数理解析研究所講究録
第1618巻2008年1-23

ベルグマン核の種々の安定性について

大沢健夫
(名古屋大学・多元数理)

序、再生核は現在様々な方面に応用されているが、元来は1907年、ポーランドの数学者S. Zarembaが2重調和関数($\Delta\Delta f=0$の解)に対するDirichlet問題を直交射影の方法で解くために導入したものである。複素解析におけるBergman核はL^2正則関数に対する再生核であり、1922年、S. Bergmanらによって導入された。多変数複素解析におけるその本格的な研究は、岡潔らにより基礎が整えられた1950年ごろから始まり、C.B. Morreyらによる調和積分論の拡張をうけて、1965年、L. Hörmander [H]により、強擬凸領域上のBergman核に関して基本的な結果が得られた。座標のとりかえに関するBergman核の変換則は双正則不変な計量であるBergman計量を導くが、Hörmanderの解析によってその双正則幾何への応用に新たな道が開け、1974年、C. Fefferman [F-1]によりC^∞級の滑らかな境界をもつ強擬凸領域の間の双正則写像が境界までC^∞級に拡張できることが示された。その後、Hörmanderの理論の拡張に伴ってBergman核への理解が一層深まり、Feffermanの定理も一般化された([B-L], [F-2], [Hi])。

Bergman核の理論が詳しくなるにつれ、方々で様々な問題が立てられるようになった。最近は複素幾何への応用という観点から助変数に関する依存性が調べられ、発展性のありそうな結果が得られている(cf. [M-Y], [B], [T])。

今やBergman核は多くの相貌を持っているが、それらに触れつつも、Bergman核の本来の面目に思いをこらしてみたい。そこにはまだ、知られざる美しい原理がひそんでいるように感ずるからである。

小論ではBergman核の安定性に関わるいくつかの結果を紹介するが、それは偏にこのような動機に基くものである。

§1. 複素多様体上のBergman核（準備）

一般に再生核というものは、ある集合X上の関数のなすHilbert空間$\mathcal{H} \subset \mathbb{C}^X$において、付値写像

$$
\begin{array}{cccc}
x: \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathbb{C} & \quad (x \in X) \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & \\
f & \longmapsto & f(x) &
\end{array}
$$

の連続性の条件がみたされるときに定まる関数

$$K: X \times X \longrightarrow \mathbb{C}$$

であって、$\mathcal{H}$の内積$\langle\ ,\ \rangle$に関する再生性

$$(1.1) \qquad f(x) = \langle f(\cdot), \overline{K(x, \cdot)} \rangle \quad ({}^{\forall} f \in \mathcal{H})$$

をもつものをいう。Xや$(\mathcal{H}, \langle\ ,\ \rangle)$が具体的に与えられたとき、それに応じて再生核$K$に$X$と$\mathcal{H}$の性質が反映

されるので、その仕組を解析することにより、Kからそれらについての情報を引き出せると期待される。

Xが$\mathbb{C}^n$の有界領域Dであり、$\mathcal{H}$がD上のL^2正則関数の空間の場合、再生核KをDのBergman核と呼び、$K_D(z, w)$で表す。このとき$\mathcal{H}$はBergman空間と呼ばれる。K_DによりD上のKähler計量（の基本形式）

$$\omega_D := \sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial} \log K_D(z, z)$$

が定まる。H. Bremermannはω_Dが完備ならばDは正則凸であることを示したが、これは多変数複素解析におけるBergman核の役割を示唆する有名な例である。

計量ω_DはDのBergman計量と呼ばれる。有界領域$D_1, D_2 \subset \mathbb{C}^n$の間に双正則写像$\varphi : D_1 \longrightarrow D_2$があるとき、$\varphi^* \omega_{D_2} = \omega_{D_1}$が成立する。これはBergman計量の著しい性質である。

一般の複素多様体上では正則関数が定数しかないことが多いので、Bergman核をそのままの形で拡張して計量をとり出すのには無理がある。そこで関数の代りに微分形式の空間を考える（cf. [K]）：

