。

結合関数 (2) で $\alpha = 1.25, r = 0.25$ の場合は、 $x^* \sim 0.89, \lambda_1 \sim 0.62, \lambda_2 \sim -0.86, \lambda_3 \sim -0.60$ となり、2 クラスタ解がサドル解であることが確認できる。ペアをなすもう一方の解 $x = -x^*$ については、 λ_1 と λ_2 の値が入れ替わる。なお、自明解 $x = 0$ と $x = \pi$ はソース解であることが簡単に示せる。

2.3 構造安定なヘテロクリニック構造

次に、サドルである 2 クラスタ解と、相対位置を反転させた別の 2 クラスタ解との間に、構造安定な heteroclinic loop が存在できることを示す。

まず、系 (1) に不変部分空間が存在することを示す。系 (1) では、どの振動子も同一の振動数を持ち、かつ、すべてがすべてと同様に結合しているため、どの振動子も同一な運動方程式に従う。言い換えると、2 つの振動子の入れ替えにたいし、運動方程式が不変という対称性を持っている。このため、ある時間において複数の振動子が同一の位相を持つ場合、すべての時間において、同一の位相となる。つまり、 $\phi_i = \phi_j$ は不変部分空間である。

図 4 は 3 次元相空間 (例えば $\phi_1 - \phi_4, \phi_2 - \phi_4, \phi_3 - \phi_4$ の座標系) である。2 つの平面 E_A と E_B は、それぞれ、不変部分空間 $\phi_1 = \phi_2$ と $\phi_3 = \phi_4$ である。不変部分空間の交線に、ペアをなす 2 つの 2 クラスタ解 ($x = \pm x^*$) と自明解 ($x = 0, \pi$) が存在する。

次に、解 $x = x^*$ 近傍の安定・不安定多様体に着目しよう。先ほどの線形安定性の議論から明らかのように $\lambda_{1,2,3}$ に対応する安定・不安定部分空間は、それぞれ、 $E_A, E_B, E_A \cup E_B$ 上にある。これらの部分空間が不変部分空間になっているので、結局、安定・不安定多様体

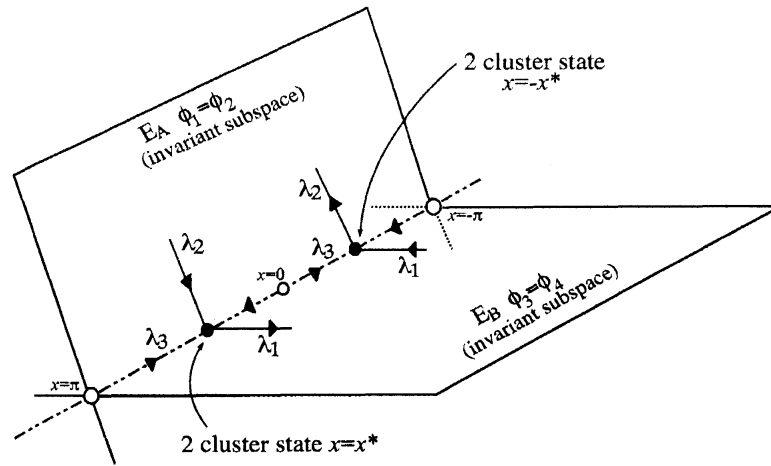


図 4: 構造安定な heteroclinic loop.

は、それぞれの不変部分空間に閉じこめられている。同様の議論が、解 $x = -x^*$ に対してもなされ、図 4 の構造を得る。さて、図を見れば明らかなどおり、解 $x = x^*$ は不変部分空間 E_B の、解 $x = -x^*$ は不変部分空間 E_A でアトラクタとなっている。このため、不安定多様体が構造安定にもう一方の解に接続可能となる。実際に接続されるかどうかは、不変部分空間内の大域的な構造が関わるが、各不変部分空間に他のアトラクタがなければ、必ず heteroclinic loop が存在する。構造安定なので、幅を持つパラメタ領域で heteroclinic loop が存在できる。実際、 α と r の広いパラメタ領域で slow switching 現象が確認される。

