

# 代用電荷法による直線スリット領域への 数値等角写像

Numerical Conformal Mappings onto the Rectilinear Slit Domain  
by the Charge Simulation Method

愛媛大学大学院理工学研究科 天野 要<sup>1</sup> (Kaname Amano)

岡野 大<sup>1</sup> (Dai Okano)

李 涛<sup>1</sup> (Tao Li)

日立システムアンドサービス 鳳 弘勝<sup>2</sup> (Hirokatsu Ootori)

<sup>1</sup>Graduate School of Science and Engineering, Ehime University

<sup>2</sup>Hitachi Systems & Services, Ltd.

## 1 はじめに

等角写像は関数論の基本的な問題の 1 つであり、物理学や工学への応用も広い。しかし、その写像関数を陽に記述できる場合は限られている。多くの場合、与えられた条件を満たす等角写像を求める問題は数値計算によらなければならない。また、その近似写像関数を高い精度で効率よく構成することは決して簡単ではない。それ故、等角写像の数値計算すなわち数値等角写像の方法は計算数学の重要な研究課題の 1 つとして古くから研究されてきた。

数値等角写像の方法は与えられた問題領域から単位円板領域のような標準領域への写像を求める方法と、逆に標準領域から問題領域への写像を求める方法に大別される [35]。いずれの場合にも等角写像の問題を境界対応関数を未知量とする積分方程式に帰着させる方法が主流である。一般的に問題領域から標準領域への場合には積分方程式は線形であり、Symm [32, 33, 34] の積分方程式に基づく方法が著名である。これは調和関数の 1 重層対数ポテンシャル表現により、等角写像の問題を境界対応関数の導関数であるソース密度を未知量とした第 1 種 Fredholm 型の線形特異積分方程式の問題に帰着させたものである。Symm はソース密度を階段関数で離散化した。その後、スプライン関数 (区分多項式) 近似による精度の向上や特異関数の導入による角点の特異性処理などの改良がなされている [14, 16, 17]。一方、標準領域から問題領域への場合には積分方程式は非線形であり、Theodorsen の積分方程式に基づく方法が著名である。これは等角写像の問題を逆境界対応関数を未知量とした非線形積分方程式の問題に帰着させ、それを様々な反復法で解いたものである [13]。

数値等角写像に関しては欧米では長い研究の歴史があり、Driscoll and Trefethen [11], Gaier [12], Henrici [15], Kythe [21], Trefethen [35] 等の書籍も出版されている。Trefethen

は1980年代半ばの状況を急速な発展途上にあるとして、次のような理由を挙げている：(a) 優れた方法が次々に提案されている，(b) 科学技術計算の現場との交流が少ない，(c) 一般理論が少ない，(d) ソフトウェアがほとんどない．しかし，それまで国内の研究は少なかった．

このような背景の中で，天野[1, 2, 3, 5]は数値等角写像に代用電荷法[22, 29]を適用した．これは，(i) Symmと同様に等角写像の問題を1対の調和関数のポテンシャル問題に帰着させ，(ii)これを複素対数関数の1次結合で表現して未定係数を数値的に定めたものである．同じ頃，桂田・岡本[19]は代用電荷法に対してはじめて数学的な収束証明を与えている．その後，代用電荷法と(代用電荷法による)数値等角写像は相互に関係しながら発展してきた．

本稿では代用電荷法による数値等角写像に関する我々のこれまでの研究を概観し，非有界な多重連結領域から直線スリット領域への数値等角写像の方法を提案して，その有効性を数値実験的に検討する．

## 2 代用電荷法による数値等角写像の概観

### 2.1 代用電荷法の原理

代用電荷法は電気工学の分野でポテンシャル問題の高精度高速解法として知られていた[22]．ここでは2次元 Laplace 方程式の Dirichlet 問題

$$\Delta g(z) = 0 \quad \text{in } D, \quad g(z) = b(z) \quad \text{on } C \quad (1)$$

を考える．ここに， $C$ は $z = x + iy$ 平面上の Jordan 閉曲線， $D$ は $C$ で囲まれた単連結領域で， $b(z)$ は与えられた境界値関数である．本稿では $x, y$ 平面を $z$ 平面と同一視して $g(x, y)$ ,  $b(x, y)$ を $g(z)$ ,  $h(z)$ と略記している．

代用電荷法では解を対数ポテンシャルの1次結合

$$g(z) \simeq G(z) = \sum_{j=1}^N Q_j \log |z - \zeta_j| \quad (2)$$

で表現する．ここに $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N \notin \bar{D} (= D \cup C)$ は問題の領域の外部に配置された特異点(電荷点と呼ばれる)である．未定係数 $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$ (電荷と呼ばれる)は境界上に配置された点 $z_1, z_2, \dots, z_N \in C$ (拘束点と呼ばれる)で選点的に境界条件を満たすように連立1次方程式(拘束条件と呼ばれる)

$$\sum_{j=1}^N Q_j \log |z_i - \zeta_j| = b(z_i) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (3)$$

を解いて定められる．

この方法は原理とプログラミングが簡単で，一定の条件下では非常に高い精度を与える．また，曲線境界や非有界領域の問題に適用しやすい．さらに，特異積分が不要で，最大値の原理が数値スキームにそのまま適用できるために誤差の評価も容易である．

