数理解析研究所講究録
第 1618 巻 2008 年 95-103

吹田予想に関する Blocki の結果の紹介

山田 陽 (Akira Yamada)
東京学芸大学 (Tokyo Gakugei University)

1 概要

このノートでは最近 B. Blocki [3] により得られた吹田予想に関する結果を, 絶対値一価な乗法的正則函数および乗法的 Green 函数を用いて解説する.

2 吹田予想と Blocki の結果

1972 年に吹田先生は次の不等式を予想した [8]: 任意の Riemann 面 $\Omega \notin O_G$ に対して

$$C_\beta(p)^2 \leq \pi K(p,p), \quad \forall p \in \Omega. \tag{SC}$$

これがいわゆる**吹田予想** (SC) である. ここで, $C_\beta(p) = \exp(-\lim_{x\to p}(g(x,p) + \log|x-p|))$ は点 $p \in \Omega$ における対数容量, $K(x,y)$ は Ω の Bergman 核を表す. 論文 [8] では, 二重連結領域の場合に吹田予想の証明が与えられているが, 多重連結領域に関しても傍証として, 変分の手法を用いて特別な場合に予想が成り立つことを示している.

次に吹田予想に関する歴史を簡単に述べる. 1995 年に大沢氏は論文 [6] で不等式

$$C_\beta(p)^2 \leq A\pi K(p,p), \quad \forall p \in \Omega$$

において, 定数 A を 750 ととれることを一般の Riemann 面に対して示した. この結果は, 絶対定数 A の存在を示した点で画期的であった. 吹田予想は $A = 1$ に対応しているが, 予想が未だに解決していない現状においては次善の策として少しでも小さな A の値を示すことが問題となる. この点で最近の進展は 2007 年に Z. Blocki [3] が B. Berndtsson [2] の結果を用いて $A = 2$ を示したことである. ちなみに, 論文 [3] によると, 2003 年に B.-Y. Chen は Berndtsson の結果を用いて $A = 3.3...$ を, また 2004 年には B. Berndtsson 自身が unpublished ではあるが $A = 6$ を示しているそうである.

3 拡張吹田予想

Blocki の結果は次に述べる拡張吹田予想との関係が深い. そのために, 少し準備する. Riemann 面 Ω 上の unitary multiplier 全体の集合を $M(\Omega)$ とする. すなわち,

$$M(\Omega) = \{\chi\colon \chi \in \mathrm{Hom}(\pi_1(\Omega), \mathbb{C}^*) \text{ かつ } |\chi| = 1\}.$$

ρ を Ω 上の正値連続な重みとするとき, $\chi \in M(\Omega)$ にたいして

$$\Gamma_\rho^\chi(\Omega) = \{\omega\colon \text{multiplier } \chi \text{ をもつ } \Omega \text{ 上の正則 Prym 微分 s.t. } i\iint_\Omega \rho\omega\wedge\overline{\omega} < \infty\}.$$

とおく. Multiplier χ が unitary であることにより, $\Gamma_\rho^\chi(\Omega)$ には well-defined な内積

$$\langle\omega_1,\omega_2\rangle=\frac{i}{2}\iint_\Omega \rho\,\omega_1\wedge\overline{\omega_2}$$

が定義され, 再生核をもつ Hilbert 空間になる. この空間の再生核を $K_\rho^\chi(x,y)$ で表し, ***multiplicative Bergman* 核**と呼ぶ. Multiplier を明示したいときは χ-Bergman 核という. $\rho=1$ や $\chi=1$ のときは, 省略して $K^\chi(x,y)$ や $\Gamma^\chi(\Omega)$ などと書く. またグリーン函数 $g_p=g(\cdot,p)$ に対して, 絶対値一価な正則函数 $f_p=\exp(-g_p-ig_p^*)$ の multiplier を χ_p と書き *Green multiplier* という.

