

## 結合系における進行波の研究

京都大学 理学研究科 山下 正雄

2008 年 6 月 16 日

### 1 序文

本論文では結合系の数理, 特に結合系における進行波の数理現象を論じる. 結合系とは, 個々に時間的な発展法則を持った素子たちが, 相互に作用を及ぼし合ってなす系のことを指す. そこでは個々の素子の状態だけでなく, 相互作用によって形成される系全体としての構造に興味がある. 数学的には, 結合系は各素子の時間発展を記述する微分方程式や差分方程式を, 様々な形で結合させた大自由度の力学系として表される. 結合系の例は自然界にも多く存在する. 例えば, 多数の足を持ったムカデが, 波打つように順々に足を動かしていく歩行運動が観測されている. また波面の動きなどもミクロな視点で見れば, 各分子が相互に影響して全体としての波面を作り出していると言える. あるいは, 一定のリズムで点滅を繰り返す蛍火たちが, 何らかの影響を及ぼし合って一斉に同じリズムで光り出す同期現象も有名である. これらの様々な自然現象を捉えるための結合系の数理モデルも多数存在する. 例えば各素子の状態を表す常微分方程式を散逸的に結合させたもの考えることが出来る. また, 一定の振動数で周期的な運動をする振動子の位相を表す常微分方程式を多数結合させた, 結合振動子系と呼ばれるモデルがあり, すべての振動子が近い位相で一斉に振動する同期現象が観測され, その後多くの研究がなされている. このように, 結合系は一般に離散的な空間構造の上で相互作用を持った素子たちの状態を記述する方法として用いられる.

一方で, 自然現象を記述する方法として代表的なものとして, 偏微分方程式による数理モデル化がある. 例えば, 反応拡散方程式系と呼ばれる非線形現象を捉える様々な数理モデルが存在し, 時空間パターンの形成など多くの研究がなされている. しかしながら, 多数の素子についての数理モデルを偏微分方程式としてモデル化する際には, 近似的な手法に頼っている場面が多く存在し, それによって得られたモデルが現象を忠実に再現しているとは言い難い. また, 偏微分方程式を数値計算によって解こうとするときには, 時空間差分を考える必要があり, 離散的な空間構造とそこでの相互作用によって結合系が自然に現れることにも注意する. 従って自然現象を数理的に理解するためには偏微分方程式に代表されるような連続的な数理モデル, そして結合系のような離散的なモデルの双方での解析が必要である.

本論文では結合系の 1 つの定式化として, 一定の時間発展法則を持った多数の素子が格子状の離散的な空間上に結合した, 格子結合系と呼ばれる概念を導入し, 結合系を無限次元空間上の力学系として定式化する. そしていくつかの格子結合系において, 特徴的な空間パターンが多数存在することを見る. 特に本論文では格子結合系における進行波についての解析を行う. 進行波とはある空間的波形を持って, その波形を保ち一定速度で移動する解のことを言う. 格子結合系における進行波の 1 つの大きな特徴として, propagation failure, あるいは pinning と呼ばれる現象がある. それはある一定の大きさを持ったパラメタ領域において, 速度が 0 でない進行波解が存在し得なくなることを言う. このような現象はもともと実験などによって観測されていた

が、格子という離散的な空間構造を考えることで初めて数学的にも捉えられるようになった事柄として、特に重要である。さらに、多次元の離散的な空間において、一定の方向へ進むような進行波、すなわち平面進行波を考えるとき、pinning の起こるパラメタ領域が波の進行方向によって不連続に変化する、crystallographic pinning と呼ばれる現象が観測される。また逆に、結合系における進行波の偏微分方程式への連続極限についての問題も議論し、偏微分方程式の空間離散により得られた結合系における進行波の存在と、空間離散幅を 0 に近づけていくときに、結合系の進行波がある意味でもとの偏微分方程式の進行波に収束することが示される。この事実は空間離散的な結合系と、空間連続的な偏微分方程式の類似点として重要である。

本論文の内容は、まず 2 章において結合系のいくつかの例を取り上げ、格子力学系の概念を導入する。そして、結合系の平衡解、すなわち空間パターンが多く存在することを示す。3 章においては進行波について考え、離散空間特有の現象を取り扱う。

## 2 格子結合系

大雑把に言うとも格子結合系とは、格子 (例えば  $d$  次元整数格子  $\mathbf{Z}^d$ ) 状に結合した、無限個の常微分方程式系のことを言う。結合系を構成する要素は、素子と呼ぶ各常微分方程式の持つ時間発展法則、特にその非線形性、それらの素子の相互作用、素子全体が結合されることで作られる離散的な空間構造である。序章で述べたように結合系によって数理モデル化される非線形現象には様々なものがあり、また偏微分方程式の空間離散化によっても結合系を得ることができる。すなわち空間微分を差分に置き換えることで、離散的な空間上での個々の素子の相互作用を表す結合系を構成するのである。差分の取り方によって結合系の空間構造や相互作用は変化し、従って 1 つの偏微分方程式に対しても様々な結合系が取り出せることがわかる。また、偏微分方程式由来でない結合系も存在する。このような非線形現象を表す数理モデルとしての結合系、もしくはそのような偏微分方程式の空間離散化として得られる結合系においては、数値計算などにより様々な時空間パターンやその遷移現象が観測されている。しかしながら、これらの厳密な数理的解析はまだ十分にはなされていない。

この章ではまず 2.1 節において、本論文で扱うものを含めたいくつかの結合系の例を取り上げる。その際に結合系を大まかに、局所的な相互作用を持ったものと、大域的な相互作用を持ったものに分類する。また非線形項についても代表的なものを取り上げる。2.2 節では、結合系の 1 つのクラスとして、Chow[12] らによって研究されている *Lattice Dynamical System* (以下格子結合系と呼ぶことにする) について述べる。ここでは、結合系を一般に無限次元空間 (通常はバナッハ空間) 上の力学系として定式化する。

### 2.1 結合系の様々な例

この節では、本論文で扱うものを含め、いくつかの典型的な結合系の例を挙げる。結合系の要素となる離散的な空間構造、素子間の相互作用、そして非線形性を大きく分類し、結合系の基本的なタイプについての概観を与える。

#### 例 1

神経細胞の興奮を表すモデル

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= f(u, v) + I, \quad u \in \mathbf{R}, \\ \frac{dv}{dt} &= g(u, v), \quad v \in \mathbf{R}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

ここで  $u$  は神経細胞の膜電位を表す変数であり、 $v$  は recovery variable と呼ばれる変数、 $I$  は神経細胞への入

力電流である。このモデルは Hodgkin-Huxley[18] により研究された 4 変数モデルの簡略化として, FitzHugh により提唱された [17].