桂田・岡本 [19] は代用電荷法にはじめて数学的な収束証明を与え、誤差  $|G(z) - g(z)|$  が電荷数  $N$  に対して指数的に減衰することを示した。この性質が代用電荷法に高い計算精度を与えている。彼らは拘束点と電荷点の配置についても数学的に収束の保障された適用性の広い方法を提案している [20]。室田 [23] は代用電荷法の不変スキームを提案した。これは、式 (2) に定数項  $Q_0$  を付加して解を

$$g(z) \simeq G(z) = Q_0 + \sum_{j=1}^N Q_j \log |z - \zeta_j| \quad (4)$$

と表現し、連立 1 次方程式 (3) を制約条件

$$\sum_{j=1}^N Q_j = 0 \quad (5)$$

の下に解くというものである。このスキームは物理的に自然で、数学的にもよい性質を持っている。緒方ら [27] は不変スキームに現れる連立 1 次方程式の可解性をより一般的な枠組みで証明している。

## 2.2 数値等角写像への適用

まず、等角写像の写像関数  $f(z)$  を求める問題を未知の調和関数  $g(z)$  とその共役調和関数  $h(z)$  を求める問題に帰着させる。この  $g(z)$  を (2) で近似すれば、 $h(z)$  は定数分の違いを除いて自然に

$$h(z) \simeq H(z) = \sum_{j=1}^N Q_j \arg(z - \zeta_j) \quad (6)$$

と近似される。結果として、問題の調和関数対は解析関数の形で複素対数関数の 1 次結合

$$g(z) + ih(z) \simeq G(z) + iH(z) = Q_0 + \sum_{j=1}^N Q_j \log(z - \zeta_j) \quad (7)$$

で近似されることになる。この  $Q_0$  は未値の複素定数であり、 $Q_0$  と電荷  $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$  を  $f(z)$  が満たすべき条件を近似的に満たすように定める。

以下では、単連結領域の内部問題 (Reimann の写像定理) の場合を例に代用電荷法による数値等角写像の方法の原理を記す。なお、再生核の理論 (核関数の理論) の源は Riemann の写像関数を具体的に構成するために計算可能な表現を求めたことにあるとされている [30]。

**定理 1** 任意の単連結領域  $D$  は単位円板領域に等角写像することができる。その写像関数  $w = f(z)$  は、 $D$  内の任意の 1 点を  $z_0$  として、正規化条件  $f(z_0) = 0$ ,  $f'(z_0) > 0$  の下に一意に定まる。

ここでは、Jordan 閉曲線  $C$  で囲まれた領域を  $D$  とし、座標系の原点を  $z_0 = 0$  にとる (一般性を失わない)。この写像関数を

$$f(z) = z \exp(g(z) + ih(z)) \quad (8)$$

と表現すれば、調和関数対  $g(z)$ ,  $h(z)$  は (i) 正規化条件

$$f'(0) > 0, \quad \text{i.e.,} \quad h(0) = 0 \quad (9)$$

と (ii) 境界条件

$$|f(z)| = 1, \quad \text{i.e.,} \quad g(z) = -\log |z| \quad (z \in C) \quad (10)$$

を満たさなければならない。問題は (9) と (10) を満たす調和関数対  $g(z)$ ,  $h(z)$  を求めることに帰着する。

最も簡単には、この近似写像関数を

$$F(z) = z \exp(G(z) + iH(z)),$$

$$G(z) + iH(z) = \sum_{j=1}^N Q_j \left\{ \log |z - \zeta_j| + i \arg \left( 1 - \frac{z}{\zeta_j} \right) \right\}$$

と表現し、未定係数である電荷  $Q_j$  を連立 1 次方程式

$$\sum_{j=1}^N Q_j \log |z_i - \zeta_j| = -\log |z_i| \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

を解いて定めることができる [1].

図 1 上半は正方形領域

$$D: |x - 0.25| < 1, |y - 0.5| < 1$$

から単位円板領域への数値等角写像の結果を図示したものである。得られた拘束点  $z_i$  と像  $w_i = F(z_i)$  の対応関係を利用して  $w$  平面上で代用電荷法を適用すれば、全く同じアルゴリズムで図 1 下半のような逆関数  $z = F^{-1}(w)$  を構成することもできる [4]. 左下の図は (例えば) 平行な導線と矩形導波管の間の等電位面と電気力線を表現している。

### 2.3 多重連結領域の問題

多重連結領域の等角写像は単連結領域の場合と様相が異なる。まず、単位円板領域のような単一の理想的な標準領域は存在しない。このことは等角写像が領域の多重度を保存することから明らかである。さらに、多重度  $n$  を固定してもなお単一の標準領域は存在しない。相互に等角写像できるのは  $3n - 6$  ( $n \geq 3$ ) 個のモジュラスと呼ばれる保存量を同じくする領域間に限られる。

領域の幾何学的な形状に着目すれば、多重度とモジュラスの値に依存しない標準領域 (正準領域) の設定が可能になる。このような領域は様々な形状のスリットを伴うことが多い。Nehari [24] は典型的な正準領域として図 2 のような (a) 平行スリット領域, (b) 円弧スリット領域, (c) 放射スリット領域, (d) 円弧スリットを伴う円板領域, (e) 円弧スリットを伴う円環領域を挙げている。任意の多重連結領域はこれらの正準領域へ等角写像することができる。このような等角写像は、流体力学、電磁気学、電気工学等への応用上も