拡張吹田予想 (以下 ESC) とは次の不等式が成り立つという予想である: 任意の Riemann 面 $\Omega\notin O_G$ と任意の unitary multiplier $\chi\in M(\Omega)$ にたいして

$$C_\beta(p)^2\le\pi K^\chi(p,p),\quad \forall p\in\Omega. \qquad \textbf{(ESC)}$$

等号は $\chi=\chi_p$ の場合に限る.

次の定理 1 を考慮すると拡張吹田予想は, multiplicative Bergman 核が最小になるのは multiplier が Green multiplier のとき, またそのときに限ることを主張している.

定理 1 ([11]). $\Omega\notin O_G$ のとき, 任意の $x,p\in\Omega$ で

$$K^{\chi_p}(x,p)=K_E^{\chi_p}(x,p)=\frac{C_\beta(p)}{\pi}\partial f_p(x).$$

特に, $K^{\chi_p}(\cdot,p)$ は *exact* であり, $\pi K^{\chi_p}(p,p)=C_\beta(p)^2$ が成り立つ.

Jacobi の楕円テータ函数 $\vartheta_1(z)$ に関する次の補題が, 円環の場合の拡張吹田予想証明の核心である.

補題 1. *Nome* q が $0<q<1$ のとき, 任意の $x,y\in\mathbb{R}$ にたいして不等式

$$\frac{\vartheta_1'(x)\vartheta_1(y)+\vartheta_1(x)\vartheta_1'(y)}{\vartheta_1(x+y)}\ge\vartheta_1'(0)$$

が成り立つ. 等号は $x\equiv0$ または $y\equiv0\pmod{\pi}$ のときに限る.

定理 2 ([11]). 円環の場合に拡張吹田予想は成り立つ.

定理 2 の証明は, 円環の場合に multiplicative Bergman 核 $K^\chi(x,y)$ を楕円テータ函数 $\vartheta_1(z)$ を用いて具体的に表し (後述の命題 1 参照), 補題 1 を用いることで示される.

4 Multiplicative Green's function

空間 $\Gamma_\rho^\chi(\Omega)$ の重み函数 ρ が, 実調和函数 ϕ を用いて $\rho=e^{-\phi}$ の形に表されるとき, 「調和型の重み」ということにする. 調和型の重み ρ をもつ Hilbert 空間 $\Gamma_\rho(\Omega)$ と $\Gamma^\chi(\Omega)$ は

$$\Gamma_\rho(\Omega)\ni f\longleftrightarrow fe^{-\frac{1}{2}(\phi+i\phi^*)}\in\Gamma^\chi(\Omega)$$

の対応で, 等長同型になる. ただし, ϕ^* は ϕ の共役調和函数で, unitary multiplier χ は $-\phi/2$ の flux から生じる multiplier である. この対応を考えることで, 調和型の重みつきの Bergman space を考えることと unitary multiplier 付きの Bergman space を考えることは同値になるが, ここでは以下 multiplier つきで考えることにする.

Blocki [3] の結果 (A=2) の証明は, $\overline{\partial}$-Neumann kernel N に関する Berndtsson [2] の不等式を用いることがキーポイントである. $\overline{\partial}$-Neumann kernel N は重み $e^{-\phi}$ に付随する complex Laplacian $\square$ の基本解であるが, その mulitplicative な対応物が *multiplicative Green's function* $g^{\chi}(x,y)$ である. 簡単のため, 以下 Ω を境界つきコンパクト Riemann 面とする. このとき任意の $y \in \Omega$ と任意の $\chi \in M(\Omega)$ に対して, 絶対値一価な函数 $g^{\chi}(\cdot,y)$ が次の性質で特徴付けられる:

1. $g^{\chi}(\cdot,y)$ は点 y を除き Ω で調和かつ $\Omega\cup\partial\Omega$ で連続.

2. $g^{\chi}(\cdot,y)$ は multiplier $\chi \in M(\Omega)$ を持つ.

