数理解析研究所講究録
第 1617 巻 2008 年 206-214

楕円 Dedekind 和とある無限級数の変換公式 (II)

北海道大学大学院理学研究科数学専攻博士3年　町出　智也 (MACHIDE Tomoya)
Department of Mathematics,
Hokkaido University

1　序章

この原稿は、講究録「解析的整数論とその周辺、京都大学数理解析研究所（２００７年１０月)」に収録予定の原稿「楕円 Dedekind 和とある無限級数の変換公式 (I)」[Ma3] の続編である。なので、Dedekind 和の研究の背景については (I) を参照して頂く事にし、また、(I) で紹介された記号は断りなく使う事にする。その原稿の中で私達は、generalized Dedekind-Rademacher 和の楕円類似（楕円 Dedekind-Rademacher 和）を、Bernoulli 関数の楕円類似である Kronecker の二重級数を用いて定義し、そして、楕円 Dedekind-Rademacher 和の相互法則を構成した。また、楕円 Dedekind-Rademacher 和の正当性を強調するために、Kronecker 二重級数の生成関数と Levin [Lev] により研究された（Debye）楕円 polylogarithms の生成関数のある関係についても触れた。

本原稿の目的は、楕円 Dedekind-Rademacher 和が現れる、ある無限級数 $H_l^\tau(\Xi;\alpha)$ の変換公式を与えることである。その変換公式は、 Arakawa の変換公式のパラメーター s が整数かつ $s \leq -2$ の場合の楕円類似と考えられる。なぜなら、パラメーター τ を無限大に向かわせる事によりそれらが再提供されるから、そして、その変換公式で使われる無限級数が、パラメーター τ 上で、modular 群に関する保型的性質を持つからである。

この原稿は次のように構成される。Section 2 で、目的の変換公式に現れる楕円 Dedekind-Rademacher 和 $S_{m,n}^\tau(\Xi;r)$ を紹介する。(「楕円 Dedekind 和とある無限級数の変換公式 (I)」で定義されたすべての楕円 Dedekind-Rademacher 和は現れない。) Section 3 では、今度は目的の変換公式のために使われるある無限級数 $H_l^\tau(\Xi;\alpha)$ を紹介する。そして、Section 4 で、目的の変換公式を与える。

この原稿は、プレプリント [Ma2] を加筆、省略して、日本語に翻訳したものである。

2 楕円 Dedekind-Rademacher 和

目的の変換公式に現れる楕円 Dedekind-Rademacher 和 $S^{\tau}_{m,n}(\Xi; r)$ を紹介しよう。有理数 r に対して、$n(r), d(r)$ を

$$\gcd(n(r), d(r)) = 1, \quad d(r) \geq 1, \quad r = n(r)/d(r)$$

を満たす整数とする。$\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ を実数を成分とする2次正方行列とし、$\mathrm{SM}_2(r)$ を次で定義されるその部分集合とする。

$$\mathrm{SM}_2(r) := \left\{ \begin{pmatrix} x' & x \\ y' & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, \vec{y}, n(r)\vec{y} - d(r)\vec{x} \notin \mathbb{Z}^2 \right\}. \tag{2.1}$$

ここで、$\vec{x}, \vec{y}$ をそれぞれベクトル $(x', x), (y', y)$ とする。$\Xi = \left(\begin{smallmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SM}_2(r)$ の時、

$$S^{\tau}_{m,n}(\Xi; r) := S^{\tau}_{m,n} \begin{pmatrix} (1,1) & (n(r), n(r)) & (d(r), d(r)) \\ (0,0) & \vec{x} & \vec{y} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

と定義する。$S^{\tau}_{m,n}\left(\begin{smallmatrix} (1,1) & (n(r),n(r)) & (d(r),d(r)) \\ (0,0) & \vec{x} & \vec{y} \end{smallmatrix}\right)$ は 楕円 Dedekind-Rademacher 和 である ([Ma3] 参照)。$b' \neq b$ または $c' \neq c$ を満たす $S^{\tau}_{m,n}\left(\begin{smallmatrix} (1,1) & (b',b) & (c',c) \\ (0,0) & \vec{x} & \vec{y} \end{smallmatrix}\right)$ はけっして $S^{\tau}_{m,n}(\Xi; r)$ で表せられないので、目的の変換公式の中には現れない。記号の簡略化のため、

$$S_{m,n}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}; r\right) = S_{m,n}\left(\begin{smallmatrix} 1 & n(r) & d(r) \\ 0 & x & y \end{smallmatrix}\right), \quad \mathfrak{c}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}; r\right) = \mathfrak{c}(1, n(r), d(r); 0, x, y)$$