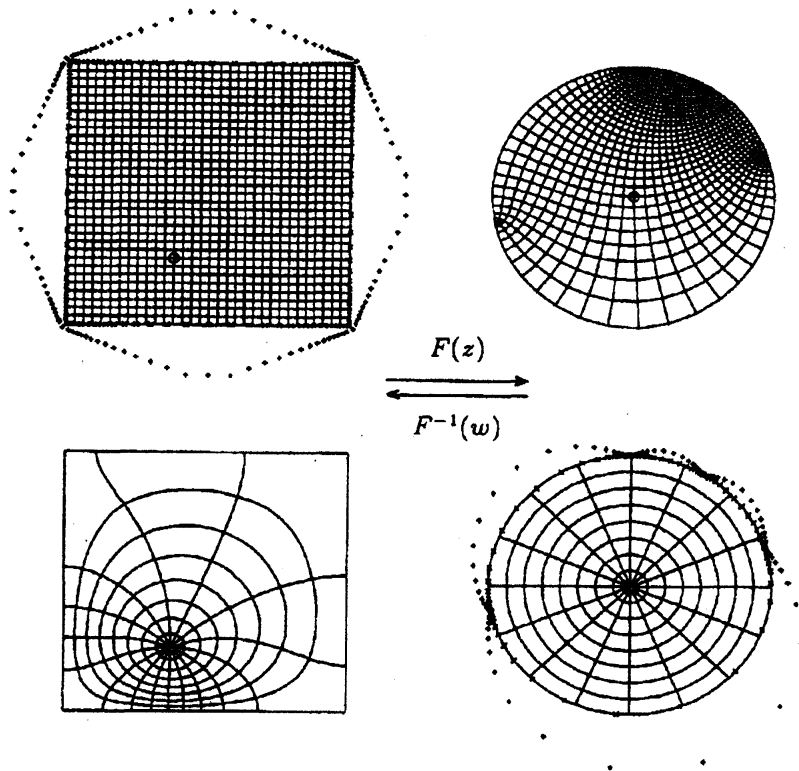


図 1: Riemann 写像の計算例 (左が  $z$  平面, 右が  $w$  平面)

広く知られた問題である。しかし、簡単で精度の高い数値計算法はあまり知られていなかった。

近年、著者らは幾つかの Jordan 閉曲線の外側の無限遠点を含む非有界な多重連結領域から (a) 平行スリット領域, (b) 円弧スリット領域, (c) 放射スリット領域への等角写像の近似写像関数を条件  $f(\infty) = \infty$  の下に構成した [6, 7]。この方法ではすべての場合を同じ係数行列を持つ連立 1 次方程式を解くことに帰着させることができるので、 $O(N^3)$  の計算量を要する係数行列の LU 分解は 1 度行えばよい。これらの等角写像によって障害物を伴う一様流, 渦流, 湧き出し (吸い込み) 流の解析が可能である。著者らは、また、領域内に任意に与えられた有限な 1 点を  $\nu$  として、同じ非有界な多重連結領域から平行スリット領域, 円弧スリット領域, 放射スリット領域への等角写像の近似写像関数を異なる条件  $f(\nu) = \infty$  ( $|\nu| < \infty$ ) の下に構成した [8, 9, 10]。これらの等角写像によって、重ね合わせを用いることなく、障害物を伴う 2 重湧き出し流, 渦対流, 湧き出し・吸い込み対流の直接的な解析が可能である。さらに、有界な多重連結領域から (d) 円弧スリットを伴う円板領域, (e) 円弧スリットを伴う円環領域への近似写像関数も構成している [28]。

代用電荷法による数値等角写像は、ポテンシャル問題の数値解法としての代用電荷法の特徴に加えて、連続スキームの構成が可能であるという特徴を持っている。連続スキームとは、数値計算に複素対数関数の主値を用いて問題の領域に  $2\pi i$  の不連続が生じないような定式化のことである。この連続スキームによって近似写像関数は問題の領域で連続かつ解析的な表現形式を持つことができる。関数論の成果が様々な問題にそのまま適用可能に

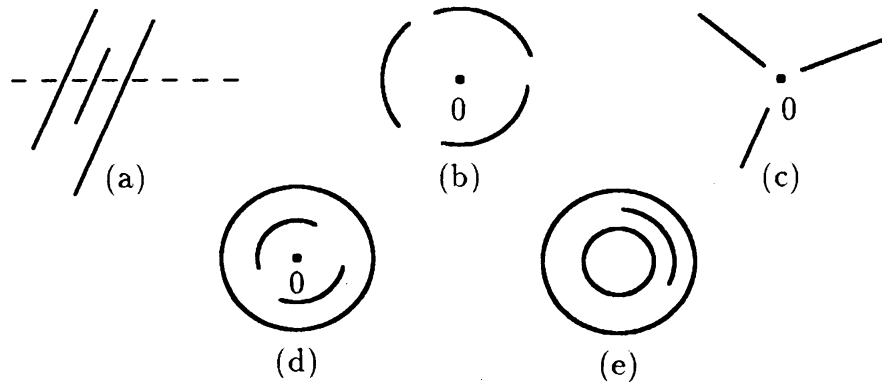


図 2: 多重連結領域の正準領域

なる (たとえば, [25]) という意味で, 簡潔で精度が高く解析的な表現形式を持つ近似写像関数が得られることの意義は大きい.

近年, 代用電荷法による数値等角写像の方法は周期的領域の問題にも適用される等, その適用性を広げている [26].

### 3 直線スリット領域への数値等角写像

#### 3.1 写像定理と問題

図 3 のように無限遠点を含み直線分状のスリット  $S_1, S_2, \dots, S_n$  を伴う複素平面の全体を直線スリット領域と呼ぶ. ここでは,  $z = x + iy$  平面上の Jordan 閉曲線  $C_1, C_2, \dots, C_n$  の外側の無限遠点を含む非有界な  $n$  重連結領域  $D$  から  $w = u + iv$  平面上の直線スリット領域への等角写像  $w = f(z)$  を考える. 柴 [31] は平行スリット領域への写像定理 (下記で  $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_n = \theta$  の場合) [24] を一般化している.

**定理 2** 上記の直線スリット領域への等角写像は, スリット  $S_1, S_2, \dots, S_n$  が実軸となす角  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  を任意に指定し,  $f(\infty) = \infty$  かつ無限遠点を中心とする Laurent 級数が

$$f(z) = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \quad (11)$$

の形になるという正規化条件の下に一意に定まる.