2.4 Attracting heteroclinic loop

サドル解の十分近傍のダイナミクスを考えることにより、heteroclinic loop がアトラクティングかどうかを判別することができる [4]。結果だけ述べると、 $\lambda_1 < -\lambda_2$ かつ $\lambda_3 < 0$ のときにアトラクティングとなり、サドル解に接近することが示せる [4]。先ほどの例はこの条件を満たしており、そのため、ランダムな初期条件からでもサドル解に接近することが可能であった。なお、サドルへの接近に伴い、サドル近傍の滞在時間は指数関数的に長くなっていく。特に工夫をしていない数値計算では、丸め誤差のため、ある程度時間がたつと 2 クラスタ解に収束してしまい、クラスタ振動が止まる。

2.5 集団での slow switching

クラスタ振動は集団のサイズ N が大きい場合にも同様に現れる。この場合の構造はどのようなになっているのだろうか？

一般の N の場合、クラスタのサイズの異なる 2 クラスタ解が存在できる。A クラスタが振動子 $i = 1, \dots, Np$ 、B クラスタが振動子 $i = Np + 1, \dots, N$ で構成されているとする。便利のため $K = 1$ と置く。各クラスタに所属する位相は次の運動方程式に従う。

$$\dot{\phi}_{i \in A} = p\Gamma(0) + (1-p)\Gamma(x), \quad (10)$$

$$\dot{\phi}_{i \in B} = (1-p)\Gamma(0) + p\Gamma(-x), \quad (11)$$

辺々引くと、位相差 x の運動方程式を得る。

$$\dot{x}(t) = K\{(2p-1)\Gamma(0) + (1-p)\Gamma(x) - p\Gamma(-x)\}, \quad (12)$$

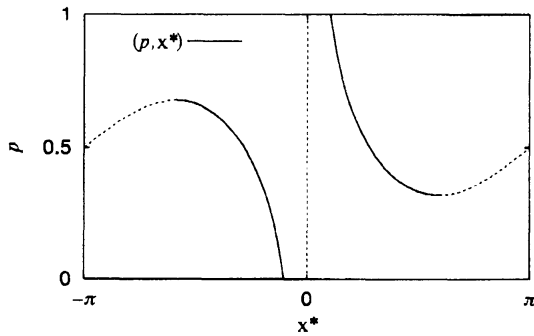


図 5: 集団の場合の 2 クラスタ解 (p, x^*) . 実線と点線は, それぞれ $\lambda_3 \leq 0$ と $\lambda_3 > 0$ に対応する.

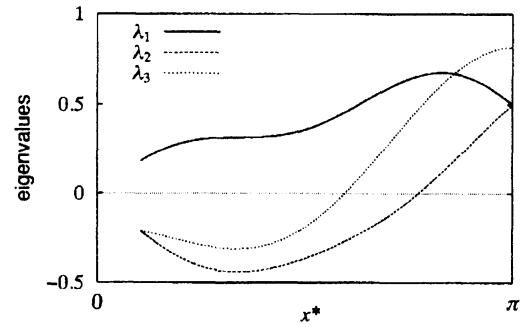


図 6: 2 クラスタ解 (p, x^*) の固有値.

つまり, 2 クラスタ解, $\dot{x} = 0$, は次の条件を満たす p と x がある時に存在する.

$$p = \frac{\Gamma(0) - \Gamma(x)}{2\Gamma(0) - \Gamma(x) - \Gamma(-x)}, \quad (13)$$

この条件を満たす 2 クラスタ解を (p, x^*) と記述する. 解 (p, x^*) の安定性解析は $N = 4$ の場合と同様に行え, 次の結果を得る.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= p\Gamma'(0) + (1-p)\Gamma'(x^*) & \text{縮退度 } Np - 1, \\ \lambda_2 &= (1-p)\Gamma'(0) + p\Gamma'(-x^*) & \text{縮退度 } N(1-p) - 1, \\ \lambda_3 &= (1-p)\Gamma'(x^*) + p\Gamma'(-x^*) & \text{縮退度 } 1. \end{aligned} \quad (14)$$

結合関数 (2) で $\alpha = 1.25, r = 0.25$ の場合の (p, x^*) と固有値を, 図 5 と図 6 に表示する.