このような神経細胞が多数存在し, それらの間に何らかの電氣的な相互作用がある状況を考える。簡単のため入力電流を  $I = 0$  とし, 各神経細胞は軸上に抑制的に結合されていると仮定すると,

$$\begin{aligned}\frac{du_n}{dt} &= \alpha(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) + f(u_n, v_n), \\ \frac{dv_n}{dt} &= g(u_n, v_n)\end{aligned}\quad (2.2)$$

という結合系を得る。ここで  $n$  は軸上に配置された素子の番号付けであり,  $\alpha$  は結合の強さを表すパラメタである。

もし空間スケールを考慮し  $\delta x$  を素子間の距離として  $u_n(t) = u(n\delta x, t), v_n(t) = v(n\delta x, t)$  とおくと, 結合系 (2.2) は  $x = n\delta x$  において

$$\begin{aligned}\frac{du(x, t)}{dt} &= \frac{\alpha}{(\delta x)^2} (u(x + \delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \delta x, t)) + f(u, v), \\ \frac{dv(x, t)}{dt} &= g(u, v)\end{aligned}$$

と書ける。極限  $\delta x \rightarrow 0$  を取ることで,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u, v), \quad \frac{\partial v}{\partial t} = g(u, v)$$

なる偏微分方程式が得られる。この偏微分方程式は FitzHugh-Nagumo 方程式と呼ばれる反応拡散方程式系の一様である。特に  $g(u, v) = 0$  とおいた単独の偏微分方程式は Nagumo 方程式と呼ばれ, それに対応する結合系は

$$\frac{du_n}{dt} = \alpha \{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}\} + f(u_n) \quad (2.3)$$

となる。この最も基本的な結合系は以下の章で頻繁に取り扱う。

**例 2** 結合系 (2.1) は結合の仕方が左右対称であったが, 次のように非対称な相互作用を持つ結合系も考えられる。

$$\dot{u}_n = \alpha(u_{n+1} - u_n) + \beta(u_{n-1} - u_n) - f(u_n). \quad (2.4)$$

ここで,  $\alpha > 0, \beta > 0$  とし,  $\alpha \neq \beta$  のときは各素子の相互作用は非対称である。

**例 3**

$$u_t = \Delta(-\epsilon \Delta u - f(u)), \quad x \in \Omega. \quad (2.5)$$

この偏微分方程式は Cahn-Hilliard 方程式と呼ばれる, 合金の相分離の時間発展を記述するモデルである [11]. ここで  $u(x, t)$  は, 2 種類の金属 A と B の存在確率  $c_A, c_B$  の差を表す変数である。合金の相分離に関して, 実験によりマイクロなスケールでの modulated pattern と呼ばれる特徴的な空間パターンの形成が観測されている。

また, 2 階の偏微分方程式

$$u_t = -\epsilon \Delta u - f(u), \quad x \in \Omega \quad (2.6)$$

は Allen-Cahn 方程式と呼ばれる, 合金の界面運動を記述するモデルである [3].

偏微分方程式 (2.5) や (2.6) の空間離散化を考える。ラプラシアンをの差分化の取り方を変えることで, 様々な結合系が得られる。例えば偏微分方程式 (2.6) の空間  $\Omega$  が 1 次元, 2 次元の場合にはそれを離散化して

$$\dot{u}_i = -\beta \Delta u_i - f(u_i), \quad i \in \mathbf{Z}, \quad (2.7)$$

$$\dot{u}_{i,j} = -\beta^+ \Delta^+ u_{i,j} - \beta^\times \Delta^\times u_{i,j} - f(u_{i,j}), \quad (i, j) \in \mathbf{Z}^2, \quad (2.8)$$

という1次元, または2次元格子上的結合系を考えることが出来る. ここで,  $\dot{u}_i, \dot{u}_{i,j}$  などの・(ドット)は時間  $t$  に関する微分を表し, (2.7)において  $\Delta$  は  $\mathbf{Z}$  上の離散ラプラシアン

$$\Delta u_i = u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i$$

を, また (2.8)において  $\Delta^+$  と  $\Delta^\times$  は  $\mathbf{Z}^2$  上の2次元離散ラプラシアン

$$\begin{aligned} \Delta^+ u_{i,j} &= \left( \sum_{(a,b) \in N^+(i,j)} u_{a,b} \right) - 4u_{i,j} \\ &= u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta^\times u_{i,j} &= \left( \sum_{(a,b) \in N^\times(i,j)} u_{a,b} \right) - 4u_{i,j} \\ &= u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1} + u_{i+1,j-1} - 4u_{i,j} \end{aligned}$$

を表す. 但し

$$\begin{aligned} N^+(i, j) &= \{(a, b) \in \mathbf{Z}^2 \mid |a - i| + |b - j| = 1\}, \\ N^\times(i, j) &= \{(a, b) \in \mathbf{Z}^2 \mid |a - i| = |b - j| = 1\} \end{aligned}$$

はそれぞれ  $(i, j)$  の最近接近傍, 次近接近傍である.  $\beta, \beta^+, \beta^\times$  はそれぞれ結合パラメタである. また, 偏微分方程式 (2.5) の  $\Omega$  が2次元の場合に1つの空間離散化として, 2次元格子上的結合系

$$\dot{u}_{i,j} = -\Delta_A(-\Delta_B u_{i,j} - f(u_{i,j})), \quad (2.9)$$

が得られる. ここで,  $\Delta_A = \Delta^+ + \Delta^\times, \Delta_B = \beta^+ \Delta^+ + \beta^\times \Delta^\times$  とした.

この他にも, 2次元の離散ラプラシアンとして

$$\Delta^* u_{i,j} = \begin{cases} u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 3u_{i,j} & i+j \text{ が偶数のとき,} \\ u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} - 3u_{i,j} & i+j \text{ が奇数のとき,} \end{cases}$$

という形も考えられる. これは六角形格子上的での差分と見なすこともできる.

#### 例4

convolution model

$$\dot{u}_n = (J * u)_n - u_n - f(u_n), \quad n \in \mathbf{Z}. \quad (2.10)$$

ここで,  $(J * u)_n = \sum_{i \in \mathbf{Z}} J(i) u_{n-i}, J(0) = 0, \sum_{i \in \mathbf{Z}} J(i) = 1$ . この形の結合系モデルは, [6]においてヘルムホルツ型の自由エネルギーに対する  $\ell^2$  勾配系として研究された. 4章では偏微分方程式への近似問題としてこの形の結合系について論じる.

#### 例5

結合振動子系

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\phi_i - \phi_j), \quad 1 \leq i \leq N.$$

この結合系は、時間  $t$  に依らない一定の振動数を持った  $N$  個の振動子を結合させたモデルで、 $\phi_i$  は  $i$  番目の振動子の位相 (ここでの位相とは、 $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$  に値を取るような振動の度合いを表す量である)、 $\omega_i$  は  $i$  番目の振動子の振動数、 $K$  は結合の強さを表すパラメタである。この形の結合振動子系は蔵本モデルと呼ばれ、すべての素子が近い位相で集団的に振動する、いわゆる同期現象が注目され、振動子集団における自発的な秩序構造の形成の例としてその後多くの研究がなされている [21].