本節の課題はこの定理の等角写像の近似写像関数を構成し, 同時に Laurent 級数の係数を数値的に求めることである.

#### 3.2 代用電荷法の適用

問題の等角写像の写像関数を

$$f(z) = z + g(z) + ih(z) \quad (12)$$

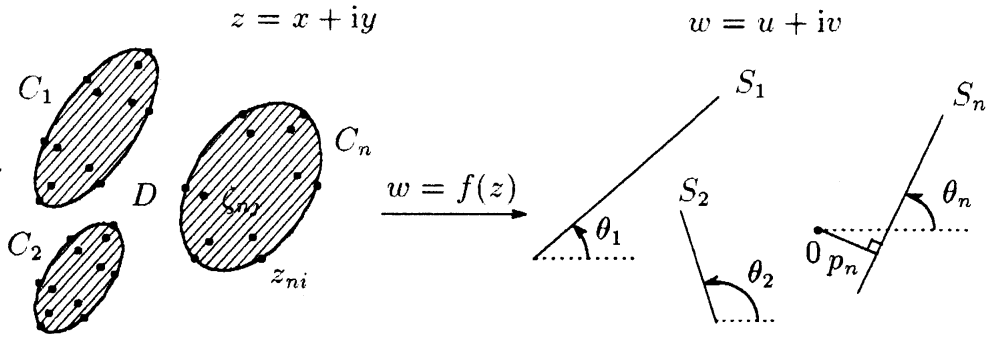


図 3: 直線スリット領域への等角写像 ( $\zeta_{nj}$  は電荷点,  $z_{ni}$  は拘束点)

と表現する.  $g(z)$  と  $h(z)$  は  $D$  で調和な関数とその共役対で, (i) 無限遠点における正規化条件

$$\lim_{z \rightarrow \infty} (f(z) - z) = 0, \quad \text{i.e., } g(\infty) + ih(\infty) = 0 \quad (13)$$

と (ii) 閉曲線  $C_m$  が実軸と角  $\theta_m$  をなす直線スリット  $S_m$  に移るという境界条件

$$\text{Im}(e^{-i\theta_m} f(z)) = p_m, \quad \text{i.e., } \text{Im}\{e^{-i\theta_m}(g(z) + ih(z))\} - p_m = -\text{Im}(e^{-i\theta_m} z) \\ (z \in C_m, m = 1, 2, \dots, n) \quad (14)$$

を満たさなければならない.  $p_m$  は  $w$  平面上の原点からスリット  $S_m$  を含む直線までの符号付きの距離を意味する未知の定数である. 問題は (13) と (14) を満たす調和関数対  $g(z)$ ,  $h(z)$  を定数  $p_m$  の値とともに求めることに帰着する.

代用電荷法を用いて, この調和関数対を複素対数関数の 1 次結合

$$g(z) + ih(z) \simeq G(z) + iH(z) = Q_0 + \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \log(z - \zeta_{lj}) \quad (15)$$

で近似する.  $Q_0$  は未知の複素定数,  $Q_{lj}$  は未知の実係数 (電荷) である. 特異点 (電荷点)  $\zeta_{lj}$  は領域  $D$  の外部すなわち閉曲線  $C_l$  の内側に配置する. この近似関数に次の 3 条件を課す.

(i) 1 価性条件: (15) が  $D$  で 1 価であるためには

$$\int_{C_l} dH(z) = \int_{C_l} d \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^{N_m} Q_{mj} \arg(z - \zeta_{mj}) = 2\pi \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} = 0$$

すなわち

$$\sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, n) \quad (16)$$

でなければならない.

(ii) 正規化条件: 1 価性条件の下, (13) と同様に

$$G(\infty) + iH(\infty) = Q_0 + \lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \log(z - \zeta_{lj}) = 0$$

を課して  $Q_0 = 0$ , したがって

$$G(z) + iH(z) = \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \log(z - \zeta_{lj}) \quad (17)$$

を得る.

(iii) 拘束条件: 各閉曲線  $C_m$  上に電荷と同数の拘束点  $z_{mi}$  を配置し, (17) に境界条件 (14) を選点的に課して拘束条件

$$\operatorname{Im}\{e^{-i\theta_m}(G(z_{mi}) + iH(z_{mi}))\} - P_m = -\operatorname{Im}(e^{-i\theta_m} z_{mi}),$$

i.e.,

$$\sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \{-\log|z_{mi} - \zeta_{lj}| \sin \theta_m + \arg(z_{mi} - \zeta_{lj}) \cos \theta_m\} - P_m = x_{mi} \sin \theta_m - y_{mi} \cos \theta_m$$

$$(z_{mi} \in C_m, i = 1, 2, \dots, N_m, m = 1, 2, \dots, n) \quad (18)$$

を得る.  $P_m$  は  $p_m$  の近似値である.

式 (16) と (18) は  $Q_{lj}$  と  $P_m$  に関する  $N_1 + N_2 + \dots + N_n + n$  元連立 1 次方程式を構成する. これを解いて (17) で  $G(z) + iH(z)$  を定め,  $g(z) + ih(z)$  の近似値として (12) に代入すれば近似写像関数  $F(z) \simeq f(z)$  を得ることができる.