2.3 節と同様の議論により, 構造安定な heteroclinic loop が (p, x^*) と (p, x'^*) との間に存在可能であることがわかる ($p \neq 0.5$ では $x^* \neq -x'^*$ である). 必要条件是 (p, x^*) の固有値 $\lambda_{1,2,3}$ と (p, x'^*) の固有値 $\lambda'_{1,2,3}$ に対して $\lambda_1, \lambda_2 > 0; \lambda_2, \lambda'_1, \lambda_3, \lambda'_3 < 0$ である. さらに heteroclinic loop がアトラクティングになるために $\lambda_1 \lambda'_2 / \lambda_2 \lambda'_1 < 1$ が必要条件となる. 一般に幅を持つ p に対して heteroclinic loop が存在できる. 実際, 数値シミュレーションをすると, 初期条件によって異なる集団比の 2 クラスタに接近し, クラスタ振動が起こる.

3 分岐構造

系 (1) において, アトラクティングな heteroclinic loop はどの程度一般的に現れるのだろうか? それを明らかにするために分岐構造を調べる. 以下, 完全同期解が不安定化する近傍で, 非常に緩やかな条件下でアトラクティングな heteroclinic loop が存在することが示される. 簡単のため, ここでも $N = 4$ とし, 2 つずつに分かれる 2 クラスタ解のみ扱う. 分岐パラメータ τ を次のように導入する¹.

$$\dot{\phi}_i = \omega + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \Gamma(\phi_i - \phi_j + \tau). \quad (15)$$

¹ τ は 4 節で説明するとおり, 振動子間の結合に時間遅れを導入したときに, 位相モデルに自然に現れるパラメータである.

まず、完全同期解 ($\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4$) の安定性について簡単に説明する。 $N - 1$ 個の固有値はすべて縮退しており $\lambda_{\text{perfect}} = KI'(\tau)$ である。つまり、結合関数 $\Gamma(\phi)$ が $\phi = \tau$ で負の傾きを持っていると安定である。この解が不安定化する近傍での 2 クラスタ解の安定性に興味があるため、 $\phi = \tau_c$ で極小となる結合関数を仮定し、 $\tau = \tau_c$ 近傍を調べる。結合関数を $\phi = \tau_c$ 近傍で次のように展開する。

$$\Gamma(\phi) = c_0 + c_2(\phi - \tau_c)^2 + c_3(\phi - \tau_c)^3 + O((\phi - \tau_c)^4). \quad (16)$$

仮定から $c_2 > 0$ である。 $\omega - Kc_0 \rightarrow \omega, |c_3|K \rightarrow K, c_2/|c_3| \rightarrow c_2$ と変換することにより、 $c_0 = 0, c_3 = c_3/|c_3|$ と一般性を失わずに置ける。

まず $c_3 < 0$ の場合を考える (結合関数 (2) で slow switching 現象が出るときは、実際 $c_3 < 0$ である)。 $c_3 = -1$ と置く。クラスタ間の位相差 x^* は、 $\dot{x} = \Gamma(x + \tau) - \Gamma(-x + \tau) = 0$ から次のように求まる。

$$x^* = 0, \pm\sqrt{\Delta\tau}\sqrt{2c_2 - \Delta\tau} + O(\Delta\tau^{\frac{3}{2}}). \quad (17)$$

ここで $\Delta\tau = \tau - \tau_c$ を導入した。2 クラスタ解 $x^* = \sqrt{\Delta\tau}\sqrt{2c_2 - \Delta\tau}$ を式 (7-9) に代入すると固有値が次のように求まる。

$$\lambda_1 = 2c_2(x^* - \Delta\tau) + O(\Delta\tau^{\frac{3}{2}}), \quad (18)$$

$$\lambda_2 = -2c_2(x^* + \Delta\tau) + O(\Delta\tau^{\frac{3}{2}}), \quad (19)$$

$$\lambda_3 = -8c_2\Delta\tau + O(\Delta\tau^{\frac{3}{2}}). \quad (20)$$

これらの固有値は、アトラクティングな heteroclinic loop ができるための固有値に関する必要条件のすべて ($\lambda_1 > 0, \lambda_{2,3} < 0, \lambda_1 < -\lambda_2$) を満たしている。従って、 $c_3 < 0$ の場合は次のようにまとめられる。