Mを連結なn次元複素多様体とし、M上の正則n形式fで可積分条件

$$\|f\|^2 := \sqrt{-1}^{n^2} \int_M f \wedge \overline{f} < \infty$$

をみたすものの集合を$\mathcal{H}_M$とする。内積

$$\langle f, g \rangle = \sqrt{-1}^{n^2} \int_M f \wedge \overline{g}$$

により、$\mathcal{H}_M$はHilbert空間になる。Mの正則接ベクトル束を$T^{1,0}M$、その双対を$(T^{1,0}M)^*$としたとき、外積$\bigwedge^n (T^{1,0}M)^*$をMの標準束といい、K_Mで表す。

このときMの各点zに対してK_Mのz上のファイバー$K_{M,z}$に値をとる一般化された付値写像

$$\begin{array}{rccc} z : & \mathcal{H}_M & \longrightarrow & K_{M,z} \\ & \Psi & & \Psi \\ & f & \longmapsto & f(z) \end{array}$$

が定まるが、Cauchyの評価式よりこれは連続である。従って、$\pi_j : M \times M \longrightarrow M \ (j=1, 2)$を第$j$成分への射影として

$$f(z) = \left\langle f(\cdot), \overline{K_M(z, \cdot)} \right\rangle$$

をみたす一般化された再生核

$$K_M : M \times M \longrightarrow \pi_1^* K_M \otimes \overline{\pi_2^* K_M}$$

が定まる。これをMのBergman核(形式)と呼ぶ。Mが上のように$\mathbb{C}^n$の有界領域の場合、$\mathcal{H}_M$は対応

$$f\,dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n \longmapsto f$$

により自然にL^2正則関数の空間と同一視できるので、このBergman核の定義は先に与えたものと一致する。

K_Mを$M\times M$の対角線集合Δ_Mに制限したものはベクトル束$L := \pi_1^* K_M \otimes \overline{\pi_2^* K_M}\,|\,\Delta_M$の断面であるが、$L$の変換関数が$|$正則関数$|^2$の形をしていることから$K_M(z,z)$が0点をもたなければ

$$\omega_M := \sqrt{-1}\,\partial\bar\partial \log K_M(z,z)$$

によってM上の半正値$(1,1)$形式が定まる。これをM上のBergman擬計量という。ω_Mがいたる所正値のとき、ω_MはM上のKähler計量になる。これをMのBergman計量という。

Bergman核$K_M(z,w)$は、$\mathcal{H}_M$の完全正規直交系$\{f_\mu\}_{\mu=1}^N$ $(0\le N\le\infty)$を用いて

$$(1.2)\qquad K_M(z,w)=\sum_{\mu=1}^{N} f_\mu(z)\otimes\overline{f_\mu(w)}\qquad(\text{広義一様})$$

と書ける。この表示より

$$(1.3)\quad K_M(z,z) = \sup\left\{ |f(z)|^2 \;\middle|\; \|f\|=1,\ f\in\mathcal{H}_M \right\}$$

が容易にわかる。またf_μの連比による写像

$$\begin{array}{cccl}
\Phi : & M & \longrightarrow & \ell^2_{\mathbb{C}}\setminus\{0\}/\mathbb{C}^* =: \mathbb{C}P^\infty \\
& \Psi & & \quad\Psi \\
& z & \longmapsto & (f_1(z) : f_2(z) : \cdots : f_\mu(z) : \cdots)
\end{array}$$

によって$\mathbb{C}P^\infty$のFubini-Study計量を引き戻すとMのBergman擬計量になることも同様である。この解釈からBergman計量が完備になるための有用な十分条件が得られる(小林の判定条件)。これを用いて最近次の結果が示された。

定理1.1.(B.-Y. Chen [Ch]) 強多重劣調和関数$\varphi : M \longrightarrow [-1,0)$で、$\forall c<0$に対して$\varphi^{-1}([-1,c])$がコンパクトであるものが存在すれば、$M$上にはBergman計量が存在し、しかもそれは完備である。