3. $g^{\chi}(x,y) = -\log|x-y| + O(1)$ near $x=y$.

4. $g^{\chi}(x,y) = 0$ for $x \in \partial\Omega$.

任意の multiplier χ に対する g^{χ} の存在及び性質は, Fuchs 群を用いて示すのが簡単である. Ω の単位円板 Δ による正則普遍被覆写像を π: $\Delta \to \Omega$ として, G を被覆 π の被覆変換群とする. G は Δ 上の収束型 Fuchs 群であり, $x, y \in \Omega$ のとき, $\pi(z) = x$, $\pi(0) = y$ とすると, Ω の Green 函数 $g(x,y)$ の P. J. Myrberg [5] による有名な公式

$$g(x,y) = \sum_{\gamma\in G} \log\frac{1}{|\gamma z|}$$

が成り立つ. このとき, 函数 g^{χ} を

$$g^{\chi}(x,y) = \sum_{\gamma\in G} \overline{\chi(\gamma)} \log\frac{1}{|\gamma z|}$$

で定義すると, g^{χ} は絶対値一価であり, multiplier χ をもつ Ω の multiplicative Green's function である. $|\chi| = 1$ であるから, 三角不等式より直ちに次の不等式を得る.

$$|g^{\chi}(x,y)| \le g(x,y), \quad \forall x,y \in \Omega,\ \forall \chi \in M(\Omega). \tag{1}$$

調和型重みに限定した場合ではあるが, 上記の不等式は本質的に Berndtsson の不等式であり, その multiplicative アナログと看做すことができる. ちなみに, 調和型重み $e^{-\phi}$ に関する $\overline{\partial}$-Neumann kernel N と ϕ に付随する multiplier χ をもつ multiplicative Green's function g^{χ} との間には次の関係がある:

$$N(x,y) = e^{\frac{1}{2}(\phi(x)+i\phi^*(x))} g^{\chi}(x,y) e^{\frac{1}{2}(\phi(y)-i\phi^*(y))}.$$

5 Blocki の結果

この節では multiplicative Green 函数を用いて Blocki の結果を少しだけ拡張した形で証明しよう. Ω の境界がきれいな場合に示せば, 一般の場合は Ω の exhaustion をとることによって得られるから, Ω は境界つき Riemann 面の内部と仮定する. h を調和函数とすると,

$$d(e^{-2g} h\overline{h}_z \overline{dz}) = (e^{-2g}|h_z|^2 - 2e^{-2g} g_z h \overline{h}_z) dz \wedge \overline{dz}.$$

したがって, $p \in \Omega$ に対して $g = g(\cdot,p)$, $g^{\chi} = g^{\chi}(\cdot,p)$ として, $I = \|f_p g^{\chi}_z\|^2$ とおくと $g^{\chi} = 0$ on $\partial\Omega$ と Stokes の定理より

$$I = \iint_{\Omega} e^{-2g}|g^{\chi}_z|^2\, dxdy = 2\iint_{\Omega} e^{-2g} g_z g^{\chi} \overline{g^{\chi}_z}\, dxdy.$$

Schwarz の不等式より

$$I^2 \leq 4I \iint_\Omega e^{-2g}|g_z g^\chi|^2\, dxdy \implies I \leq 4 \iint_\Omega e^{-2g}|g^\chi|^2|g_z|^2\, dxdy.$$

Berndtsson の不等式 (1) より

$$I \leq 4 \iint_\Omega e^{-2g} g^2 |g_z|^2 dxdy.$$

右辺の積分の値は次のように簡単に求まる.

補題 2 ([3]). 函数 $\gamma(t)$ が $[0,\infty)$ で連続かつ可積のとき, $\iint_\Omega \gamma \circ g \cdot |g_z|^2\, dxdy = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty \gamma(t)\, dt$.