- (i) $\tau = \tau_c$ において、完全同期解が超臨界ピッチフォーク分岐によって不安定化
- (ii) 分岐後に現れる 2 つの分枝は 2 クラスタ解で、サドル解である
- (iii) この 2 つの分枝は構造安定にヘテロクリニック接続可能
- (iv) Heteroclinic loop が存在すれば、それはアトラクティングである。

では、 $c_3 > 0$ の場合はどうであろうか？ この場合は結合関数の極値近辺をより高次まで展開しなくてはならないので複雑になる。条件によっては、亜臨界ピッチフォーク分岐によって現れる分枝間にアトラクティングな heteroclinic loop が形成される場合がある。このとき、完全同期解とクラスタ振動状態がともに安定解となる τ の領域が存在する。式 (2) と異なる結合関数を用いた数値シミュレーションで、これも確認されている [8]。

4 リミットサイクル振動子集団でのクラスタ振動

ここまでは位相モデル (1) を調べてきたが、同様の現象は結合リミットサイクル振動子集団でも現れる。この節では、まず、3 節の知見を生かし、完全同期している系に結合に遅れをいれて不安定化させ、slow switching 現象を出現させる。次いで、任意の結合関数に帰着するような結合の設計手法を説明し、これを利用した化学反応系で実験的にクラスタ振動を実現した研究を紹介する [9, 10]。

4.1 位相モデルにおける結合の遅れ

次のような、時間遅れを持って結合するリミットサイクル振動子がどのような位相モデルに帰着するかを調べる。

$$\frac{d\mathbf{A}_i}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{A}_i) + K\mathbf{G}(\mathbf{A}_i(t), \mathbf{A}_j(t-s)), \quad (21)$$

ここで、 \mathbf{A}_i は振動子 i の状態変数 ($i = 1, 2; j = 2, 1$), \mathbf{F} はリミットサイクルを作る非線形関数, \mathbf{G} は振動子間の結合を表す何らかの関数, s は結合の時間遅れである. 結合が弱い (K が小さい) 場合は次のような位相モデルに縮約できる.

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega + K\Gamma(\phi_i(t) - \phi_j(t-s)). \quad (22)$$

結合関数 Γ は文献 [1] の方法に従うことにより, 時に解析的に, 多くの場合は数値的に導出できる. ここで, 式 (22) が $\dot{\phi}_i = \omega + O(K)$ であることから, 次の関係を得る.

$$\phi_j(t-s) = \phi_j(t) - \omega s + O(Ks). \quad (23)$$

これを式 (22) に代入し, 次を得る.

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega + K\Gamma(\phi_i(t) - \phi_j(t) + \omega s) + O(K^2s). \quad (24)$$

従って, $K^2s \ll K$, つまり, $Ks \ll 1$ である限り, 時間遅れは結合関数のパラメタとして取り込まれ, 時間遅れが陽には現れない自励系となっている. 多数の振動子に対しても同様の近似ができることは明らかであろう. 位相モデル (24) は元のモデル (21) に比べて解析がはるかに簡単である.

4.2 結合の遅れによる heteroclinic loop の出現

位相モデル (24) は 3 節で導入した位相モデルと同じである. 従って, 結合遅れのあるリミットサイクル振動子集団では, 遅れの大きさによって, 完全同期状態の不安定化と, その近傍での heteroclinic loop の出現が期待できる. これを具体的なモデルを用いて実証する.