このような多様体上でKähler-Einstein計量とBergman計量の比較ができれば面白いかもしれない。

§2. 上半連続性と連続性

助変数 $t\in(-1,1)$ に依存する複素多様体の変形族 $\{M_t\}$ があるとき、M_t の Bergman核 K_{M_t} が t にどう依存するかを問題にする。

[変形族の定義] M を連結な n 次元複素多様体、$\mathcal{A}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ $(\varphi_\alpha: U_\alpha \hookrightarrow \mathbb{C}^n)$ を M 上の局所座標系（アトラス）とする。$\widehat{M}:=M\times(-1,1)$ 上の C^∞ 級の局所座標系 $\widehat{\mathcal{A}}=\{(\widehat{U}_\alpha,\widehat{\varphi}_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ があり、$\widehat{\varphi}_\alpha(\widehat{U}_\alpha)=\varphi_\alpha(U_\alpha)\times(-1,1)$、かつ座標変換

$$\widehat{\varphi}_\alpha\circ\widehat{\varphi}_\beta^{-1}: \widehat{\varphi}_\beta(\widehat{U}_\alpha\cap\widehat{U}_\beta)\longrightarrow \widehat{\varphi}_\alpha^{-1}(\widehat{U}_\alpha\cap\widehat{U}_\beta)$$

を $\varphi_\beta(U_\beta)\times(-1,1)$ と $\varphi_\alpha(U_\alpha)\times(-1,1)$ の座標 (z_β,t), (z_α,t) で書いたとき、

$$\widehat{\varphi}_\alpha\circ\widehat{\varphi}_\beta^{-1}(z_\beta,0)=\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}(z_\beta)$$

$$\widehat{\varphi}_\alpha\circ\widehat{\varphi}_\beta^{-1}(z_\beta,t)=(z_\alpha(z_\beta,t),t)$$

であり、さらに z_α は z_β に関して正則になっているとする。

このとき $M_t:=M\times\{t\}$ $(-1<t<1)$ は局所座標系

$$\widehat{\mathcal{A}}_t=\{(U_{\alpha,t}:=\widehat{\varphi}_\alpha^{-1}(U_\alpha\times\{t\}),\widehat{\varphi}_\alpha|U_{\alpha,t})\}_{\alpha\in A}$$

をもつ複素多様体である。$(\hat{M}, \hat{\mathcal{A}})$、または $\mathcal{M} := \{M_t \mid t \in (-1,1)\}$ を $(-1,1)$ 上の M の局所変形族という。一般の変形族は局所変形族をつなげたものとして定義する。以下の話は局所変形族についてのものであるが、簡単のため変形族についての命題として述べる。

定理 2.1. M の変形族 $\{M_t\}_{t\in(-1,1)}$ に対し、任意の点 $z \in M$ で

$$\limsup_{t\to 0} K_{M_t}(z,z) \leq K_M(z,z)$$

が成立する。

$K_M(z,z) \not\equiv 0$ であっても $K_{M_t}(z,z) \equiv 0$ $(\forall t \neq 0)$ となることはあり、興味深い例もあるが、多少こみ入っているのであとで触れよう。

一方、$K_M(z,z) \equiv 0$ かつ $K_{M_t}(z,z) \not\equiv 0$ $(t \neq 0)$ となる例はありふれたものである。たとえば $M = \mathbb{C}$ は1つの座標 $id: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ から成るアトラスをもつが、写像

$$\begin{array}{ccc} M \times (-1,1) & \longrightarrow & \mathbb{C} \times (-1,1) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (z,t) & \longmapsto & \left(\dfrac{z}{t^2|z|^2+1}, t\right) \end{array}$$

によって定まる変形族 $\{M_t\}$ において、$t \neq 0$ ならば $M_t \simeq \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ であり、従って $K_M \equiv 0$, かつ $K_{M_t} \not\equiv 0$ となる。