結合系を考える場合、空間構造が1つの重要な要素をなす。上で取り扱った例はすべて正方格子  $\mathbf{Z}^d$ ,  $d = 1, 2$  であったが、例3の離散ラプラシアン  $\Delta^*$  に対応する空間構造は2次元空間上の六角形格子と見ることも出来る。また、例5はすべての素子が互いに結合し合っており、格子とは異なる空間構造になっている。

次に、結合の種類の大まかな分類として、局所結合、非局所結合の2つが挙げられる。例1, 例2, 例3では各素子の相互作用がそれぞれの素子の近傍に限定されているので局所結合に対応する。例4, 例5では、相互作用が各素子の近傍に限定されない十分広い範囲にわたるので非局所結合と考えられる。しかしながら結合の種類だけでなく、結合の強さも系のダイナミクスに大きく影響することに注意する必要がある。局所結合や、非局所であっても空間的に結合の強さが異なる場合に、結合系の解として時間的、空間的なパターンとしてどのようなものがあるのかを調べることも重要な問題である。一方で、大域的に同程度で結合している場合には、空間的な位置は意味をなさない。この場合には上記のように結合系全体としての集団的振る舞いが重要な問題になってくる。

最後に、非線形項  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  について考える。特に反応拡散方程式に関係する結合系の場合には、次のような代表的な3つのタイプの非線形がよく用いられる。

- 単安定型

$$\text{定数 } a_1 \text{ が存在して } f(a_1) = 0, \quad f(u) < 0, \quad u \in (-\infty, a_1), \quad f(u) > 0, \quad u \in (a_1, \infty).$$

- Fisher 型

$$\text{定数 } a_1 < a_2 \text{ が存在して } f(a_1) = f(a_2) = 0, \quad \text{かつ } f'(a_1) > 0, \quad f'(a_2) < 0, \\ f(u) > 0, \quad u \in (a_1, a_2), \quad f(u) < 0, \quad u \in (-\infty, a_1) \cup (a_2, \infty).$$

- 双安定型

$$\text{定数 } a_1 < a_2 < a_3 \text{ が存在して} \\ f(a_1) = f(a_2) = f(a_3) = 0, \quad \text{かつ } f'(a_1) > 0, f'(a_2) < 0, f'(a_3) > 0, \\ f(u) > 0, \quad u \in (a_1, a_2) \cup (a_3, \infty), \quad f(u) < 0, \quad u \in (-\infty, a_1) \cup (a_2, a_3).$$

それぞれの非線形項  $f$  の典型的な例として、単安定型の場合、 $a_1 = 0$  として

$$f(u) = u^3,$$

Fisher 型の場合、 $a_1 = 0, a_2 = 1$  として

$$f(u) = -u(u-1),$$

双安定型の場合、 $a_1 = -1, a_2 = a, a_3 = 1$  として

$$f(x) = (u+1)(u-a)(u-1) \tag{2.11}$$

がある。

## 2.2 格子結合系

結合系の1つのクラスとして、格子結合系と呼ばれるものを定義する。\$d \ge 1\$を整数とし、\$\Lambda \subset \mathbf{R}^d\$を格子点の集合とする。簡単のため、\$\Lambda = \mathbf{Z}^d\$としておく(この他にも、2次元平面上の六角形格子や、3次元空間上の結晶格子などがあることに注意する)。\$E\$を有限次元ユークリッド空間とする。記号\$E^\Lambda\$により、写像\$u: \Lambda \to E\$全体の集合を定義する。すなわち、元\$u \in E^\Lambda\$とは、格子点により番号付けられた列\$u = \{u\_\alpha\}\_{\alpha \in \Lambda}\$で、各\$\alpha \in \Lambda\$に対して\$u\_\alpha \in E\$に値を取るもののことである。格子結合系とは、\$E^\Lambda\$あるいはその部分空間\$B \subset E^\Lambda\$を相空間に持つ、以下に示すような力学系のことを言うのである。通常\$B\$はバナッハ空間であり、例えば

(1) \$B = \ell^\infty = \{u \in E^{\mathbf{Z}^d} \mid \|u\|\_{\ell^\infty} < \infty\}\$, ここでノルムは

$$\|u\|_{\ell^\infty} = \sup_{\alpha \in \mathbf{Z}^d} |u_\alpha|,$$

(2) \$B = \ell^2 = \{u \in E^{\mathbf{Z}^d} \mid \|u\|\_{\ell^2} < \infty\}\$, ここでノルムは

$$\|u\|_{\ell^2} = \left( \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}^d} |u_\alpha|^2 \right)^{1/2},$$

(3) \$B = \ell\_q^2 = \{u \in E^{\mathbf{Z}^d} \mid \|u\|\_{\ell\_q^2} < \infty\}\$, ここでノルムは定数\$q\$を指定して、

$$\|u\|_{\ell_q^2} = \left( \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}^d} q^{-|\alpha|} |u_\alpha|^2 \right)^{1/2}, \quad (2.12)$$

などがよく用いられる。

一般に、格子結合系は各格子点につき1つの常微分方程式が対応する、格子\$\Lambda\$上の可算無限個の常微分方程式系として表される。

本論文で扱う格子結合系は以下のように定義される。いま、格子点の有限部分集合\$Q \subset \Lambda = \mathbf{Z}^d\$を1つ固定する。この\$Q\$は相互作用の範囲を表す。例えば、例1における結合系(2.2)ではユークリッド空間は\$E = \mathbf{R}^2, d=1\$であり、相互作用の範囲は\$Q = \{-1, 0, 1\} \subset \mathbf{Z}\$が対応する。また、例3における結合系(2.8)ではユークリッド空間は\$E = \mathbf{R}, d=2\$で、相互作用の範囲は\$Q = \{(i, j) \mid -1 \leq i, j \leq 1\} \subset \mathbf{Z}^2\$が対応することが分かる。有限次元ユークリッド空間\$E^Q = \{u = \{u\_\alpha\}\_{\alpha \in Q} \mid u\_\alpha \in E, \alpha \in Q\}\$上の滑らかな写像

$$F: E^Q \to E$$

を用いて、写像\$\mathcal{F}: E^{\mathbf{Z}^d} \to E^{\mathbf{Z}^d}\$を

$$\mathcal{F}(u)_\alpha = F(\{u_{\alpha+\tilde{\alpha}}\}_{\tilde{\alpha} \in Q}), \quad \alpha \in \mathbf{Z}^d$$

によって定める。もし\$u\$が有界、すなわち、ある\$K\_1 > 0\$が存在してすべての\$\alpha \in \mathbf{Z}^d\$に対し\$|u\_\alpha| \leq K\_1\$、が成り立てば明らかに\$\mathcal{F}(u)\$も有界となる。また\$F\$が\$C^1\$級であり、\$B = \ell^\infty\$、あるいは\$0 < q \le 1\$なる\$q\$に対し\$B = \ell\_q^2\$であれば、\$\mathcal{F}: B \to B\$もまた\$C^1\$級になることが知られている[2]。これは、各素子が有限範囲の相互作用を持ち、その相互作用の仕方が格子点の位置によらない場合には、各素子\$u\_\alpha\$の時間発展を表す関数を\$\mathcal{F}(u) = F(\{u\_{\alpha+\tilde{\alpha}}\}\_{\tilde{\alpha} \in Q})\$として、素子全体の力学系を定めることが出来ることを意味する。従って次の定義を得る。

**定義 2.1.** 上のような  $\mathcal{F}: B \rightarrow B$  に対する連続時間の格子結合系とは,

$$\dot{u}(t) = \mathcal{F}(u(t)), \quad t \geq 0, \quad (2.13)$$

により定まる微分方程式系のことを言う. 同様に離散時間の場合も,

$$u(n+1) = \mathcal{F}(u(n)), \quad n \geq 0, \quad (2.14)$$

により定まる差分方程式系のことを言う. 本論文においては連続時間の場合のみを取り扱うことにする.