証明. $\gamma = \gamma_+ - \gamma_-$ と分解すると, 一般性を失わず $\gamma \geq 0$ と仮定できる. $f(x) = \int_x^\infty \gamma(t)\, dt$ とおくと

$$d(f \circ g g_z\, dz) = -\gamma \circ g |g_z|^2\, \overline{dz} \wedge dz$$

で $f(\infty) = 0$ であるから, Stokes の定理と留数定理より

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega \setminus U_r} \gamma \circ g |g_z|^2\, dxdy &= \frac{1}{2i}\Big(\int_{\partial U_r} - \int_{\partial\Omega}\Big) f \circ g g_z\, dz \\ &= \frac{1}{2i}\int_{\partial U_r} f \circ g g_z\, dz - \frac{f(0)}{2i}\int_{\partial\Omega} g_z\, dz \\ &= \frac{1}{2i}\int_{\partial U_r} f \circ g g_z\, dz + \frac{\pi}{2} f(0).\end{aligned}$$

ただし, U_r は $g = g(\cdot, p)$ としたとき, 点 p の r-近傍である. $r \to +0$ とすると, 右辺の第一項は 0 に収束するので求める式を得る. □

$\int_0^\infty e^{-2t}t^2 dt = 1/4$ であるから, 補題 2 より $I \leq \pi/2$. $\eta = \chi_p \chi$ とおくと, multiplicative Bergman 核 K^η の再生性より

$$\frac{C_\beta(p)}{2} = \langle f_p g_z^\chi, K^\eta \rangle.$$

Schwarz の不等式より

$$\frac{C_\beta(p)^2}{4} \leq I \cdot K^\eta(p,p) \leq \frac{\pi}{2} K^\eta(p,p) \implies C_\beta(p)^2 \leq 2\pi K^\eta(p,p).$$

特に, $\chi = \overline{\chi_p}$ とおくと $\eta = 1$ にとれるから Blocki の結果が示された.

実は, Blocki [3] の証明とほぼ同様な計算でより精密な次の結果を得る.

定理 3 (Blocki). 任意の $\Omega \notin O_G$ と *unitary multiplier* χ に対して,

$$\frac{1}{K^{\chi_p \chi}(p,p)} + \frac{1}{K^{\chi_p \bar{\chi}}(p,p)} \leq \frac{2\pi}{C_\beta(p)^2}.$$

特に, $C_\beta(p)^2 < 2\pi K^\chi(p,p)$.

証明. Exhaustion によって領域を近似すれば対数容量や Bergman 核は各点収束するので, Ω は境界付きコンパクト Riemann 面の内部と仮定して一般性を失わない. h が調和函数のとき

$$\triangle |h|^2 = \partial\bar{\partial}|h|^2 = |h_z|^2 + |h_{\bar{z}}|^2$$

であるから, 函数 $|f_p|^2\Delta|g^\chi|^2$ に Green-Stokes の定理を用いると, g^χ の境界条件と特異性, Berndtsson の不等式 (1) に注意すると

$$\iint_\Omega (|f_p g_z^\chi|^2 + |f_p \overline{g_{\bar{z}}^{\chi}}|^2)dxdy = \iint_\Omega |f_p|^2\Delta|g^\chi|^2 dxdy = \iint_\Omega \Delta|f_p|^2\cdot|g^\chi|^2 dxdy$$
$$\leq 4\iint_\Omega e^{-2g}g^2|g_z|^2 dxdy.$$

上で示したように, 最後の積分の値は $\pi/2$ である. Multiplicative な正則函数 $f_p g_z^\chi$ と $f_p\overline{g_{\bar{z}}^{\chi}}$ の multiplier はそれぞれ $\chi_p\chi$ と $\chi_p\overline{\chi}$ で, 点 p における値はともに $C_\beta(p)/2$ であるから, Bergman の最小積分の性質 [1] より上式の左辺は

$$\frac{C_\beta(p)^2}{4}\left(\frac{1}{K^{\chi_p\chi}(p,p)} + \frac{1}{K^{\chi_p\overline{\chi}}(p,p)}\right)$$

以上である. したがって, 求める不等式が得られた. □

6 吹田予想と Poincaré 級数

Blocki の証明に出てきた函数 $f_p g_z^\chi$ は, 実は Pommerenke-Suita [7] の論文で用いられた Poincaré 級数と本質的に同じものであることを以下に述べる.