次は定理1と(1.3)、およびHodge理論より容易に従う。

定理2.2. コンパクトなKähler多様体Mの変形族$\{M_t\}$に対し、

(2.1) $$\lim_{t \to 0} K_{M_t}(z, w) = K_M(z, w) \quad (\text{一様})$$

ちなみにMが非Kählerの場合、反例が中村郁氏によって与えられている(cf.[N])。ただし$\dim M = 2$ならば、分類理論により反例は存在しない。(これらを御教示下さった辻元氏と小木曽啓示氏に感謝する。)

一方、L^2拡張定理(cf.[O-T], [O-1])を用いれば次が示せる。

定理2.3. コンパクトな複素多様体Mの変形族$\{M_t\}$が以下をみたすとする。

i) $\{M_t\}$は複素解析族へと拡長できる。すなわち$M \times (-1, 1)$を実超曲面として含む複素多様体$\tilde{M}_{\mathbb{C}}$と全射適正(proper)正則写像$\pi : \tilde{M}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{D}$が存在して、包含写像$\iota : M \times (-1, 1) \hookrightarrow \tilde{M}_{\mathbb{C}}$と$\pi$の合成は射影$M \times (-1, 1) \to (-1, 1)$に等しい。

ii) $\tilde{M}_{\mathbb{C}}$の余次元1の複素解析的部分集合Sが

存在して、$\hat{M}_{\mathbb{C}} \setminus S$ は Stein 多様体であり、かつ
て $(M \times \{0\}) \not\subset S$ である。

このとき (2.1) が成立する。

この結果を非コンパクトな多様体の変形族に対して拡張することには大きな意味があると考えているのだが、それについてはまだ試作品しかできていない (cf. [O-2])。

次に $\mathbb{C}^n$ の領域の変形族についてだが、簡単のため滑らかな C^∞ 級の境界をもつ有界領域に限って述べる。D をそのような領域とし、閉包 $\overline{D}$ の変形族 $\mathcal{D} = \{\overline{D_t}\}$ をふちつき複素多様体の変形族として上と同様に定義する。

定理 2.4. D が強擬凸領域ならば、変形族 $\mathcal{D}$ に対して

(2.2) $$\lim_{t \to 0} K_{D_t}(z, w) = K_D(z, w) \quad (\text{広義一様})$$

である。

証明には (1.2), (1.3) および $\bar{\partial}$ 方程式の L^2 標準解の評価を用いる。

定理 2.4 における D の強擬凸性はどこまで緩めることができるだろうか。ただし D_t がすべて擬凸ならば同様の

議論が成立するから問題にならない。(2.2)が成り立たない族の例は、$\overline{D}$がStein近傍系をもたないDに対して容易に作れる。

定理2.4の仮定の下で、$K_{D_t}(z,w)$は実際には(z,w,t)に関して$(\overline{D}\times\overline{D}\setminus\Delta_{\partial D})\times\{0\}$の近傍で$C^\infty$級であることが知られている(cf.[G-K])。これにより、強擬凸領域の境界に定まるCR構造の変形と、Bergman核の漸近展開の係数の変形が、然るべき公式で結ばれるであろうことが予測される。

§3. 上空極限について

Dが開球$\mathbb{B}^n=\{z\in\mathbb{C}^n \mid \|z\|<1\}$、あるいはより一般に有界対称領域である場合には、双正則自己同型群$Aut(D)$はDに効果的かつ固定点なしに、かつ真性不連続に作用する部分群を含み、Γをそのような群とするとその作用によるDの商空間D/Γはコンパクトな複素多様体になる。DのBergman計量はそのΓ不変性により多様体$M:=D/\Gamma$上に計量$\tilde{\omega}_M$を誘導し、これはDのBergman核が定めるK_M上のファイバー計量の曲率形式に一致する。これが計量$\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log K_D(z,z)$の小平邦彦氏による解釈であり、特に$K_M$が小平の意味で正であることを意味し、従って小平の埋め込み定理によりMは射影的代数多様体になる。