次のリミットサイクル集団を考える.

$$\frac{d\mathbf{A}_i}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{A}_i) + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \{\mathbf{A}_j(t-s) - \mathbf{A}_i(t)\},$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 3x^2 - x^3 + y + 1 \\ 1 - 5x^2 - y \end{pmatrix}. \quad (25)$$

ここで, $\mathbf{A} = (x, y)^T$ で, 系 $\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{F}(\mathbf{A})$ は Hindmarsh-Rose モデルと呼ばれ, 安定なリミットサイクル解を持つ. $s = 0$ のとき, モデル (25) に対応する結合関数 Γ は数値的に求めることができる (図 7). 結合関数の形と 3 節の解析から, 次のことがわかる. $\Gamma'(0) < 0$ より, 完全同期解が時間遅れがないときに安定であるが, 閾値以上の時間遅れ $\omega s \geq \tau_c$ に対しては不安定である. 極小付近の曲線の形をみると, 右側のほうがなだらかであり, これ

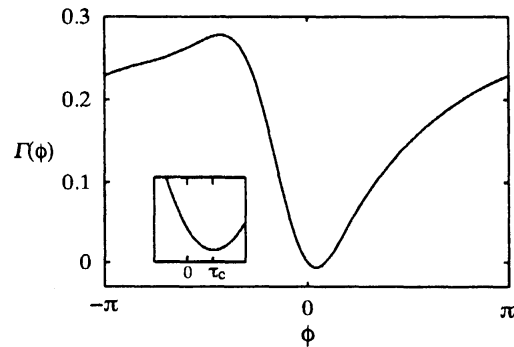


図 7: モデル (25) に対応する結合関数. 極小は $\phi = \tau_c \sim 0.13$ にある.

は式 (16) で $c_3 < 0$ に対応することを示唆している (実際に数値的にフィッティングすると $c_3 < 0$ である). 従って, $\omega s \geq \tau_c$ では超臨界ピッチフォーク分岐で 1 組のサドル解が出現し, その間に heteroclinic loop が形成されることが期待できる. 実際, $K = 0.1, N \geq 4$ で, ランダムな初期条件から数値シミュレーションを行い, $\omega s = 0$ の場合は完全同期状態, $\omega s = 0.3$ の場合は slow switching 現象を確認した.

4.3 delayed feedback を利用した結合関数のデザイン

結合遅れをうまく使うと, 任意の結合関数に帰着するような結合リミットサイクル振動子をデザインできる. 実際, 著者らは, このアイデアに基づき, 化学反応実験系で Hansel らの結合関数 (2) に帰着するようなフィードバック結合系を作り, slow switching 現象を実現させた [9, 10]. この手法の理論を簡単に説明する.

次のような結合リミットサイクル振動子集団を考える.

$$\frac{d\mathbf{A}_i}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{A}_i) + K \sum_{j=1}^N \mathbf{P}_j(t) \quad (26)$$

ここで, $\mathbf{A}_i = (x_i, y_i, \dots)^T$ は振動子 i の状態変数, \mathbf{F} はリミットサイクル振動を記述する非線形関数である. 関数 $\mathbf{P}_j(t)$ は次のように与える.

$$\mathbf{P}_j = \{p(x_j), 0, \dots\}^T, \quad (27)$$

$$p(x_j) = \sum_{n=0}^M k_n \{x_j(t - \tau_n) - a_0\}^n. \quad (28)$$

関数 p は次数 M の多項式で, 各項はそれぞれ異なる時間遅れを伴う. k_n と τ_n はそれぞれ n 次項の結合強度と時間遅れと呼ぶ. a_0 は, 結合がない状態 ($\epsilon = 0$) での x_2 の平均値である. この結合は, つまり, 振動子の状態変数の一成分 (この場合は x 成分) から計算され, またその成分に与えられている. これは, 時間遅れのある大域的なフィードバック結合 (global delayed feedback) で, 実験的に実現しやすい結合である.

式 (26) に対応する結合関数は次のように求まる.

$$\Gamma(\phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Z_x(\lambda) p(\phi + \lambda) d\lambda. \quad (29)$$

ここで, $Z_x(\phi)$ は位相応答関数と呼ぶ関数で, 単一のリミットサイクル振動子のリミットサイクル近傍での位相勾配 $Z_x(\phi) = \partial\phi/\partial x$ である. 関数 Γ, Z_x, p の関係を明確にするために, 各量を次のようにフーリエ級数で展開する.

$$\Gamma(\phi) = \sum_l g_l e^{il\phi}, \quad Z_x(\phi) = \sum_l z_l e^{il\phi}, \quad x(\phi) = \sum_l a_l e^{il\phi}. \quad (30)$$