$\Omega\notin O_G$ の被覆変換群 G の unitary character χ ($|\chi(\gamma)|=1,\ \forall\gamma\in G$) に対して, 単位円板 Δ 上の有界函数 f に関する Poincaré 級数 $\Theta_\chi f$ を

$$\Theta_\chi f(z) = \sum_{\gamma\in G}\overline{\chi(\gamma)}f(\gamma z)\gamma' z, \quad z\in\Delta$$

で定義する. Myrberg の定理より Ω の Green 函数を $g_p = g(\cdot,p)$, $\pi(0)=p\in\Omega$ とすると, 次が成り立つ.

$$g_p\circ\pi(z) = -\sum_{\gamma\in G}\log|\gamma z|.$$

ここで Fuchs 群 G は convergence type であるから, Blaschke 積

$$B(z) = z\prod_{\gamma\neq id}\frac{|\gamma 0|}{\gamma 0}\gamma z, \quad z\in\Delta$$

は絶対収束して, Blaschke factor $f_p = e^{-g_p - ig_p^*}$ との間に $B = f_p\circ\pi$ の関係がある. したがって, 点 p における Ω の Poincaré 計量を $C_P(p)\,|dz|$ とすると, 次式が得られる.

$$\Theta(B(z)/z)(0) = B'(0) = C_\beta(p)/C_P(p).$$

ただし, $\Theta=\Theta_{id}$. Fuchs 群 G に関する自乗可積正則微分の成す Hilbert 空間の Bergman 核 $K_G(z,0)$ は $K(\pi(z),p)\pi'(z)\overline{\pi'(0)}$ で与えられる. よって, Bergman 核の再生性と Schwarz の不等式より,

$$B'(0)^2 = \langle\Theta(B(z)/z), K_G(z,0)\rangle^2 \leq \|\Theta(B(z)/z)\|_{\mathcal{F}}^2 K_G(0,0).$$

ただし, $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ は Fuchs 群 G の Δ における基本領域 $\mathcal{F}$ における自乗ノルムである. したがって, 吹田予想は次の不等式 (**ノルム予想**)

$$\|\Theta(B(z)/z)\|_{\mathcal{F}}^2 \leq \pi$$

を仮定すれば直ちに導かれる.

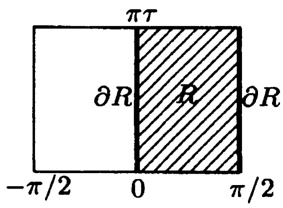
実はここで現れた Poincaré 級数 $\Theta(B/z)$ は, multiplicative Green 函数で簡単に表せる. なぜなら, 周期性 $B\circ\gamma=\chi_p(\gamma)B$, $|\chi_p(\gamma)|=1$, $\forall\gamma\in\Gamma$ より, 次式が成り立つ.

$$\Theta(B(z)/z)=\sum_{\gamma\in\Gamma}\frac{B\circ\gamma\cdot\gamma'}{\gamma}=B\sum_{\gamma\in\Gamma}\chi_p(\gamma)\frac{\gamma'}{\gamma}=-2Bg_z^{\overline{\chi_p}}.$$

同様にして, $\Theta_\chi(B(z)/z)$ は Ω に引き戻すと函数 $-2f_pg_z^{\overline{\chi\chi_p}}$ に対応している. これは Blocki の証明に用いられた函数そのものである.