我々は, 解の空間的な振る舞いについて興味がある.  $\mathbb{Z}^2$  上の結合系として, 例 3 で取り上げた Cahn-Hilliard 方程式を空間離散化した結合系 (2.9) に対しての数値計算の結果を以下に示す. ここで非線形項  $f$  は,

$$f(u) = \log \frac{1+u}{1-u} + \gamma u$$

とする. この  $f(u)$  は  $\gamma < -2$  のとき N 字形のグラフを持つ双安定型,  $\gamma \geq -2$  のとき単調増加な単安定型になり, いずれの場合も  $u \nearrow 1$  のときに  $f(u) \rightarrow \infty$ ,  $u \searrow -1$  のときに  $f(u) \rightarrow -\infty$  となることに注意する. そこで,  $u_{i,j}$  の値は  $(-1, 1)$  に制限して考える.

図 1 は, 正方領域  $L = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 \leq i \leq N_1, 1 \leq j \leq N_2\}$  上で周期境界条件

$$\begin{aligned} u(i, k) &= u(i, N_2 + k), \quad i = -1, \dots, N_1 + 2, \quad k = -1, \dots, 2 \\ u(k, j) &= u(N_1 + k, j), \quad j = -1, \dots, N_2 + 2, \quad k = -1, \dots, 2 \end{aligned}$$

または Neumann 境界条件

$$\begin{aligned} u(i, k) &= u(i, k+1), \quad u(i, k-1) = u(i, k+2), \quad i = -1, \dots, N_1 + 2, \quad k = 0, N_2 \\ u(k, j) &= u(k+1, j), \quad u(k-1, j) = u(k+2, j), \quad j = -1, \dots, N_2 + 2, \quad k = 0, N_1 \end{aligned}$$

のもとで上のような  $f(u)$  に対する結合系 (2.9) の解を数値計算によって求めた結果を表したものである. ここでパラメタ  $\beta^+, \beta^-, \gamma$  を示されたいくつかの値に取り,  $u_{i,j}$  の値が負の場合は白, 正の場合は黒で色分けした. いずれの場合も,  $t$  が大きくなるにつれて解  $\{u_{i,j}\}$  はある定常解に漸近していくことがわかっている.

### 3 格子結合系における進行波

第 2 章では格子結合系の解として様々な空間パターンが現れることを見た. この章では, 進行波について取り扱う. 結合系や (偏) 微分方程式の進行波とは, ある空間的波形を持ち, その形を保ったまま一定速度で移動する解のことを言う. 進行波は微分方程式の解の 1 つの重要なクラスである. それは進行波が *connecting orbit*, すなわち方程式に 2 つの平衡解が存在するときに一方の平衡解から他方の平衡解への遷移現象を示す解と考えられるからである. その意味で, 結合系における進行波の研究は第 1 章で見た空間パターンの遷移現象を理解する上で特に重要である.

この章では, まず 3.1 節において反応拡散方程式とそれを空間離散化した格子結合系では, 進行波を考える際の, 解析が大きく異なる可能性があることを見る. 3.2 節では結合系に特有の現象である *propagation failure* あるいは *pinning* と呼ばれるものを取り扱う. これは連続な空間と離散的な空間においては, 進行波の速度のパラメタ依存性が大きく異なり, それによって進行波が存在しないパラメタ領域が現れることである. この節においては, 1 次元の格子結合系の定在波の存在が, 連続空間の写像の反復合成による力学系を調べる問題に帰着されることも示す. 3.3 節では, 2 次元正方格子上の格子結合系において, ある一定方向に一

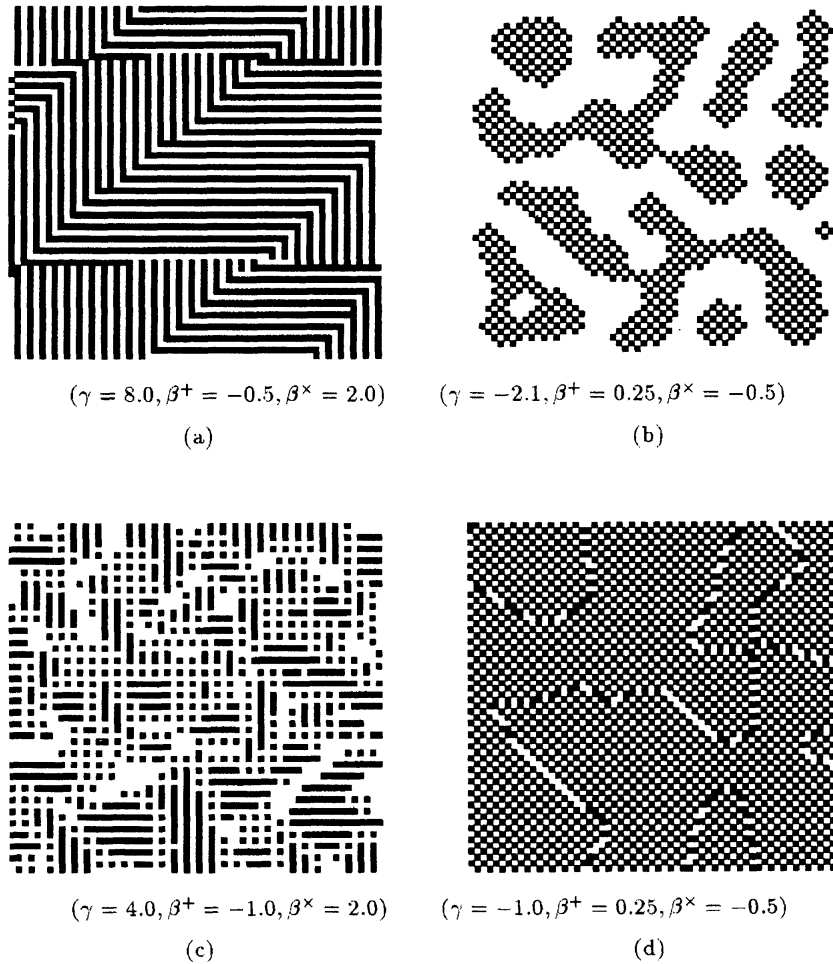


図1 Cahn-Hilliard 方程式を空間離散化して得られる結合系 (2.9) のいくつかのパターン [14]

様な波形を持って進むような進行波，すなわち平面進行波についての解析を行う．ここでは速度が0になるようなパラメタ領域が，波の進行方向に対して不連続に変化する，*crystallographic pinning* と呼ばれる高次元特有の現象が観測される．

### 3.1 反応拡散方程式における進行波解と空間離散化

この節では最も簡単な結合系として，空間1次元の反応拡散方程式と，それを空間離散化した結合系の進行波について考える．1次元反応拡散方程式の進行波は，ある常微分方程式の解として捉えられる．これに対し，反応拡散方程式からラプラシアンを空間離散化した結合系の進行波を考えるときには，ill-posed な関数微分方程式を考えることになる．

まず，結合系との比較のために，1次元 Nagumo 方程式

$$u_t = \beta u_{xx} - f(u), \quad x \in \mathbf{R}, t \in \mathbf{R} \quad (3.1)$$