数値計算には複素対数関数の主値を用いる. すると, (17) の  $\log(z - \zeta_{lj})$  は半直線  $\{\zeta_{lj} - t \mid t > 0\}$  上に  $2\pi i$  の不連続を伴う. 我々は領域  $D$  でこのような不連続の問題を生じない近似写像関数すなわち連続スキームを構成したい. ここでは閉曲線  $C_1, C_2, \dots, C_n$  はそれぞれの内側の 1 点  $\zeta_{10}, \zeta_{20}, \dots, \zeta_{n0}$  に対して星形であると仮定する. 前述の 1 価性条件 (16) の下, (17) を

$$G(z) + iH(z) = \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \{\log(z - \zeta_{lj}) - \log(z - \zeta_{l0})\}$$

$$= \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \log \frac{z - \zeta_{lj}}{z - \zeta_{l0}} \quad (19)$$

と変形する. 式 (19) の  $\log((z - \zeta_{lj})/(z - \zeta_{l0}))$  の不連続は線分  $[\zeta_{lj}, \zeta_{l0}]$  上に現れる. こうして領域  $D$  で連続な近似写像関数を構成することができる.

**連続スキーム** 近似写像関数を

$$F(z) = z + G(z) + iH(z), \quad (20)$$

$$G(z) + iH(z) = \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \log \frac{z - \zeta_{lj}}{z - \zeta_{l0}} \quad (21)$$



と表現すれば、未定の実係数  $Q_{lj}$  は  $P_m$  とともに  $N_1 + N_2 + \dots + N_n + n$  元連立1次方程式

$$\sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, n), \quad (22)$$

$$\sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \left\{ -\log \left| \frac{z_{mi} - \zeta_{lj}}{z_{mi} - \zeta_{l0}} \right| \sin \theta_m + \arg \frac{z_{mi} - \zeta_{lj}}{z_{mi} - \zeta_{l0}} \cos \theta_m \right\} - P_m = x_{mi} \sin \theta_m - y_{mi} \cos \theta_m$$

$$(z_{mi} \in C_m, i = 1, 2, \dots, N_m, m = 1, 2, \dots, n) \quad (23)$$

を解いて得られる。

**Laurent 係数** Laurent 級数の係数は

$$a_k \simeq A_k = -\frac{1}{k} \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \zeta_{lj}^k \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (24)$$

で求まる。

上記の近似写像関数を用いて、

$$f(z) - z = \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_k}{z^k} + \dots \simeq \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \log \frac{z - \zeta_{lj}}{z - \zeta_{l0}} = F(z) - z$$

を満たす  $a_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) を求める。式 (22) の下、両辺を微分すれば

$$-\frac{a_1}{z^2} + \dots + (-k) \frac{a_k}{z^{k+1}} \simeq \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} \frac{Q_{lj}}{z - \zeta_{lj}}$$

$$= \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} \frac{Q_{lj}}{z} \left( 1 + \frac{\zeta_{lj}}{z} + \dots + \frac{\zeta_{lj}^k}{z^k} + \dots \right)$$

となるので、項別に比較すればよい。

### 3.3 数値例

#### 例1 3個の円

$$C_l : |z - \zeta_{l0}| = 1, \quad \zeta_{l0} = 3(2 - l) \quad (l = 1, 2, 3)$$

の外側の3重連結領域を  $D$  とし、拘束点と電荷点を

$$z_{lj} = \zeta_{l0} + \rho_l \exp \frac{2(j-1)\pi i}{N}, \quad \zeta_{lj} = \zeta_{l0} + q\rho_l \exp \frac{2(j-1)\pi i}{N}$$

$$(j = 1, 2, \dots, N, l = 1, 2, 3) \quad (25)$$

と配置する。 $0 < q < 1$  は電荷配置のパラメータである。誤差の指標としては

$$\epsilon_{F_l} = \max_{1 \leq i \leq N_l} |\operatorname{Im}(e^{-i\theta_l} F(z_{li+1/2})) - P_l|, \quad \epsilon_{P_l} = P_l - P_l^{(2N)} \quad (l = 1, 2, 3) \quad (26)$$

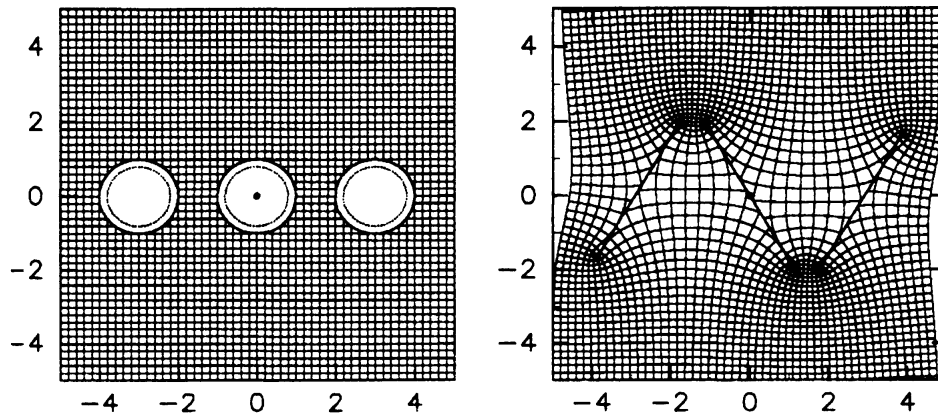


図 4: 直線スリット領域への数値等角写像 (例 1,  $\theta_1 = \pi/3, \theta_2 = -\pi/3, \theta_3 = \pi/3$ )

表 1: 数値等角写像の計算誤差 (例 1,  $q = 0.8$ )