とおく ($\mathfrak{c}(1, n(r), d(r); 0, x, y)$ の定義も [Ma3] を参照の事)。2次正方行列 $V = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ に対して、 $j(V; \tau) = c\tau + d$ とおく。楕円 Dedekind-Rademacher 和 $S^{\tau}_{m,n}(\Xi; r)$ は保型的性質を持ち、τ を $i\infty$ に持っていく事により、古典的な Dedekind-Rademacher 和 $S_{m,n}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}; r\right)$ になる。

PROPOSITION 2.1. r を有理数、$\Xi = \begin{pmatrix} x' & x \\ y' & y \end{pmatrix} \in SM_2(r)$ とする。

(i) $V \in SL_2(\mathbb{Z})$ の時、

$$S^{\tau}_{m,n}(\Xi; r) = \frac{1}{j(V; \tau)^{m+n}} S^{V\tau}_{m,n}(\Xi\ {}^tV; r). \tag{2.3}$$

ただし、${}^tV$ は V の転置行列を意味する。特に、$m, n \geq 3$ の時、$S^{\tau}_{m,n}\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}; r\right)$ は重さ $m+n$ の保型形式である。

(ii) 次が成り立つ。

$$\mathrm{Re}\lim_{\tau\to i\infty} S^{\tau}_{m,n}(\Xi;r) = \begin{cases} S_{m,n}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix};r\right) - \dfrac{1}{4}\mathfrak{c}\left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix};r\right) & (m=n=1, x,y\in\mathbb{Z}), \\ S_{m,n}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix};r\right) & (otherwise). \end{cases} \tag{2.4}$$

証明は [Ma3] に譲る。

3 無限級数 $H_l^{\tau}(\Xi;\alpha)$

α を代数的実無理数、l (≥ 3) を整数とする。$\vec{y}\notin\mathbb{Z}^2$ を満たす $\Xi = \left(\begin{smallmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} x' & x \\ y' & y \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ に対して、無限級数 $H_l^{\tau}(\Xi;\alpha)$ を

$$H_l^{\tau}(\Xi;\alpha) := (-1)^l \frac{l!}{(2\pi i)^{l+1}} {\sum_{m',m}}' \frac{\mathrm{e}(\vec{m}\cdot\vec{x})}{(\tau m'+m)^l} \underline{F}(-\vec{y};\alpha(\tau m'+m);\tau) \tag{3.1}$$

と定義する。ただし、和 ${\sum}'_{m',m}$ は $(0,0)$ 以外のすべての $\vec{m}=(m',m)\in\mathbb{Z}^2$ を走るとし、$\vec{m}\cdot\vec{x} = m'x'+mx$ とする。次の Lemma より、$H_l^{\tau}(\Xi;\alpha)$ は絶対収束し、$\vec{x}\in\mathbb{R}^2, \vec{y}\in\mathbb{R}^2\setminus\mathbb{Z}^2$ で連続となる。

LEMMA 3.1. s を複素数、λ',λ を非負の実数とする。$\mathrm{Re}\, s > \lambda'+\lambda+2$ の時、${\sum_{m',m}}' \dfrac{\mathrm{e}(\vec{m}\cdot\vec{x})m'^{\lambda'}m^{\lambda}}{(\tau m'+m)^s}\underline{F}(-\vec{y};\alpha(\tau m'+m);\tau)$ は絶対収束する。