1次元のコンパクトな複素多様体は、その標準束が正ならば、Koebeの一意化定理により普遍被覆面が $\mathbb{D}$ に同型であるから、すべて $\mathbb{D}/\Gamma$ の形になるが、高次元の場合、普遍被覆が有界対称領域になるような多様体は非常に限られる。（Margulis [M] と Yau [Y-1] の結果は有名である。）
（これに関する結果としては）

このクラスの多様体の研究の中で、D. Kazhdan [Kd] は、多様体の'塔'（tower）に沿うBergman核の極限について調べており、[Y-2] によれば Kazhdan は一般に次が成り立つことを主張している。

［上空極限定理］ M は（一般の）複素多様体、$\hat{M} \longrightarrow M$ は Galois 被覆であるとする。$Aut(\hat{M})$ の部分群の列 $\Gamma_1 \supset \Gamma_2 \supset \cdots \supset \Gamma_k \supset \cdots$ で、$\hat{M}/\Gamma_1 \simeq M$、指数 $[\Gamma_k, \Gamma_{k+1}]$ は有限（$\forall k$）、かつ

$$(3.1) \qquad \bigcap_{k=1}^{\infty} \Gamma_k = \{id\}$$

となるものをとり、$M_k = \hat{M}/\Gamma_k$，$\pi_k : \hat{M} \longrightarrow M_k$ は射影とする。このとき、もし $\hat{M}$ が Bergman 計量をもてば

$$(3.2) \qquad \lim_{k\to\infty} \pi_k^* \partial\bar{\partial} \log K_{M_k} = \partial\bar{\partial} \log K_{\hat{M}}$$

が成立する。

この命題の完全な証明はまだ存在しないようであるが、1993年、A. Rhodes [R] は、$\hat{M} = \mathbb{D}$ であり M_k はすべてコンパクトであるとき、次のいずれかが満たされれば (3.2) が成立することを示した。

(a) Poincaré 計量に関する M_k 上の Laplace 作用素の最小正固有値を λ_k とするとき

$$\inf_k \lambda_k > 0.$$

(b) Γ_k はすべて Γ_1 の正規部分群である。

この結果は H. Donnelly [D] および [O-4] において多少一般化された。たとえば (a) がみたされれば M_k はコンパクトでなくてもよい。特に $SL(2, \mathbb{Z})$ の主合同部分群の系列に対して (a) がみたされることが [L-R-S] により知られているので、この場合には上空極限定理が正しいことがわかる。

[D] と [O-4] では (3.2) より強い結果

$$(3.3) \qquad \lim_{k\to\infty} \pi_k^* K_{M_k}(z, z) = K_{\hat{M}}(z, z)$$

が示されている。また、この証明より

$$(3.4) \qquad \lim_{k\to\infty} \pi_k^* K_{M_k}(z, w) = K_{\hat{M}}(z, w)$$

も同じ条件下で成立することがわかる。[O-4]では $\widehat{M}=\mathbb{D}$, (b), および M_1 のコンパクト性だけを仮定して(3.3)を導いている。($[\Gamma_k, \Gamma_{k+1}]<\infty$ は不要である。)

ちなみに[D-W]によれば、すべてのリーマン対称空間は(3.1)と(b)をみたす余コンパクトな自己等長同型群の降鎖列をもつ。そして、それらに付随する多様体塔におけるBetti数の列の漸近挙動に関して、S.-K. Yeung氏により興味深い結果が得られている(cf. [Yn])。(文献[D], [D-W], [Yn]をお教え下さったS.-K. Yeung氏に感謝する。)

§4. 汎多重劣調和性

この節では、複素解析族に対するBergman核のパラメータ依存性に関して、単なる(半)連続性よりも詳しい結果を紹介する。

M は連結な複素多様体とし、複素多様体 $\mathcal{M}$ と全射正則写像 $\pi: \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{D}$ で、$\operatorname{rank} d\pi \equiv 1$ かつ $\pi^{-1}(0) \simeq M$ をみたすものが与えられているとする。このとき複素多様体 $M_\zeta := \pi^{-1}(\zeta)$ の族 $\{M_\zeta\}_{\zeta\in\mathbb{D}}$ に対する $K_{M_\zeta}(z, z)$ の性質が詳しくわかるようになり、代数幾何学に応用されている。そのような最近の展開の発端は、米谷文男氏と山口博史氏による次の結果である。