を考える。ここで  $u = u(x, t) \in \mathbf{R}$ ,  $\beta > 0$  とする。

一般に、方程式 (3.1) の速度  $c$  の進行波とは、 $c \in \mathbf{R}$  とある関数  $\varphi(\xi)$  に対して、 $u(x, t) = \varphi(x - ct)$  の形で与えられる (3.1) の解のことを言う。特に  $c = 0$  のときには定在波ということもある。 $\varphi$  のことを波形と呼ぶ。この進行波を方程式 (3.1) に代入することで、 $\varphi(\xi)$  に関する常微分方程式

$$\beta \varphi''(\xi) + c \varphi'(\xi) - f(\varphi(\xi)) = 0 \quad (3.2)$$

が得られる。ここで  $\xi = x - ct$ ,  $\varphi' = \frac{d\varphi}{d\xi}$  とおいた。

進行波の種類には様々なものがあるが、その代表的なものとして、 $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \varphi(\xi)$  が存在し、かつ  $\varphi(-\infty) \neq \varphi(\infty)$  のときフロント、 $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \varphi(\xi)$  が存在し、かつ  $\varphi(-\infty) = \varphi(\infty)$  のときパルス、ある  $\tau > 0$  が存在して任意の  $\xi$  に対して  $\varphi(\xi + \tau) = \varphi(\xi)$  が成り立つとき周期進行波、などがある。

偏微分方程式 (3.1) の進行波の存在定理のために用いられる常微分方程式 (3.2) に関する Aronson and Weinberger [4] や Fife and McLeod [15] らのよく知られた結果を述べる。

**定理 3.1.**  $\beta > 0$  とし、非線形項  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  は  $-1, a \in (-1, 1), 1$  を零点に持つ双安定型であると仮定する。このとき唯一つの  $c_*$  が存在して、 $c = c_*$  であるとき、かつそのときのみ、常微分方程式 (3.2) は  $\varphi(-\infty) = -1$ ,  $\varphi(\infty) = 1$  を満たすような解  $\varphi(\xi)$  を持つ。この  $c_*$  は

$$\operatorname{sgn} c_* = \operatorname{sgn} \int_{-1}^1 f(u) du$$

を満たし、対応する解  $\varphi$  については

$$\varphi'(\xi) > 0, \quad \xi \in \mathbf{R},$$

が成り立つ。更にこの解は平行移動を除いて一意的である。◇

この定理より、方程式 (3.1) で  $f(u)$  が双安定のときにはフロントが存在することが分かる。

次に 2.1 節の例 1 で取り上げた結合系 (2.2) で、 $g = 0$  とおいたものを考える。

$$\frac{du_n}{dt}(t) = \alpha \{u_{n+1}(t) - 2u_n(t) + u_{n-1}(t)\} - f(u) \quad n \in \mathbf{Z}, t \in \mathbf{R}. \quad (3.3)$$

方程式 (3.3) の進行波  $u_n(t) = \varphi(n - ct)$  に対し、変数を  $\xi = n - ct$  と取り直して方程式に代入すると

$$-c\varphi'(\xi) = \alpha \{\varphi(\xi + 1) - 2\varphi(\xi) + \varphi(\xi - 1)\} + f(\varphi(\xi)) \quad (3.4)$$

となる。速度  $c = 0$  のとき、上式は  $\xi$  についての差分方程式である。 $c \neq 0$  のとき、 $\xi$  を時間変数とみると、この方程式は時間遅れ、時間進みを含む ill-posed な関数微分方程式であり、一般に解析が非常に困難になる。

この結合系 (3.3) の進行波解の存在は、反応拡散方程式 (3.1) の結果よりもかなり遅れて、92 年に Zinner によって証明された [25]。

**定理 3.2.** 結合系 (3.3) において  $\alpha > 0$  とし、非線形項  $f$  は  $-1, a, 1$  を零点に持つ双安定型で

$$\int_{-1}^1 f(x) dx > 0$$

を満たすようなリプシッツ連続関数であるとする。このとき、ある  $\alpha^* > 0$  が存在して、任意の  $\alpha > \alpha^*$  に対して方程式 (3.3) は、 $u_n(t) = \varphi(n - ct)$  という形の進行波解を持つ。ここで  $c > 0$  であり、 $\varphi$  は  $\mathbf{R}$  から  $(-1, 1)$  への  $C^1$  級の関数で、 $\varphi(-\infty) = -1$ ,  $\varphi(\infty) = 1$ ,  $\varphi'(x) > 0$   $x \in \mathbf{R}$  を満たす。◇

証明のアイデアは関数微分方程式を直接扱うのではなく、非線形項を簡単なものに置き換えた問題からの変形を考え、ブラウアーの不動点定理を用いるものであった。この定理は相互作用の強さを表すパラメタ  $\alpha$  が十分大きいときにのみ成り立つ結果であり、 $\alpha$  が十分小さい場合には、速度が 0 でない進行波解の存在証明はなされていない。

### 3.2 propagation failure

3.1 節で述べたように、結合の強さを表すパラメタ  $\alpha > 0$  の値が小さいときには速度が 0 でない進行波の存在は証明されていない。この節では (3.3) において  $\alpha > 0$  の値が十分小さいときに、無限個の安定な定在波が存在することを示す。この現象が伝達を阻止している、すなわち速度が 0 でない進行波の非存在性を表していると考えられ、propagation failure あるいは pinning と呼ばれている。但し進行波の非存在性の証明は、著者の知る限りではなされていないことを注意しておく。

1 次元離散区間上の結合系 (3.3) の平衡解は、 $\frac{\partial u_n}{\partial t} = 0$  とすることにより差分方程式となる。 $u_n = v_{n+1}$  とおくと方程式 (3.3) は次のように書き直すことができる。

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2u_n - v_n + f(n_n)/\alpha, \\ v_{n+1} &= u_n. \end{aligned} \quad (3.5)$$

このように、元の空間が 1 次元の場合には、定在波の波形を調べることを、空間変数  $n$  を離散時間変数とみなして写像の反復合成によって与えられる力学系の性質を調べることに帰着させることができる。

以下に示す結果は Keener[19] によるもので、3.1 節で示した連続な空間の場合の結果とは大きく異なる、結合系特有の現象を示している。

まず準備として、Moser[24] による、写像の反復合成による離散時間の力学系のカオスの振る舞いについての結果を紹介する。

**定義 3.3.**  $Q = \{(x, y) \mid 0 \leq x, y \leq 1\} \subset \mathbf{R}^2$  とする。連続  $y = u(x)$  が  $u([0, 1]) \subset [0, 1]$  を満たすとき、そのグラフとして表される曲線を  $Q$  内の水平曲線であると言う。同様に、連続関数  $x = v(y)$  が  $v([0, 1]) \subset [0, 1]$  を満たすとき、同様にして  $Q$  上の垂直曲線を定義する。

また  $[0, 1]$  上の 2 つの水平曲線  $u_0, u_1$  で任意の  $x \in [0, 1]$  に対し  $u_0 < u_1$  を満たすものに対して

$$U = \{(x, y) \in Q \mid u_0(x) \leq y \leq u_1(x)\}$$

を水平帯と言う。垂直帯も 2 つの垂直曲線を用いて同様に定義する。

2 つの記号 0 と 1 の両側無限列の集合  $\{0, 1\}^{\mathbf{Z}}$  と、シフト写像  $\sigma: \{0, 1\}^{\mathbf{Z}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbf{Z}}$  ( $(\sigma(s))_k = s_{k-1}$ ) との組  $(\{0, 1\}^{\mathbf{Z}}, \sigma)$  の定める力学系を考える。但し、 $\{0, 1\}^{\mathbf{Z}}$  は

$$d(s, t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \frac{\delta(s_k, t_k)}{2^{|k|}}, \quad s, t \in \{0, 1\}^{\mathbf{Z}}$$

を距離とするコンパクト距離空間とする。

**定義 3.4.**  $S, T$  を位相空間、 $\psi: S \rightarrow S$ 、 $\phi: T \rightarrow T$  は連続写像であるとする。このとき、 $S$  から  $T$  の中への同相写像  $\tau: S \rightarrow \tau(S) \subset T$  が存在して

$$\tau \circ \psi = \phi \circ \tau$$

が成り立つとき、 $(\phi, T)$  は  $(\psi, S)$  を部分系として持つという。

以下に Moser の定理の主張を述べる.