7 2重連結領域の場合

Jacobi の楕円 theta 函数の定義はいろいろあるが, 数式処理ソフトの「Mathematica」は Whittaker-Watson の著書 [9] (以下 W-W と略記) の定義を採用している. 計算の都合上, 函数の仕様を Mathematica に合わせると便利であるので, ここでは W-W の定義を採用する. したがって, 楕円函数の基本周期は次のようになる.



$$(2\omega_1,2\omega_2)=(\pi,\pi\tau),\quad (\mathrm{Im}\,\tau>0).$$

円環 $D=\{z: r<|z|<1\}$ と等角同値な, 長方形

$$R_0=\{z: 0<\mathrm{Re}\,z<\frac{\pi}{2},\ 0\le\mathrm{Im}\,z\le\pi\,\mathrm{Im}\,\tau\}$$

の上下の辺を同一視して得られる2重連結領域を R とおく. D のダブル $\hat{D}$ は長方形 $\{z: |\mathrm{Re}\,z|\le\pi/2,\ 0\le \mathrm{Im}\,z\le\pi\,\mathrm{Im}\,\tau\}$ の相対する辺を同一視したトーラス $\hat{R}$ と等角同値で, その A-cycle は実軸にとることができる. このとき, $\hat{D}$ の周期 τ, 半径 r と nome $q=e^{\pi i\tau}$ との関係は次のようになる.

$$\tau=\frac{\pi i}{\log(1/r)}=\frac{\log q}{\pi i},\quad \log r\,\log q=\pi^2.$$

特に,

$$q\to0 \iff r\to1,\quad q\to1\iff r\to0.$$

このとき, R におけるよく知られた等角不変量が次の具体的表現をもつ.

命題 1 ([11]). 円環 R の $z=x+iy$ における *Poincaré* 計量 $C_P(z)$, 解析容量 $C_B(z)$, 函数 f_p, *Green* 函数 g_p, 対数容量 $C_\beta(z)$ 及び *multiplier* が $\gamma=e^{2\pi i\theta}$ の *multiplicative Bergman kernel* K^γ は次で与えられる.

$$C_P(z)=\frac{1}{\sin(2x)},\quad C_B(z)=\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_3}\frac{\vartheta_3(2x)}{\vartheta_1(2x)}=\sqrt{\wp(2x)-e_2}.$$

$$f_p(z)=\frac{\vartheta_1(z-p)}{\vartheta_1(z+\bar{p})},\quad g_p(z)=\log\left|\frac{\vartheta_1(z+\bar{p})}{\vartheta_1(z-p)}\right|,\quad C_\beta(z)=\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1(2x)}.$$

$$K^\gamma(z,\overline{w})=\begin{cases}\frac{\vartheta_1'}{\pi\vartheta_1(\pi\theta)}\,d_z\left[\frac{\vartheta_1(z+\overline{w}-\pi\theta)}{\vartheta_1(z+\overline{w})}\right], & (0<\theta<1)\\ -\frac{1}{\pi}d_z\left[\frac{\vartheta_1'(z+\overline{w})}{\vartheta_1(z+\overline{w})}\right]=\frac{\vartheta_1'^2(z+\overline{w})-\vartheta_1(z+\overline{w})\vartheta_1''(z+\overline{w})}{\pi\vartheta_1^2(z+\overline{w})}, & (\theta=0).\end{cases}$$

ノルム予想を円環の場合に検証しよう.

命題 2. 円環 R において *multiplier* $\chi = e^{2it}$ $(t \in \mathbb{R})$ をもつ *multiplicative Green* 函数 $g^{\chi}(z,p)$ は次で与えられる.

$$g^{\chi}(z,p) = \int_{-\bar{z}}^{z} g_z^{\chi}(z,p)\,dz. \tag{2}$$

ただし $(\vartheta_1' = \vartheta_1'(0))$,

$$g_z^{\chi}(z,p) = \begin{cases} \frac{\vartheta_1'}{2\vartheta_1(t)}\left\{\frac{\vartheta_1(z-p-t)}{\vartheta_1(z-p)} - \frac{\vartheta_1(z+\bar{p}-t)}{\vartheta_1(z+\bar{p})}\right\}, & (\chi \neq 1) \\ \frac{1}{2}\left\{\frac{\vartheta_1'(z+\bar{p})}{\vartheta_1(z+\bar{p})} - \frac{\vartheta_1'(z-p)}{\vartheta_1(z-p)}\right\}. & (\chi = 1) \end{cases}$$