定理4.1．（cf．［M-Y］）　複素解析族 $\{M_\zeta\}_{\zeta\in D}$ に対し、すべての M_ζ は連結な開リーマン面であり、全空間 $\mathcal{M}$ は Stein 多様体であるとする。このとき $\log K_{M_\zeta}(z, z)$ は、$\mathcal{M}$ の各座標近傍上で、(z, ζ) の関数として多重劣調和であるか、または $\equiv -\infty$ である。

この証明は Laplace 方程式の基本解（i.e. Green 関数）の変分の計算と、Bergman 核を Green 関数を用いて表す吹田の公式を組み合わせて行なわれたが、B. Berndtsson 氏は再生公式（1.1）を Bergman 核自身に適用した式を直接微分して、定理4.1を高次元の擬凸領域の複素解析族に対して一般化した。その結果を［B］に沿って述べよう。

D を $\mathbb{C}^k_t\times\mathbb{C}^m_z$ 内の擬凸領域（t, z は座標を表す）とし、φ を D 上の多重劣調和関数とする。

$$D_t := \{ z \mid (t, z) \in D \}$$

$$\varphi^t := \varphi | D_t$$

とおき、$A^2_t := A^2(D_t, \varphi^t)$ を D_t 上の正則関数 h で

$$\int_{D_t} |h|^2 e^{-\varphi^t} < \infty$$

をみたすもの全体のなす Hilbert 空間、$K_t(\zeta, z)$ を

その再生核とする。

定理4.2、　D から $[-\infty,\infty)$ への関数

$$(t,z)\longmapsto \log K_t(z,z)$$

は多重劣調和であるか、または D 上で $\equiv -\infty$ である。

証明の概要：　まず D が強擬凸の場合に再生公式を用いて $\partial_t\bar{\partial}_t K_t(z,z)$ を計算すると、$\bar{\partial}$ 方程式の L^2 基本解についての Hörmander の定理を使って

$$(4.1)\qquad \sqrt{-1}\,\partial_t\bar{\partial}_t K_t(z,z)\ \geq\ 0$$

がいえる。φ は任意だから、t に関する任意の多重劣調和関数 $\psi(t)$ に対して $e^{\psi(t)}K_t(z,z)$ が t に関して多重劣調和であることが (4.1) から従う。さらにこのことから $\log K_t(z,z)$ の t に関する多重劣調和性が従い、$\{D_t\}$ の代りに $\{D_t-a(t)\}$ をとると、$\log K_t(z+a(t),z+a(t))$ が任意の $a\in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^k,\mathbb{C}^n)$ に対して t に関して ($t=0$ の近くで) 多重劣調和であることもわかる。従ってこの場合、$\log K_t(z,z)$ は (t,z) に関して多重劣調和である。

D が一般の擬凸領域の場合には、D を内側から強擬凸領域の増大列 D^k ($k=1,2,\cdots$) で近似する。それらに対応する再生核の列 $K_t^k(z,z)$ について、$\log K_t^k(z,z)$ が $\log K_t(z,z)$ に収束する減小列になることから、

$\log K_t(z,z)$ は多重劣調和であるか、または $\equiv -\infty$ となる。//

一般に、Hermite計量つきの複素多様体 (M, ω) と M 上の Hermite 正則ベクトル束 (E, h) に対して、E の L^2 正則断面全体のなす Hilbert 空間 $A^2(M, E, \omega, h)$（一般化された Bergman 空間）が定まる。これに対する一般化された再生核も、最近は Bergman 核と呼ばれる。