Proof. $I = {\sum_{m',m}}' \left| \dfrac{\mathrm{e}(\vec{m}\cdot\vec{x})m'^{\lambda'}m^{\lambda}}{(\tau m'+m)^s}\underline{F}(-\vec{y};\alpha(\tau m'+m);\tau)\right|$ とおく。$\vec{x},\vec{y},\tau$ を以下固定する。X の関数として $\underline{F}(\vec{x};X;\tau)$ は $\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}$ に一位の極を持つ有理型関数なので、ある定数 $C=C(\vec{y},\tau)$ が存在して次が成り立つ。$-1/2\leq\xi',\xi\leq 1/2$ を満たす複素数 $X=\tau\xi'+\xi$ に対して、

$$|X\underline{F}(\vec{y};X;\tau)|\leq C.$$

実数 x に対して、整数 $[[x]]$ と実数 $\langle\langle x\rangle\rangle$ を $-1/2<\langle\langle x\rangle\rangle\leq 1/2$ かつ $x=[[x]]+\langle\langle x\rangle\rangle$ をみたすように定める。([Ma3, (2.4)]) より

$$\underline{F}(-\vec{y};\alpha(\tau m'+m);\tau) = \mathrm{e}(-y'[[\alpha m']]-y[[\alpha m]])\underline{F}(-\vec{y};\tau\langle\langle\alpha m'\rangle\rangle+\langle\langle\alpha m\rangle\rangle;\tau)$$

なので、

$$I\leq C{\sum_{m',m}}' \frac{|m'|^{\lambda'}|m|^{\lambda}}{|\tau m'+m|^s}\frac{1}{|\tau\langle\langle\alpha m'\rangle\rangle+\langle\langle\alpha m\rangle\rangle|}.$$

さて、X', X が実数の時、

$$
\begin{aligned}
&|\tau X' + X| \geq \frac{\mathrm{Im}\,\tau}{|\tau|}|X|, \quad |\tau X' + X| \geq |\tau|^2 \mathrm{Im}\,(-\frac{1}{\tau})\,|X'|, \\
&|\tau X' + X|^2 \geq 2(|\tau| - |\mathrm{Re}\,\tau|)|X'X|
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

が成り立つことがある計算により導かれる。従って、ある正の実数 $D = D(\vec{y}, \tau)$ が存在して、

$$
\begin{aligned}
I \leq D\Big(&\sum_{m'}{}' \sum_{m}{}' \frac{1}{|m'|^{(s-\lambda'-\lambda)/2}|m|^{(s-\lambda'-\lambda)/2}|\langle\langle \alpha m' \rangle\rangle|^{1/2}|\langle\langle \alpha m \rangle\rangle|^{1/2}} \\
&+ \frac{1}{|\tau|^{s-\lambda'-\lambda+1}} \sum_{m'}{}' \frac{1}{|m'|^{s-\lambda'-\lambda}|\langle\langle \alpha m' \rangle\rangle|} + \sum_{m}{}' \frac{1}{|m|^{s-\lambda'-\lambda}|\langle\langle \alpha m \rangle\rangle|}\Big)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。ここで、和 $\sum_m'$ は 0 以外の整数全体を走るとする。[Ar1, Lemma 1] の証明の中で級数

$$
\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{1+\epsilon}|\langle\langle \alpha m \rangle\rangle|}
$$

が、任意の $\epsilon > 0$ に対して収束する事が得られていた。よって、Lemma は成り立つ。 □

無限級数 $H_l^\tau(\Xi; \alpha)$ のいくつかの性質を紹介しよう。実数 x に対して、 x が整数でない時は $\langle x \rangle$ を その小数部分 $\{x\}$ とし、整数のときは 1 とする。Arakawa [Ar1, Ar2] は次の無限級数についての変換公式を与えた。

$$
H(\alpha, s, y, x) := \eta(\alpha, s, \langle y \rangle, x) + \mathrm{e}(s/2)\eta(\alpha, s, \langle -y \rangle, -x). \tag{3.3}
$$

特に、$l\ (\geq 2)$ が整数の時、

$$
H(\alpha, -l+1, y, x) = \begin{cases} \dfrac{i}{2}\Big(\xi_l(x;\alpha) + i \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}(mx) + (-1)^{l-1}\mathrm{e}(-mx)}{m^l}\Big) & (y \in \mathbb{Z}), \\ \dfrac{i}{2}\Big(\xi_l(x + \{y\}\alpha;\alpha) - i \displaystyle\sum_{m}{}' \frac{\mathrm{e}(m(x+\{y\}\alpha))}{m^l}\Big) & (y \notin \mathbb{Z}) \end{cases} \tag{3.4}
$$