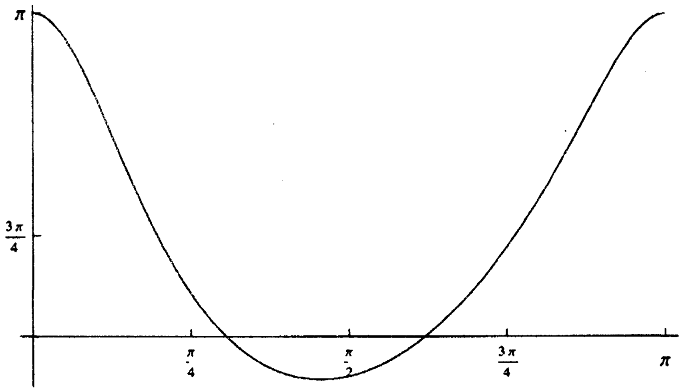
証明. 積分表示 (2) は, 右辺の積分の境界条件と p における特異性を調べると g^{χ} と一致することが分かる.
導函数 g_z^{χ} については, $\chi = 1$ のときは命題 1 より明らか. また, 右辺は g_z^{χ} と同じ特異性と multiplier を持つことに注意する. $\chi \neq 1$ のときはこの条件の下に一意性が成り立つので等式が示される. □

したがって, Blocki の証明に使われた函数を $f(z,p,t) = 2f_p(z)g_z^{\chi}(z)$ とおくと

$$f(z,p,t) = \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1(t)} \cdot \frac{\vartheta_1(z-p-t)\vartheta_1(z+\bar{p}) - \vartheta_1(z+\bar{p}-t)\vartheta_1(z-p)}{\vartheta_1^2(z+\bar{p})}$$

と表される. この函数に対してノルム予想が成り立つらしいことは, Mathematica による数値計算で確認することができる. 下図参照.

```
p=.1Pi/2;
Plot[NIntegrate[Abs[f[x+I y,p,t]]^2, {x,0,Pi/2}, {y,0,Pi Im[Tau[q]]}],
    {t,0,Pi}, Ticks->{{Pi/4,Pi/2,3Pi/4,Pi},{0,Pi/4,Pi/2,3Pi/4,Pi}}]
```



また, Blocki は [3, p.148] で M を定数として吹田予想の逆向きの不等式

$$K(p,p) \leq MC_\beta^2(p), \quad \exists M > 0$$

が成り立つか興味があると言っているが, これは不可能である. 例えば次の命題からわかるように, Bergman 核と Poincaré 計量の間には単純な大小関係は無いことに注意するとよい.

命題 3. 円環の *Bergman* 核 K と *Poincaré* 計量 C_P に関して次が成り立つ.

(i) 点 p が円環の *(Poincaré* 計量に関する*)* 測地線上にあるとき, $\pi K(p,p)/C_P^2(p)$ の *nome* q の函数としての値域は区間 $(1,\infty)$ である.

(ii) 点 p が円環の境界の近傍にあるとき, $\pi K(p,p) < C_P^2(p)$.

証明. (i) 命題 1 より, 円環の測地線上では

$$\pi K\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} = \frac{q^{1/4}+9q^{9/4}+25q^{25/4}+\cdots}{q^{1/4}+q^{9/4}+q^{25/4}+\cdots} > 1.$$

$C_P(\pi/4) = 1$ であるから, 上式より測地線上では $\pi K > C_P^2$ が成り立っている. また, この比は $q \to 0$ のとき 1 になり, $q \to 1$ のとき $r \to 0$ であるから下の命題 4 より無限大になる. 中間値の定理より値域は区間 $(1, \infty)$ である.