このような Bergman 核は、代数幾何に表れる

$$(\text{標準束})^m \otimes L \qquad (L \text{は直線束})$$

の形をした直線束の曲率を調べるのに適しており、定理4.2はそのような場面で応用されている（cf. [B-P]）。

§5. 平衡極限

以下では第3節の上空極限とは別種の極限について述べよう。

まず多重劣調和関数に対する Demailly の近似定理を思い出そう。

$D \subset \mathbb{C}^n$ は擬凸であるとし、φ を D 上の多重劣調和関数とする。$A^2(D, m\varphi)$ を D 上の正則関数 h で

$$\int_D |h|^2 e^{-m\varphi} < \infty$$

をみたすもの全体とし、$K_{D,m\varphi}$ を $A^2(D, m\varphi)$ の再生核とする。

定理5.1.（cf. [Dm] または [O-3]）

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \log K_{D,m\varphi} = \varphi \quad \text{（各点収束）}$$

証明には [O-T] の L^2 拡張定理を用いる。

関数 φ として特に、コンパクト集合の容量に付随する極値的多重劣調和関数をとり、それを上のように近似したとき、

'$\frac{1}{m}\log K_{D,m\varphi}$ はもっと良く φ に収束するのではないか'

と考えるのは自然であろう。最近の R. Berman-S. Boucksom の論文ではそのような結果が得られているので、以下ではそれを紹介したい。

X を複素射影的代数多様体とし、L を X 上の正直線束、$H^0(L)$ を L の正則断面全体とする。L の任意の Hermite 計量をとり、それを $e^{-\phi}$（$\phi \in L^1_{loc}$）で表す（局所表示）。また、$H^0(L)$ の元 s の長さを $|s|_\phi$ で表す。

X内の局所非多重極(locally non-pluripolar)なコンパクト集合KとK上の確率測度μに対し、$H^0(L)$の元sの2種類のノルムを

$$\|s\|^2_{L^2(\mu,\phi)} = \int_X |s|^2_\phi \, d\mu$$

$$\|s\|_{L^\infty(K,\phi)} = \sup_K |s|_\phi$$

とおく。明らかに$\|\cdot\|_{L^2} \leq \|\cdot\|_{L^\infty}$である。

$$\rho(\mu,\phi)(x) = \sup_{\substack{s \neq 0 \\ \in H^0(L)}} \frac{|s(x)|^2_\phi}{\|s\|^2_{L^2(\mu,\phi)}}$$

とおく((1.3)の拡張)。Bergman核の性質より

$$\dim H^0(L) = \int \rho(\mu,\phi)\, d\mu$$

であるから、左辺をNとおき、確率測度βを

$$\beta(\mu,\phi) = \frac{1}{N}\rho(\mu,\phi)\mu$$

によって定義する。βを(K,ϕ)に関するBergman測度という。

次の定理は今や非常に有名である。

定理5.2.（Bouche-Catlin-Tian-Zelditch）
μとϕはX上C^∞級で、$\mu > 0$かつ$\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\phi > 0$とする。このとき$C^\infty$級の測度としての漸近展開

$$\beta(\mu, k\phi) = \frac{1}{V} MA(\phi) + \frac{\mu_1}{k} + \frac{\mu_2}{k^2} + \cdots + O(k^{-\infty})$$

が存在する。ただし$MA(\phi) := (\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\phi)^n$, $V := \int_X (\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\phi)^n$. $n = \dim X$.

2007年、Bermanは次を得た。

定理5.3.（cf. [Be]）μとϕはX上C^∞級であり、$\mu > 0$とする。このときLのファイバー計量$e^{-\phi_X}$を

$$\phi_X = \sup\{\psi \mid \psi \leq \phi \text{ かつ } \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi \geq 0\}$$

によって定めると、

$$\beta(\mu, k\phi) \xrightarrow[k \to \infty]{} V^{-1} MA(\phi_X) \quad (\text{弱収束})$$