さらに, 結合を受けてない振動子の位相について成り立つ関係式 $\phi(t - \tau) = \phi(t) - \omega\tau$ から次を得る.

$$x[\phi(t - \tau)] = \sum_l a_l e^{il\phi(t)} e^{-il\omega\tau}. \quad (31)$$

これを用いて, 関数 $p(\phi)$ は次のように展開できる.

$$p(\phi) = \sum_n k_n \{x(t - \tau_n) - a_0\}^n = \sum_n k_n \left\{ \sum_{l \neq 0} a_l e^{il\phi} e^{-il\omega\tau_n} \right\}^n \equiv \sum_l b_l e^{il\phi}. \quad (32)$$

これらのフーリエ係数を用いると式 (29) から次の関係式を得る (畳み込みの公式である)。

$$g_l = z_l b_{-l}. \quad (33)$$

なお各関数は実関数なので、各フーリエ係数 c_l ($c \equiv h, z, a, b$) が $c_l = c_{-l}^*$ を満たすことを注意しておく。

ここで、 $x(\phi)$ と $Z_x(\phi)$ の関数形がわかっているとす。 b_l は $a_0, a_{\pm 1}, \dots, k_0, \dots, k_M, \tau_1, \dots, \tau_M$ の関数であり、 $2M+1$ 個のパラメタ k_n と τ_n を用いると、 $2M+1$ 個の b_l ($l = 0, \pm 1, \dots, \pm M$) を任意に作るができる。つまり、 $z_l = 0$ でない限り、任意の g_l ($l = 0, \pm 1, \dots, \pm M$) を設計できる。また逆に、あるターゲットとなる g_l ($l = 0, \pm 1, \dots, M$) が与えられたとき、非線形方程式 (33) を解くことにより、パラメタ k_n と τ_n を決定できる。

文献 [9, 10] では、化学反応振動子集団にこの手法を適用し、slow switching 現象のみでなく、種々のクラスター状態や、位相がばらばらとなる非同期状態などを実現している。

5 まとめ

大域結合振動子系に現れるクラスタ振動現象とその背後にあるヘテロクリニック構造について解説をした。最近 P. Ashwin など違った側面から研究を進めている (例えば文献 [11] を参照)。また、振動子集団の複雑な位相ダイナミクスを実験的に実現する制御手法についても簡単に解説をした。

参考文献

- [1] Y. Kuramoto. *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*. Springer, New York, 1984.
- [2] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths. *Synchronization: A universal concept of nonlinear sciences*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [3] K. Okuda. Variety and generality of clustering in globally coupled oscillators. *Physica D*, **63**, 424, 1993.
- [4] D. Hansel, G. Mato, and C. Meunier. "Clustering and slow switching in globally coupled phase oscillators". *Phys. Rev. E*, **48**, 347, 1993.
- [5] P. Ashwin and M. Timme. Nonlinear dynamics – when instability makes sense. *Nature*, **436**, 36, 2005.
- [6] H. Kori and Y. Kuramoto. "Slow switching in globally coupled oscillators". *Phys. Rev. E*, **63**, 046214, 2001.
- [7] H. Kori. Slow switching in a population of neuronal oscillators. *Phys. Rev. E*, **68**, 021919, 2003.
- [8] H. Kori. Slow switching in globally coupled oscillators. *Doctoral thesis, Kyoto University*, 2003.
- [9] Istvan Z. Kiss, Craig G. Rusin, Hiroshi Kori, and John L. Hudson. "Engineering Complex Dynamical Structures: Sequential Patterns and Desynchronization". *Science*, **316**, 1886, 2007.

- [10] Hiroshi Kori, Istvan Z. Kiss, Craig G. Rusin, and John L. Hudson. “Synchronization Engineering: Theoretical Framework and Application to Dynamical Clustering”. *To appear in CHAOS*; arXiv:0806.0705.
- [11] P. Ashwin and J. Borresen. Encoding via conjugate symmetries of slow oscillations for globally coupled oscillators. *Phys. Rev. E*, **70**, 026203, 2004.