$N$		$\epsilon_{F_l}$	$\epsilon_{P_l}$	$P_l$	$\kappa$
16	$C_1$	9.8E-03	1.4E-03	-2.526	
	$C_2$	9.6E-03	4.7E-15	1E-15	5.9E+01
	$C_3$	9.8E-03	1.4E-03	2.526	
32	$C_1$	1.4E-04	1.9E-05	-2.52763	
	$C_2$	1.3E-04	6.8E-15	-3E-15	6.7E+02
	$C_3$	1.4E-04	1.9E-05	2.52763	
64	$C_1$	5.4E-08	7.3E-09	-2.527649209	
	$C_2$	5.3E-08	9.2E-15	3E-15	5.0E+04
	$C_3$	5.4E-08	7.3E-09	2.527649209	
128	$C_1$	2.8E-14			
	$C_2$	6.2E-13			1.3E+08
	$C_3$	4.5E-13			

表 2: Laurent 係数の計算結果 ( $N = 64, q = 0.8$ )

$k$	( $\text{Re } A_k, \text{Im } A_k$ )	( $ A_k , \arg A_k$ )
1	(-1.25190987E+00, 8.5519740E-01)	(1.52E+00, 2.54)
2	(1E-15, 3E-15)	(9.68E-14, )
3	(-8.2803295E+00, 1.68461022E+01)	(1.88E+01, 2.03)
4	(5E-13, -3E-15)	(4.92E-13, )
5	(-7.64524793E+01, 1.49351195E+02)	(1.68E+02, 2.04)
6	(3.6E-12, -6E-13)	(3.60E-12, )
7	(-7.00280011E+02, 1.32678120E+03)	(1.50E+03, 2.06)
8	(3E-11, 2E-11)	(3.64E-11, )
9	(-6.38544491E+03, 1.18175652E+04)	(1.34E+04, 2.07)
10	(3E-10, 3E-10)	(4.65E-10, )
19	(-3.87961361E+08, 6.7896499E+08)	(7.82E+08, 2.09)
20	(6E-04, 1E-04)	(6.20E-04, )

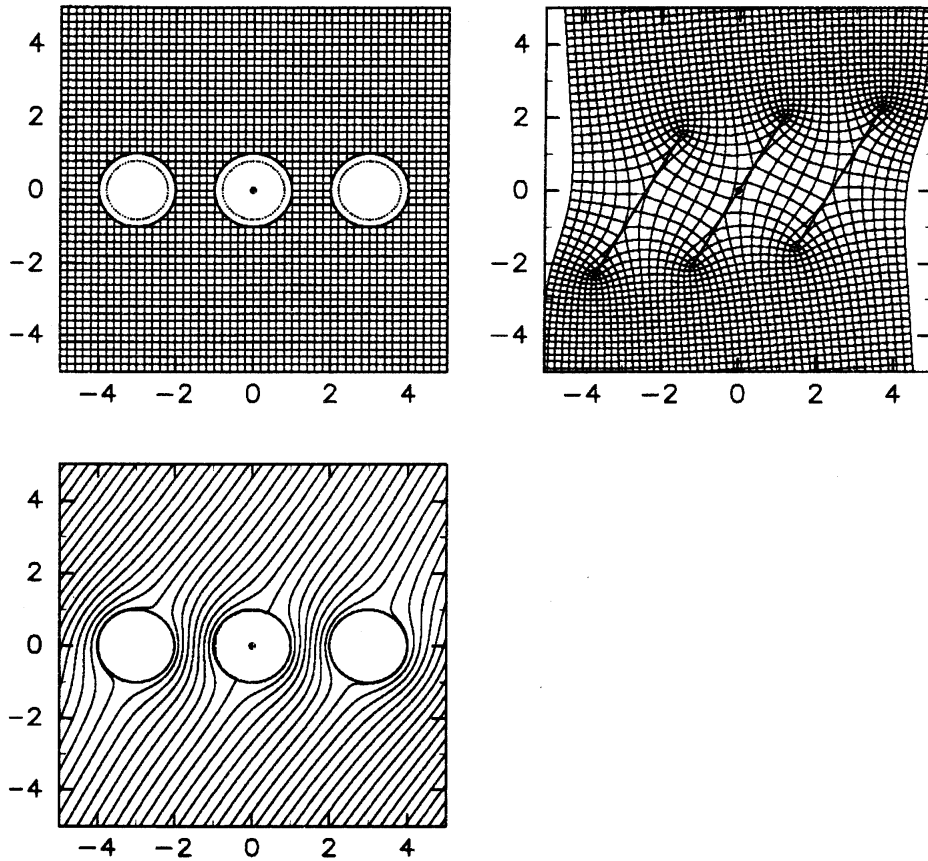


図5: 平行スリット領域への数値等角写像 (例1,  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \pi/3$ ) と障害物を過ぎる一様流

を用いる.  $z_{li+1/2} \in C_l$  は  $z_{li}$  と  $z_{li+1}$  の中間点であり,  $P_l^{(2N)}$  は電荷数を  $N$  から  $2N$  に倍増した計算値である.

図4は  $\theta_1 = \pi/3$ ,  $\theta_2 = -\pi/3$ ,  $\theta_3 = \pi/3$  の場合の数値等角写像の結果である. 問題は原点対象で,  $p_1 + p_3 = 0$ ,  $p_2 = 0$ ,  $a_{2k} = 0$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) である. 表1に数値等角写像の計算誤差を示す.  $\kappa$  は連立1次方程式(22), (23)の  $L_1$  条件数で,  $P_l$  は(26)の第2式右辺に非零の数字が現れる桁までを記している. 表2は Laurent 係数の計算結果である.

この方法は  $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_n = \theta$  とすれば平行スリット領域の問題にも適用可能である. 図5上半はその結果である. 左下の図は  $\text{Im}(e^{-i\theta} F(z))$  の等高線で, 3個の円柱状の障害物を過ぎる一様流の流線を表現している [18].