**定理 3.5.**  $U_i, i = 0, 1$  を, 互いに交わりを持たない  $Q$  上の水平帯,  $V_i, i = 0, 1$  を, 互いに交わりを持たない  $Q$  上の垂直帯として, ある連続写像  $\varphi: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  があって,  $i = 0, 1$  に対して  $\varphi(V_i) = U_i$  を満たすと仮定する. さらに  $\varphi$  は,  $V_i$  の垂直方向の境界は  $U_i$  の垂直方向の境界へ,  $V_i$  の水平方向の境界は  $U_i$  の水平方向の境界へ写すと仮定する. このとき,  $(\varphi, Q)$  は  $(\{0, 1\}^{\mathbf{Z}}, \sigma)$  を部分系として持つ.

特に上記の仮定が成り立つとき, 各  $s = \{s_i\} \in \{0, 1\}^{\mathbf{Z}}$  に対して, 少なくとも一つ  $Q$  上の両側無限列  $\{x_i\}$  が定まり, かつ  $x_i \in U_{s_i}, \varphi(x_i) = x_{i+1}$  を満たす.  $\diamond$

この定理により,  $\varphi$  に関する適当な条件の下で, この写像の反復合成による離散時間の力学系がカオス的な振る舞いを示すことが分かる. 以上の結果をもとに, Keener の定理を示す.

**定理 3.6.**  $f$  は区間  $[0, 1]$  上の  $C^1$  級の双安定な関数で,

$0 < x_0 < a < x_1 < 1$  を満たす  $x_0, x_1$  が存在して  $f'(x_0) = f'(x_1) = 0$ , かつ  $x \neq x_0, x_1$  のとき  $f'(x) \neq 0$  が成り立つと仮定する. このとき  $\alpha > 0$  が十分小ならば, 各  $\{s_n\} \in \{0, 1\}^{\mathbf{Z}}$  に対して,  $s_n = 0$  のとき  $u_n \in [0, a), s_n = 1$  のとき  $u_n \in (a, 1]$  を満たすような方程式 (3.3) の定常解  $\{u_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$  が存在する.  $\diamond$

*Proof.* 式 (3.5) により定まる  $(u_n, v_n)$  から  $(u_{n+1}, v_{n+1})$  への写像を

$$\varphi(x, y) = (2x - y + f(x)/\alpha, x) \quad (3.6)$$

とおく. 式 (3.5) を変形して,  $(u_{n-1}, v_{n-1})$  を,  $(u_n, v_n)$  を用いて表すと, 写像  $(u_n, v_n) \rightarrow (u_{n-1}, v_{n-1})$  は  $\varphi$  の逆写像

$$\varphi^{-1}(x, y) = (y, 2x - x + f(y)/\alpha) \quad (3.7)$$

を与える. 故に写像  $\varphi$  は  $\mathbf{R}^2$  から  $\mathbf{R}^2$  への同相写像を定めることがわかる. 以下では写像  $\varphi$  の挙動を見ることで, Moser の定理の仮定を満たすような水平帯, 垂直帯が存在するための条件を調べていく.

$[0, x_0]$  において  $f(x) \geq 0$  であるから, 水平直線  $0 \leq u \leq x_0, v = 0$  は,  $\varphi$  によって, ある単調増加な水平曲線  $v = v_0(u)$  に写される. この  $v_0$  は,  $0 \leq u \leq F_0 := 2x_0 - f(x_0)/\alpha$  上定義され,  $v_0 = 0, v_0(F_0) = x_0$  を満たし,  $0 \leq t \leq x_0$  に対して  $v = t, u = 2t + f(t)/\alpha$  とパラメタ付けされる曲線である.

同様にして, 水平直線  $0 \leq u \leq x_0, v = 1$  は,  $-1 \leq u \leq F_0 - 1$  上定義された曲線  $v = v_0(u + 1)$  に写されることがわかる.

これらの曲線のグラフを調べることで,  $F_0 > 2$  ならば, 曲線  $v = v_0(u), 0 \leq u \leq 1$  は, ある水平帯  $U_0$  の水平方向の境界を定めることがわかる.

$\varphi$  と  $\varphi^{-1}$  の対称性, すなわち, 座標の取り替え  $(x, y) \rightarrow (y, x)$  を  $R$  で表すと明らかに

$$\varphi^{-1} = R^{-1} \circ \varphi \circ R$$

が成り立つことがわかるので,  $U_0$  を逆写像で写したものを  $V_0$  と定めると, これは垂直帯になり, また Moser の定理の仮定が成り立つことがわかる.

同様の議論を,  $x_1 \leq u \leq 1, v = 0$  または  $x_1 \leq u \leq 1, v = 1$  において行くと, Moser の定理の仮定を満たすような水平帯と垂直帯  $U_1, V_1$  が存在するためには,  $F_1 := 2x_1 - 1 + f(x_1)/\alpha$  に対して  $1 - F_1 > 2$  という条件が必要となることが容易にわかる. この  $F_0, F_1$  についての条件を書き直すと,  $\alpha$  の満たすべき条件は

$$\begin{aligned} 2x_0 + f(x_0)/\alpha &> 2, \\ 2x_1 + f(x_1)/\alpha &< 0 \end{aligned}$$

であり, これは  $\alpha$  が十分小ならば成り立つことがわかる. よってこのとき, Moser の定理から求める主張が成り立つ.  $\square$

また, 次のような系が成り立つことにも注意しておく.

**系 3.7.**  $f(x)$  は  $[0, 1]$  区間上の  $C^1$  級の関数であり,  $f(0) = f(1) = 0$  を満たすとする. さらに, ある定数  $\hat{x}_0, \hat{x}_1$  が存在して,

- (1)  $2(\hat{x}_0 - 1) + \frac{f(\hat{x}_0)}{\alpha} = 0,$
- (2)  $2\hat{x}_1 + \frac{f(\hat{x}_1)}{\alpha} = 0,$
- (3)  $-f'(x) < 2\alpha \quad x \in [0, \hat{x}_0] \cup [\hat{x}_1, 1],$

が成り立つと仮定する. このとき, 定理 3.11 の主張が成立する.  $\diamond$

定理の (1) と (2) の条件は, 関数  $y = -f(x)$  のグラフと直線  $y = 2\alpha(x - 1), y = -2\alpha x$  が交点を持つことに対応する. ここで, (1) と (2) は, 水平帯と垂直帯の存在を保証する条件であり, また (3) は境界の曲線の単調性を保証している. このような  $\hat{x}_0, \hat{x}_1$  は  $\alpha$  が十分大きいときには存在しないことに注意する.

系 3.12 の仮定の下で, 定在波の大域的な安定性に関する次の結果を得る.