となる。ただし、$\xi_l(x;\alpha) := \sum_m{}' \dfrac{\mathrm{e}(mx)}{m^l} \cot \pi m \alpha$ とする。Proposition 2.1 と同じように、無限級数 $H_l^\tau(\Xi;\alpha)$ は保型的性質を持ち、τ を $i\infty$ に持っていくと、$H(\alpha, -l+1, -y, x)$ になる。

PROPOSITION 3.2. α を代数的実無理数、$l(\geq 3)$ を整数とする。$\Xi = \begin{pmatrix} x' & x \\ y' & y \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ は $(y', y) \notin \mathbb{Z}^2$ を満たすとする。
(i) $V \in SL_2(\mathbb{Z})$ の時、次が成り立つ。

$$H_l^{\tau}(\Xi;\alpha) = \frac{1}{j(V;\tau)^{l+1}} H_l^{V\tau}(\Xi\, {}^tV;\alpha). \tag{3.5}$$

(ii) $CL_l(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}(mx) + (-1)^{l-1}\mathrm{e}(-mx)}{m^l}$ とおく。このとき、

$$\mathrm{Re}\lim_{\tau\to i\infty} H_l^{\tau}(\Xi;\alpha) = \begin{cases} (-1)^{l+1}\dfrac{l!}{(2\pi i)^l}\Big(H(\alpha, -l+1, 0, x) + CL_l(x)\Big) & (y \in \mathbb{Z}), \\ (-1)^{l+1}\dfrac{l!}{(2\pi i)^l} H(\alpha, -l+1, -y, x) & (y \notin \mathbb{Z}). \end{cases} \tag{3.6}$$

が成り立つ。

証明は省略する（[Ma3] を参照せよ）。

4 Transformation Formula

この最後のセクションでは、楕円 Dedekind-Rademacher 和 $S_{m,n}^{\tau}(\Xi;\alpha)$ が現れる無限級数 $H_l^{\tau}(\Xi;\alpha)$ の変換公式を与える。任意の行列 $V = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に対して、$\mathrm{SM}_2(V)$ を次のような $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ の部分集合とする。

$$\mathrm{SM}_2(V) := \left\{ \begin{pmatrix} x' & x \\ y' & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, \vec{y}, d\vec{y} + c\vec{x} \notin \mathbb{Z}^2 \right\}. \tag{4.1}$$

有理数 r と行列 $V \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に対して、同じ記号 SM_2 を使うことにする。$\mathrm{SM}_2(r)$ と $\mathrm{SM}_2(V)$ は、$c \neq 0$ の時、$\mathrm{SM}_2(-d/c) = \mathrm{SM}_2(V)$ という近しい関係を持つからである。さて、目的の変換公式を記述するため、行列 $\Xi = \left(\begin{smallmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SM}_2(V)$ と複素数 z に対して、関数 $R_l^{\tau}(\Xi;z;V)$ を次のように定義する。$c \geq 0$ の時、

$$R_l^{\tau}(\Xi;z;V) := \begin{cases} \dfrac{(-1)^l}{l+1}\displaystyle\sum_{k=-1}^{l} \binom{l+1}{k+1}\big(-j(V,z)\big)^k S_{k+1,l-k}^{\tau}\left(\begin{matrix} -\vec{x} \\ \vec{y} \end{matrix}; \frac{d}{c}\right) & (c > 0), \\ 0 & (c = 0). \end{cases} \tag{4.2}$$

$c < 0$ の時は, $R_l^{\tau}(\Xi;z;V) := R_l^{\tau}(\Xi;z;-V)$ と定める。楕円 Dedekind-Rademacher 和の連続性により、$R_l^{\tau}(\Xi;z;-V)$ は $\Xi \in \mathrm{SM}_2(V)$ 上で、連続関数となる。
次が目的の変換公式である。

THEOREM 4.1. α を代数的実無理数、$l \geq 3$ を整数、V を モジュラー群 $SL_2(\mathbb{Z})$ の元とする。行列 Ξ が $SM_2(V)$ の元の時、次が成り立つ。

$$H_l^\tau(\Xi;\alpha) - j(V;\alpha)^{l-1} H_l^\tau(V\Xi; V\alpha) = R_l^\tau(\Xi;\alpha;V). \tag{4.3}$$