例2 円  $C_1$ , Cassini の楕形  $C_2$ , 楕円  $C_3$ ,

$$C_1 : |z - \zeta_{10}| = 1,$$

$$C_2 : |(z - \zeta_{20})^2 - 1| = \alpha^2 \quad (\alpha = 1.06),$$

$$C_3 : \frac{(x - \text{Re } \zeta_{30})^2}{a^2} + (y - \text{Im } \zeta_{30})^2 = 1 \quad (a = 2),$$

$$\zeta_{l0} = 3 \exp \frac{2(l-1)\pi i}{3} \quad (l = 1, 2, 3)$$

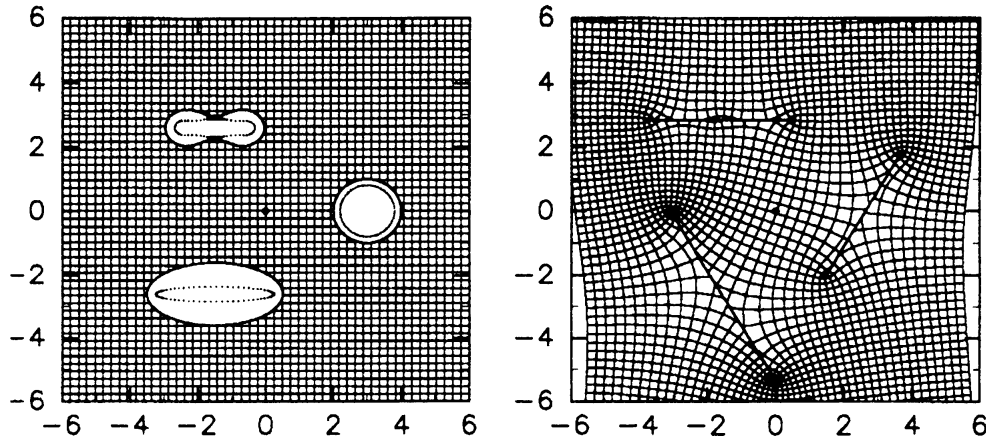


図 6: 直線スリット領域への数値等角写像 (例 2,  $\theta_1 = \pi/3$ ,  $\theta_2 = 0$ ,  $\theta_3 = -\pi/3$ )

の外側の 3 重連結領域を  $D$  とする. 円  $C_1$  に対しては, 拘束点と電荷点を (25) と同様に配置する. Cassini の楕形  $C_2$  に対しては, まず拘束点を

$$z_{1j} = \zeta_{20} + R_j e^{i\omega_j}, \quad R_j = \sqrt{\cos 2\omega_j + \sqrt{\cos^2 2\omega_j + \alpha^4 - 1}},$$

$$\omega_j = \frac{2(j-1)\pi i}{N} \quad (j = 1, 2, \dots, N)$$

と配置し, 次に電荷点を

$$\zeta_{2j} = z_{2j} + iq^*(z_{2j+1} - z_{2j-1}) \quad (j = 1, 2, \dots, N),$$

$$z_{20} = z_{2N}, \quad z_{2N+1} = z_{21} \quad (27)$$

と配置する.  $q^* > 0$  はもう 1 つの電荷配置のパラメータである. 楕円  $C_3$  に対しては, Joukowski 変換

$$J(t) = \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{2} \left( t + \frac{1}{t} \right)$$

を用いて, 拘束点と電荷点を

$$z_{3j} = \zeta_{30} + J(\rho e^{i\omega_j}), \quad \zeta_{3j} = \zeta_{30} + J(re^{i\omega_j}),$$

$$\rho = \sqrt{\frac{a+1}{a-1}}, \quad r = 1 + q(\rho - 1), \quad \omega_j = \frac{2(j-1)\pi i}{N} \quad (j = 1, 2, \dots, N)$$

と配置する.

図 6 は  $\theta_1 = \pi/3$ ,  $\theta_2 = 0$ ,  $\theta_3 = -\pi/3$  の場合の数値等角写像の結果である. 表 3 に計算誤差を示す. この場合の Cassini の楕形のように, 対称性の高い境界曲線  $C_m$  に対して,  $\theta_m = 0$  で, 偶数個の電荷点と拘束点を用いて対称性の高い配置を行うと連立 1 次方程式 (22), (23) に数値的悪条件を生じることがある. 表 3 のように奇数個の電荷を用いればそのような問題は生じない.

電荷配置の方法 (27) は円  $C_1$ , 楕円  $C_3$  にも適用可能である. しかし, 楕円に対しては Joukowski 変換の方が多少良い精度を与える.

表 3: 数値等角写像の計算誤差 (例 2,  $\theta_1 = \pi/3$ ,  $\theta_2 = 0$ ,  $\theta_3 = -\pi/3$ )

$N$		$\epsilon_{F_l}$	$\epsilon_{P_l}$	$P_l$	$\kappa$	
65	$C_1$	$q = 0.8$	4.0E-08	8.9E-10	-2.2789207568	
	$C_2$	$q^* = 1.0$	6.9E-07	6.3E-09	2.834662827	6.9E+06
	$C_3$	$q = 0.5$	4.4-E08	5.6E-09	-2.667990184	

## 4 おわりに

代用電荷法による数値等角写像に関する我々のこれまでの研究を概観した。また、非有界な多重連結領域から直線スリット領域への数値等角写像の方法を提案し、その有効性を数値実験的に検証した。当然のことながら、この方法は平行スリット領域への数値等角写像にも適用可能である。得られた近似写像関数を用いて等角写像の存在と一意性の定理に現れる Laurent 級数の全係数の数値計算も可能である。