**定理 3.8.** いま, ある定数  $\hat{x}_0, \bar{x}_0, \hat{x}_1, \bar{x}_1$  が存在して,

- (1)  $2(\hat{x}_0 - 1) + \frac{f(\hat{x}_0)}{\alpha} = 0, \quad 2(\bar{x}_0 - 1) + \frac{f(\bar{x}_0)}{\alpha} = 0$  かつ  
 $-\frac{f(x)}{\alpha} - 2(x - 1) < 0, \quad 0 < \hat{x}_0 < x < \bar{x}_0,$
- (2)  $2\hat{x}_1 + \frac{f(\hat{x}_1)}{\alpha} = 0, \quad 2\bar{x}_1 + \frac{f(\bar{x}_1)}{\alpha} = 0$  かつ  
 $-\frac{f(x)}{\alpha} - 2x > 0, \quad \bar{x}_1 < x < \hat{x}_1 < 1,$

が成り立つと仮定する. いま, 任意の  $n$  に対し  $0 \leq u_n(t=0) \leq 1$  とする. もし  $t=0$  のときに  $u_k \in [0, \bar{x}_0]$  とすると, すべての  $t \geq 0$  に対して  $u_k \in [0, \bar{x}_0]$  が成り立ち, 一方で  $t=0$  のときに  $u_k \in (\bar{x}_1, 1]$  とすると, すべての  $t \geq 0$  に対して  $u_k \in (\bar{x}_1, 1]$  が成り立つ.  $\diamond$

この定理により,  $\alpha$  が十分小さいときには区間  $[0, \bar{x}_0), (\bar{x}_1, 1]$  が正不変になることが分かり, この意味で無限個の定在波が安定になることが分かる.

### 3.3 2次元格子上的結合系の進行波

前節では1次元の結合系について, 進行波の崩壊現象を扱った. そこでは,  $\alpha$  の値が十分小のとき, すなわち各素子の結合が十分弱いときには propagation failure あるいは pinning が起こると考えられる. この節では2次元の反応拡散方程式の空間離散化を考える. 3.1節で述べたように, 連続な空間の場合とは大きく異なり結合系における進行波の解析は, 一般に非常に困難である. Cahn et al.[9] は, 連続な双安定の非線形項を理想化した特別な非線形項を考えることにより, 進行波についての厳密な解析を行うことが出来るようになり, 崩壊現象を異なる視点から捉えることが可能となった. ここではパラメタとして  $\alpha$  の代わりに非線形項の零点を定める  $a$  を用いる. 式 (2.11) のような非線形項を考える時,  $a = 1/2$  ならばバランスが保たれて, 反応拡散方程式の場合には進行波の速度は0になるが,  $a$  の値が  $1/2$  から少しでもずれると波は動き始める. これに対して空間が離散の場合には  $1/2$  を含むようなある区間に  $a$  が含まれるときには, 速度  $c \neq 0$  を満たすような進行波は存在しないこと, すなわち pinning が起こることが示される. このときパラメタ  $a$  は速度が

0でない進行波解の存在/非存在性を支配するパラメタであるので *detuning parameter* と呼ばれる。以下では進行波の存在/非存在が、波の進む方向にどのように依存するのかについても調べる。

ここでは  $u_{i,j} = u_{i,j}(t) \in \mathbf{R}$ ,  $\dot{u}_{i,j} = \frac{du_{i,j}}{dt}$  として、次のような格子結合系を考える。

$$\dot{u}_{i,j} = \alpha(\Delta^+ u)_{i,j} - f(u_{i,j}) \quad (i,j) \in \mathbf{Z}^2. \quad (3.8)$$

但し  $\alpha > 0$  はパラメタであり,  $\Delta^+$  は 2.2 節の例 2 で与えた空間 2 次元の離散ラプラシアン

$$(\Delta^+ u)_{i,j} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}$$

である。非線形項  $f(u)$  はヘビサイド関数

$$h(u) = \begin{cases} 0 & u < 0, \\ 1 & u > 0, \end{cases}$$

と  $a \in (0, 1)$  を用いて

$$f(u) = f(u, a) = u - h(u - a) \quad (3.9)$$

と表される区分的線形関数とする。

点  $a$  における  $f$  の不連続性のために、方程式 (3.8) において解をどのように定義するかが問題となる。ここでは、点  $a$  において  $f$  は次のような集合に値をとるような関数と見なすことが自然であろう。

$$f(a) = [a - 1, a], \quad h(0) = [0, 1].$$

これにより、関数  $f$  あるいは  $h$  のグラフの不連続点における gap を埋めるのである。

以上の設定のもとで、方程式 (3.8) は微分包含式

$$\dot{u}_{i,j} \in \alpha(\Delta u)_{i,j} - f(u_{i,j}) \quad t \in \mathbf{R} \quad (3.10)$$

として解釈される。但し、求める解の空間は  $\ell^\infty(\mathbf{Z}^2)$  とする。

2次元空間における進行波として、ある波形を保って速度  $c$  である角度  $\theta$  の方向へ一定速度で進む平面進行波を考える。すなわち、 $\theta \in \mathbf{R}$  に対して

$$\kappa = \cos \theta, \quad \sigma = \sin \theta$$

とにおいて

$$u_{i,j} = \varphi(i\kappa + j\sigma - ct) \quad (3.11)$$

という形の (3.8) の解を調べる。ここで、 $c \in \mathbf{R}$ ,  $\varphi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  である。式 (3.11) を方程式 (3.8) に代入すると

$$-c\varphi'(\xi) = \alpha L\varphi(\xi) - f(\varphi(\xi)) \quad (3.12)$$

となる。但し  $\xi = i\kappa + j\sigma - ct$  であり、差分作用素  $L$  は

$$L\varphi(\xi) = \varphi(\xi + \kappa) + \varphi(\xi - \kappa) + \varphi(\xi + \sigma) + \varphi(\xi - \sigma) - 4\varphi(\xi)$$

と定義される。

ここでは、境界条件  $\varphi(-\infty) = 0$ ,  $\varphi(\infty) = 1$  を満たす単調増加なフロントを考える。まず、 $c \neq 0$  場合を考えることにする。平行移動による不変性から、一般性を失うことなく

$$\xi < 0 \text{ のとき } \varphi(\xi) < a, \quad \xi > 0 \text{ のとき } \varphi(\xi) > a$$

と仮定してよい。これにより

$$\xi \neq 0 \text{ のとき, } h(\varphi(\xi) - a) = h(\xi), \text{ 故に } f(\varphi(\xi)) = \varphi(\xi) - h(\xi)$$

が成り立つ。この条件から、方程式 (3.12) は

$$-c\varphi'(\xi) = \alpha L\varphi(\xi) - \varphi(\xi) + h(\xi) \quad (3.13)$$

という形に書ける。詳細は略すが、Fourier 変換を用いることで、この方程式の解は次のように明示的に書き表すことが出来る。

$$\varphi(\xi) = \varphi(\xi, c) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{A(s) \sin \xi s}{s(A(s)^2 + c^2 s^2)} ds + \frac{c}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \xi s}{A(s)^2 + c^2 s^2} ds. \quad (3.14)$$

ここで

$$A(s) = 1 + 2\alpha(\cos \kappa s - \sin \sigma s). \quad (3.15)$$

**定理 3.9.** 式 (3.14) で与えられる  $\varphi(\xi)$  は狭義単調増加で、 $\varphi(-\infty) = 0$ ,  $\varphi(\infty) = 1$  を満たすような、方程式 (3.8) の解である。◇