となる。

$$\phi_K = \sup\{\psi \mid \psi|K \leq \phi|K \text{ かつ } \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi \geq 0\}$$

$$\mu_{eq}(K, \phi) = V^{-1} MA(\phi_K^*)$$

とおく。ただしϕ_K^*はϕ_Kの上半連続化（upper envelope）とする。

$\mu_{eq}(K,\phi)$を(K,ϕ)に関する平衡測度(equilibrium measure)という。このとき次が成り立つ。

定理5.4.(cf.[B-B-1]) μを(K,ϕ)に関するBergman測度とすると、

$$\beta(\mu, k\phi) \xrightarrow[k\to\infty]{} \mu_{eq}(K,\phi) \quad (\text{弱})$$

「平衡収束」に関しては、2008年9月現在、これが注目すべき最新の結果であろうと思われる。

ちなみに、Dirac測度の平均による$\mu_{eq}(K,\phi)$の近似列は、Kが$\mathbb{C}$のコンパクト集合の場合にM. Feketeがはじめて与えた($\mu_{eq}(K,\phi)$の元来の定義)。定理5.4はその直接の一般化ではないが、[B-B-2]ではFeketeの近似列の一般化についても論じられている。

References

[B-L] Bell, S. and Ligocka, E., Invent. Math. 57 (1980), 283–289.

[Be] Berman, R., arXiv: 0704.1640

[B-B-1] Berman, R. and Boucksom, S., arXiv: 0803.1950

[B-B-2] ——————, arXiv: 0807.0035

[B] Berndtsson, B., Ann. Fourier 56 (2006), 1633–1662.

[B-P] Berndtsson, B. and Păun, M., arXiv: 0804.3884v2 [math.AG]

[Bo] Bouche, T., (Trento, 1994), 67–81, de Gruyter, Berlin, 1996.

[C] Catlin, D., (Katata, 1997), Trends Math. 1999, pp. 1–23.

[Ch] Chen, B.-Y., Nagoya Math. J. 175 (2004), 165–170.

[Dm] Demailly, J.-P., J. Alg. Geom. 1 (1992), 361–409.

[D] Donnelly, H., Math. Z. 223 (1996), 303–308.

[D-W] DeGeorge, D and Wallach, N., Ann. of Math. 107 (1978), 133–150.

[F-1] Fefferman, C., Invent. Math. 26 (1974), 1–65

[F-2] ——————, Adv. Math. 31 (1979), 131–262.

[G-K] Greene, R.E. and Krantz, S., Adv. in Math. 43 (1982), 1–86.

[Hi] Hirachi, K., Ann. of Math. 151 (2000), 151–191.

[Hö] Hörmander, L., Acta Math. 113 (1965), 89–152.

[Kd] Kazhdan, D., Actes du Congrès Intern. des Math. Tome 2, pp. 321–325, 1971.

[K] Kobayashi, S., Trans. AMS 92 (1959), 267–289.

[L-R-S] Luo, W., Rudnick, Z. and Sarnak, P., Geom. Func. Anal. 5 (1995), 387–401.

[M] Margulis, A., Discrete subgroups of semisimple Lie groups, Springer 1991.

[M-Y] Maitani, F. and Yamaguchi, H., Math. Ann. 303 (2004), 477–489.

[N] Nakamura, I., Proc. Japan Acad. 48 (1972), 447–449.

[O-1] Ohsawa, T., Publ. RIMS, 24 (1988), 265–275.

[O-2] ——————, unpublished note.

[O-3] 多変数複素解析 岩波書店 1997, 2006.

[O-4] to appear.

[O-T] Ohsawa, T. and Takegoshi, K., Math. Z. 195 (1987), 197-204.

[R] Rhodes, A., Duke Math. J. 72 (1993), 725-738.

[Ti] Tian, G., J. Diff. Geom. 32 (1990), 99-130.

[T] Tsuji, H., math. AG/0703729.

[Y-1] Yau, S.T., Comm. Pure Appl. Math. 31 (1978), 339-411.

[Y-2] ———, Monograph de l'enseignement math. 33, 1986.

[Yn] Yeung, S.K., Duke Math. J. 73 (1994), 201-226.

[Z] Zelditch, S., Intern. Math. Res Notices (1998), 317-331.