この定理の証明には次の二つの補題があれば良い。

LEMMA 4.2. 行列 T と S をそれぞれ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *and* $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ と定義する。もし $V \in \{T^{\pm 1}, S\}$ かつ $\Xi \in SM_2(V)$ ならば、*(4.3)* は成り立つ。

LEMMA 4.3. z を複素数、l を正整数、そして V, V_1, V_2 を $V = V_2V_1$ を満たすモジュラー群 $SL_2(\mathbb{Z})$ の元とする。$\Xi \in SM_2(V) \bigcap SM_2(V_1)$ の時、

$$R_l^\tau(\Xi;z;V_1) + j(V_1,z)^{l-1} R_l^\tau(V_1\Xi;V_1z;V_2) = R_l^\tau(\Xi;z;V) \tag{4.4}$$

が成り立つ。

これらの補題の証明は [Ma2] を参照のこと。それでは定理の証明をしよう。

Proof of Theorem 4.1. $G = \{T^{\pm 1}, S\}$ とおく。任意の正整数 n に対して、U_n を次のような $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の部分集合とする。

$$U_n := \{V = V_nV_{n-1}\cdots V_1 | V_1, \ldots, V_k \in G\ (k = 1, \ldots, n)\}.$$

モジュラー群は G の元で生成されるので、任意の $V \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に対して、$V \in U_n$ となる正整数 n がある。さて、(4.3) を n に関する帰納法を使って証明しよう。$n = 1$ の時は Lemma 4.2 により (4.3) は成り立つ。$V \in U_{n-1}$ の時、(4.3) が成り立つと仮定する。$V \in U_n$ とする。U_n の定義より、$V = V_2V_1$ となる二つの行列 $V_1 \in G$ と $V_2 \in U_{n-1}$ がある。$j(V;\alpha) = j(V_1;\alpha)j(V_2;V_1\alpha)$ より、(4.3) の左辺は

$$\Big(H_l^\tau(\Xi;\alpha) - j(V_1;\alpha)^{l-1}H_l^\tau(V_1\Xi;V_1\alpha)\Big) + \\ j(V_1;\alpha)^{l-1}\Big(H_l^\tau(V_1\Xi;V_1\alpha) - j(V_2;V_1\alpha)^{l-1}H_l^\tau(V_2(V_1\Xi);V_2(V_1\alpha))\Big)$$

となる。$\Xi \in \mathrm{SM}_2(V)\bigcap \mathrm{SM}_2(V_1)$ の時、4.3 と帰納法の仮定より、これは (4.3) の右辺に等しい。$\mathrm{SM}_2(V)\bigcap\mathrm{SM}_2(V_1)$ は $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ において稠密であり、$H_l^\tau(\Xi;\alpha)$ と $R_l^\tau(\Xi;\alpha;V)$ はその定義域で連続関数なので、(4.3) は $\Xi \in \mathrm{SM}_2(V)$ においても成り立つ。 □

REMARK 4.4. τ を $i\infty$ に持っていくと、$R_l^\tau(\Xi;z;V)$ は [Ca2, Eq. (1.2)] の中で扱われている $f_{l+1}(-d,c;z)$ と同じになる。つまり、(4.4) は [Ca2, Eq. (1.11)] を再提供する。

参考文献

[Ap1] T. M. Apostol, *Generalized Dedekind sums and transformation formulae of certain Lambert series*, Duke Math. J. **17** (1950), 147–157.

[Ap2] T. M. Apostol, *Modular functions and Dirichlet series in number theory*, Graduate Texts in Mathematics, 41, Springer-Verlag, New York, 1990.

[Ar1] T. Arakawa, *Generalized eta-functions and certain Ray class invariants of real quadratic fields*, Math. Ann. **260** (1982), 475–494.

[Ar2] T. Arakawa, *Dirichlet series* $\sum_{n=1}^{\infty} \cot \pi n\alpha / n^s$, *Dedekind sums, and Hecke L-functions for real quadratic fields*, Comment. Math. Univ. St. Paul. **37** (1988), 209–235.

[As1] T. Asai, *Some arithmetic on Dedekind sums*, J. Math. Soc. Japan 38 (1986), no. 1, 163–172.