この解の表示を用いて、進行波の速度  $c$  とパラメタ  $a$  との関係調べる。  $\varphi(0) = a$  という仮定から

$$a - \frac{1}{2} = \frac{c}{\pi} \int_0^\infty \frac{ds}{A(s)^2 + c^2 s^2} \quad (3.16)$$

が成り立つ。この式の右辺を

$$\Gamma(c) = \frac{c}{\pi} \int_0^\infty \frac{ds}{A(s)^2 + c^2 s^2} \quad (3.17)$$

と定める。このとき、次の定理が成り立つ。

**定理 3.10.**  $\Gamma(c)$  は奇関数で解析的であり、任意の  $c \neq 0$  に対して

$$|\Gamma(c)| < \frac{1}{2} \quad (3.18)$$

が成り立つ。さらに

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \Gamma(c) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{c \rightarrow +0} \Gamma(c) = \gamma$$

である。ここで、 $\gamma > 0$  は

$$\gamma = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^T \frac{ds}{A(s)} \quad (3.19)$$

で与えられる定数である。

また、式 (3.17) で与えられる関数  $\Gamma$  は任意の  $c \neq 0$  に対して  $\Gamma'(c) > 0$  を満たす。特に各  $a \in (0, 1)$  に対し、方程式 (3.16) は、 $|a - 1/2| > \gamma$  のとき、かつそのときに限り唯一つの解  $c \neq 0$  を持つ。◇

この定理から、 $|a - \frac{1}{2}| \leq \gamma$  であれば速度が 0 でないような進行波解は存在しないこと、すなわち pinning が起こることが分かる。式 (3.15) と (3.19) からわかるように、 $\gamma$  は波の進行方向  $\theta$  に依存した関数である。式  $\gamma = \gamma(\theta)$  を  $\kappa = \cos \theta$  と  $\sigma = \sin \theta$  について Fourier 級数展開することで、ある  $\gamma_{\text{irr}} > 0$  が存在して、

- (i)  $\tan \theta \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$  の時、 $\theta$  の値に依らずに  $\gamma(\theta) = \gamma_{\text{irr}}$ ,
- (ii)  $\tan \theta \in \mathbf{Q} \cup \{\pm\infty\}$  となる任意の  $\theta$  に対し、 $\gamma(\theta) > \gamma_{\text{irr}}$ ,

となることが分かるこの事実は、進行波の方向に応じて、pinning の起こり方が不連続に変化し、 $\tan \theta$  が無理数となる方向の方が pinning が起こりやすいことを示している。このような現象は *crystallographic pinning* と呼ばれ、Mallet-Paret[23] により、より一般的な枠組みでこの現象が捉えられることが知られている。

### 3.4 今後の課題

3.2 節で見たように、あるパラメタ領域においては無限個の定在波が存在し、それにより速度が 0 でない進行波の存在を妨害していると考えられている [19]。しかしながらそれらの関連性は今のところ充分には分かっていない。

問題によっては離散的な空間構造を考えることの方が自然であり、それによって引き起こされる現象は、より現実を捉えていると考えられる。連続と離散の間の今後の研究に大きく期待する。

## 参考文献

- [1] M.J. Ablowitz, and A. Zeppetella, Explicit solution of Fisher's equation for a special wave speed, *Bull. Math. Biol.*, **41** (1979), 835–840.
- [2] V.S. Afraimovich, and S.N. Chow, Existence of evolution operators group for Infinite lattice of coupled ordinary differential equation, *Dyn. Syst. Appl.*, **3**, (1994), 155–174.
- [3] S.M. Allen, and J.W. Cahn, A microscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsening, *Acta Met.*, **27**, (1979), 1085–1095.
- [4] D.G. Aronson, and H.F. Weinberger, Nonlinear diffusion in population genetics, combustion, and nerve pulse propagation, in *Partial Differential Equations and Related Topics*, Lecture Notes in Mathematics, Springer Berlin, New York, **446** (1975), 5–49.
- [5] P.W. Bates, X. Chen, and A. Chmaj, Traveling Waves of Bistable Dynamics on a Lattice, *SIAM J. Math. Anal.*, **35** (2003), 520–546.
- [6] P. W. Bates, and A. Chmaj, A discrete convolution model for phase transitions, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **150**, (1999), 281–305.
- [7] P.W. Bates, and Chunlei Zhang, Traveling pulses for the Klein-Gordon equation on a lattice or continuum with long-range interaction, *Discrete and Continuous Dyn. Sys.*, **16** (2006), 235–252.
- [8] P.K. Brazhnik, and J.J. Tyson, On traveling wave solutions of Fisher's equation in two spatial dimensions, *SIAM J. Appl. Math.*, **60** (1999), 371–391.
- [9] J.W. Cahn, J. Mallet-Paret, and E.S. Van Vleck, Traveling wave solutions of ODEs on a two-dimensional spatial lattice, *SIAM J. Appl. Math.*, **59** (1998), 455–493
- [10] J. Carr, *Applications of Centre Manifold Theory*, Applied Mathematical Sciences, **45**, Springer-Verlag.
- [11] J.W. Cahn, J.E. Hilliard, Free energy of a nonuniform system I: Interfacial free energy, *J. Chem. Phys.*, **28** (1958), 258–267.
- [12] S.N. Chow, Lattice Dynamical Systems, in *Dynamical systems*, Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, Berlin, **1822** (2003), pp. 1–102,
- [13] S.N. Chow, J. Mallet-Paret, and E.S. Van Vleck, Pattern formation and spatial chaos in spatially

- discrete evolution equations, *Random Comput. Dynam.* **4** (1996), 109–178.
- [14] S.N. Chow, J. Mallet-Paret, and E.S. Van Vleck, Dynamics of lattice differential equations, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.* **6** (1996), 1605–1621.
- [15] P. Fife, and J. B. McLeod, The approach of solutions of nonlinear diffusion equations to travelling front solutions, *Arch. Rational Mech. Anal.* **65** (1977), 333–361.
- [16] R.A. Fisher, The wave of advance of advantageous genes, *Ann. of Eugenics*, **7** (1937), 355–369
- [17] R. FitzHugh, Impulses and physiological states in models of nerve membrane, *Biophys. J.*, **1**, (1961), 445–466
- [18] A. L. Hodgkin, and A. F. Huxley, A quantitative description of membrane currents and its application to conduction and excitation in nerve. *J. Physiol.*, **177**, (1952), 500–544.
- [19] J.P. Keener Propagation and its failure in coupled systems of discrete excitable cells, *SIAM J. Appl. Math.*, **47** (1987), 556–572.
- [20] A.N. Kolmogorov, I.G. Petrovsky, and N.S. Piskunov, Study of the diffusion equation with growth of the quantity of matter and its application to a biology problem, in *Dynamics of Curved Fronts*, Academic Presses, New York, 1988, pp. 105–130.
- [21] 森肇・蔵本由紀『散逸構造とカオス』（岩波講座 現代の物理学, 岩波書店 1994).
- [22] J. Mallet-Paret, The global structure of traveling waves on spatially discrete dynamical systems, *J. Dynam. Differential Equations*, **11** (1999), 49–127.
- [23] J. Mallet-Paret, Crystallographic pinning, preprint
- [24] J. Moser, *Stable and Random Motions in Dynamical Systems*, Princeton University Press Princeton, NJ.
- [25] Zinner, B, Existence of traveling wavefronts for the discrete Nagumo equation, *J. Diff Eq.*, **96** (1992), 1–27.