(ii) 次に, 境界での漸近挙動を調べよう. 命題 1 より $x \to 0$ のとき,

$$\pi K(x,x) = \frac{1}{4x^2} - \frac{\vartheta_1'''}{3\vartheta_1'} + O(x^2),$$
$$C_P(x)^2 = \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{3} + O(x^2).$$

ところが, [4, p. 483] より (Hancock と Whittaker-Watson の本の基本周期の取り方の違いで π^2 倍の差が出ることに注意する),

$$-\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} = 1 - 24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2} < 1.$$

したがって, 境界の近くでは $\pi K < C_P^2$. □

命題 4. $r \to 0$ のとき,

$$\vartheta_1' \sim 2r^{\frac14}\left(\frac{1}{\pi}\log\frac{1}{r}\right)^{\frac32}, \qquad \vartheta_2 \sim \left(\frac{1}{\pi}\log\frac{1}{r}\right)^{\frac12},$$
$$\vartheta_3 \sim \left(\frac{1}{\pi}\log\frac{1}{r}\right)^{\frac12}, \qquad \vartheta_4 \sim 2r^{\frac14}\left(\frac{1}{\pi}\log\frac{1}{r}\right)^{\frac12},$$
$$\vartheta_2'' \sim \vartheta_3'' \sim -\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{\pi}\log\frac{1}{r}\right)^{\frac32}, \qquad \vartheta_4'' \sim 2r^{\frac14}\left(\frac{1}{\pi}\log\frac{1}{r}\right)^{\frac52}.$$

証明. $r \to 0 \iff q \to 1$ である. Jacobi の虚数変換公式により, テータ定数の $q \to 1$ における挙動は $q \to 0$ の場合に変換されるので, 簡単な計算で示される. □

参 考 文 献

[1] S. Bergman, *The kernel function and conformal mapping*, Amer. Math. Soc. Providence, R.I. 1750, 1970.

[2] B. Berndtsson, *Weighted estimates for $\overline{\partial}$ in domains in* $\mathbb{C}$, Duke Math. J. **66** (1992), no. 2, 239–255.

[3] Z. Blocki, *Some estimates for the Bergman kernel and metric in terms of logarithmic capacity*, Nagoya Math. J. **185** (2007), 143–150.

[4] H. Hancock, *Lectures on the Theory of Elliptic Functions*, New York, Wiley, 1910 (rep. Dover, 2004).

[5] P. J. Myrberg, *Über die Existenz Der Greenschen Funktionen auf Einer Gegebenen Riemannschen Fläche*, Acta Math. **61** (1933), no. 1, 39–79.

[6] T. Ohsawa, *Addendum to: "On the Bergman kernel of hyper convex domains" [Nagoya Math. J. 129 (1993), 43-52]*, Nagoya Math. J. **137** (1995), 145–148.

[7] C. Pommerenke and N. Suita, *Capacities and Bergman kernels for Riemann surfaces and Fuchsian groups*, J. Math. Soc. Japan **36** (1984), no. 4, 637–642.

[8] N. Suita, *Capacities and kernels on Riemann surfaces*, Arch. Rational Mech. Anal. **46** (1972), 212–217.

[9] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A course of modern analysis*, Cambridge University Press, Bentley House, 200 Euston Road, London, 1902.

[10] H. Widom, *Extremal polynomials associated with a system of curves in the complex plane*, Advances in Math. **3** (1969), 127–232.

[11] A. Yamada, *Topics related to reproducing kernels, theta functions and the Suita conjecture* (Japanese), The theory of reproducing kernels and their applications (Japanese) (Kyoto, 1998), Su-rikaisekikenkyu-sho Ko-kyu-roku No. 1067 (1998), 39–47.

E-mail: yamada@u-gakugei.ac.jp