[As2] T. Asai, 2006, private email.

[Ba1] A. Bayad, *Sommes de Dedekind elliptiques et formes de Jacobi*, Ann. Inst. Fourier Grenoble, **51** (2001), 29–42.

[Ba2] A. Bayad, *Sommes elliptiques multiples d'Apostol-Dedekind-Zagier*, C. R. Acad. Sci. Paris, **339** (2004), 457–462.

[Ber1] B.C. Berndt, *Generalized Dedekind eta-functions and generalized Dedekind sums*, Trans. Amer. Math. Soc. **178** (1973), 495–508.

[Ber2] B.C. Berndt, *Generalized Eisenstein series and modified Dedekind sums*, J. Reine Angew. Math. **272** (1974), 182–193.

[Ber3] B.C. Berndt, *Dedekind sums and a paper of G. H. Hardy*, J. London Math. Soc. (2) **13** (1976), 129–137.

[Ca1] L. Carlitz, *Some theorems on generalized Dedekind sums*, Pacific J. Math. **3** (1953), 513–522.

[Ca2] L. Carlitz, *A further note on Dedekind sums*, Duke Math. J. **23** (1956), 219–223.

[Di] U. Dieter, *Cotangent sums, a further generalization of Dedekind sums*, J. Number Theory **18** (1984), 289–305.

[De] R. Dedekind, *Erläuterungen zu zwei Fragmenten von Riemann*, Bernhard Riemann's Gesammelte mathematische Werke, 2nd ed., Teubner, Leipzig, 1892, 466–472.

[Eg] S. Egami, *An elliptic analogue of the multiple Dedekind sums*, Compositio Math. **99** (1995), 99–103.

[FY] S. Fukuhara and N. Yui, *Elliptic Apostol sums and their reciprocity laws*, Trans. Amer. Math. Soc. **356** (2004), no.10. 4237–4245.

[Ha] U. Halbritter, *Some new reciprocity formulas for generalized Dedekind sums*, Results Math. **8** (1985), 21–46.

[HH] R.R. Hall and M.N. Huxley, *Dedekind sums and continued fractions*, Acta Arith. **63** (1993), 79–90.

[HWZ] R.R. Hall, J. C. Wilson and D. Zagier, *Reciprocity formulae for general Dedekind-Rademacher sums*, Acta Arith. **73** (1995), 389–396.

[Is] S. Iseki, *The transformation formula for the Dedekind modular function and related functional equations*, Duke Math. J. **24** (1957), 653–662.

[It1] H. Ito, *On a property of elliptic Dedekind sums*, J. Number Theory **27** (1987), 17–21.

[It2] H. Ito, A function on the upper half space which is analogous to the imaginary part of $\log \eta(z)$. J. Reine Angew. Math. 373 (1987), 148–165.

[It3] H. Ito, *A density result for elliptic Dedekind sums*, Acta Arith. **112** (2004), 199–208.

[Lev] A. Levin, *Elliptic polylogarithms : An analytic theory*, Compositio Math. **106** (1997), no.3, 267–282.

[Le] J. Lewittes, *Analytic continuation of Eisenstein series*, Trans. Amer. Math. Soc. **177** (1972), 469–490.

[Ma1] T. Machide, *An elliptic analogue of generalized Dedekind-Rademacher sums*, to appear in J. Number Theory 128 (2008) 820–834.

[Ma2] T. Machide, *Elliptic Dedekind-Rademacher sums and transformation formulae of certain infinite series*, preprint, EPrint Series of Department of Mathematics, Hokkaido University,
863, 2007, 22 pages.

[Ma3] T. Machide, 楕円 Dedekind 和とある無限級数の変換公式 (I), 解析的整数論とその周辺、京都大学数理解析研究所（２００７年１０月）, to appear in Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku.

[RG] H. Rademacher and E. Grosswald, *Dedekind Sums*, Carus Mathematical

Monographs, No. 16, The Mathematical Association of America, Washington, D. C., 1972.

[Sc] R. Sczech, *Dedekindsummen mit elliptischen Funktionen*, Invent. Math. **76** (1984), 523–551.

[We] A. Weil, *Elliptic Functions according to Eisenstein and Kronecker*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.