代用電荷法による数値等角写像の方法は、簡単で精度が高いというポテンシャル問題の数値解法としての代用電荷法の性質を継承し、さらに連続スキームの構成が可能であるという特徴を持っている。関数論の成果が様々な問題にそのまま適用可能になるという意味で、解析的な表現形式を持つ近似写像関数が得られることの意義は大きい。

なお、本稿に記した直線スリット領域への近似写像関数のスキームは、対称性の高い境界曲線  $C_m$  に対して、 $\theta_m = 0$  で、偶数個の電荷点と拘束点を用いて対称性の高い配置を行うと解くべき連立 1 次方程式に数値的悪条件を生じることがある。奇数個の電荷を用いればそのような問題は生じない。この問題はまたスキームの変更でも解消可能であるが、ここでは記述を簡潔にするために割愛した。悪条件問題の数学的な解析は今後の課題としたい。

**謝辞** 代用電荷法と数値等角写像の研究に関して日頃から貴重な助言をいただく東京大学の杉原正顕教授と電気通信大学の緒方秀教準教授に感謝する。なお、この研究は日本学術振興会の科学研究費補助金（課題番号 19340024）の補助を受けている。

## 参考文献

- [1] 天野 要: 代用電荷法に基づく等角写像の数値計算法, 情報処理学会論文誌, 28 (1987), pp. 697-704.
- [2] 天野 要: 代用電荷法に基づく外部等角写像の数値計算法, 情報処理学会論文誌, 29 (1988), pp. 62-72.
- [3] 天野 要: 代用電荷法に基づく 2 重連結領域等角写像の数値計算法, 情報処理学会論文誌, 29 (1988), pp. 914-924.
- [4] 天野 要: 代用電荷法に基づく双方向的な数値等角写像の方法, 情報処理, 31 (1990), pp. 623-632.

- [5] K. Amano, A charge simulation method for the numerical conformal mapping of interior, exterior and doubly-connected domains. *J. Comput. Appl. Math.*, 53 (1994), pp. 353–370.
- [6] K. Amano, A charge simulation method for numerical conformal mapping onto circular and radial slit domains, *SIAM J. Sci. Comput.*, 19 (1998), pp. 1169–1187.
- [7] 天野 要, 岡野 大, 緒方秀教, 下平博巳, 杉原正顯, 代用電荷法による非有界な多重連結領域の統一的な数値等角写像の方法, *情報処理学会論文誌*, 42 (2001), pp. 385–395.
- [8] 天野 要, 玉井政行, 岡野 大, 緒方秀教, 杉原正顯, 代用電荷法による数値等角写像とポテンシャル流問題への応用, *情報処理学会論文誌*, 45 (2004), pp. 1322–1325.
- [9] K. Amano, D. Okano, H. Ogata and M. Sugihara, A numerical conformal mapping onto the radial slit domain by the charge simulation method, *Information*, 8 (2005), pp. 203–212.
- [10] K. Amano, D. Okano, H. Ogata and M. Sugihara, Numerical conformal mapping by the charge simulation method, *Proc. ICoMS 2007 (2nd International Conference on Mathematical Sciences)*, UTM, Malaysia (to appear).
- [11] T.A. Driscoll and L.N. Trefethen, *Schwarz-Christoffel Mapping*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [12] D. Gaier, *Konstruktive Methoden der konformen Abbildung*, Springer, Berlin, 1964.
- [13] M.H. Gutknecht, Numerical conformal mapping methods based on function conjugation, *J. Comput. Appl. Math.*, 14 (1986), pp. 31–77.
- [14] J.K. Hayes, D.K. Kahaner and R.G. Kellner, An improved method for numerical conformal mapping, *Math. Comput.*, 26 (1972), pp. 327–334.
- [15] P. Henrici, *Applied and Computational Complex Analysis, Vol. 3*, John Wiley & Sons, New York, 1986.
- [16] D.M. Hough and N. Papamichael, The use of splines and singular functions in an integral equation method for conformal mapping, *Numer. Math.*, 37 (1981), pp. 133–147.
- [17] D.M. Hough and N. Papamichael, An integral equation method for the numerical conformal mapping of interior, exterior and doubly-connected domains, *Numer. Math.*, 41 (1983), pp. 287–307.
- [18] 今井 功, *複素解析と流体力学*, 日本評論社, 東京, 1989.
- [19] M. Katsurada and H. Okamoto, A mathematical study of the charge simulation method I, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 35 (1988), pp. 507–518.

- [20] M. Katsurada and H. Okamoto, The collocation points of the fundamental solution method for the potential problem, *Computers Math. Appl.*, 31 (1996), pp. 123–137.
- [21] P.K. Kythe, *Computational Conformal Mapping*, Birkhäuser, Boston, 1998.
- [22] 村島定行, 代用電荷法とその応用, 森北出版, 東京, 1983.
- [23] 室田一雄, 代用電荷法におけるスキームの「不変性」について, *情報処理学会論文誌*, 34 (1993), pp. 533–535.
- [24] Z. Nehari, *Conformal Mapping*, McGraw-Hill, New York, 1952.
- [25] H. Ogata, D. Okano and K. Amano, Computations of the forces on obstacles in two-dimensional potential flows by the charge simulation method, *Information*, 5 (2002), pp. 307–318.
- [26] H. Ogata, D. Okano and K. Amano, Numerical conformal mapping of periodic structure domains, *Japan J. Industr. Appl. Math.*, 19 (2002), pp. 257–275.
- [27] H. Ogata, D. Okano, M. Sugihara and K. Amano, Unique solvability of the linear system appearing in the invariant scheme of the charge simulation method, *Japan J. Industr. Appl. Math.*, 20 (2003), pp. 17–35.
- [28] D. Okano, H. Ogata, K. Amano and M. Sugihara, Numerical conformal mappings of bounded multiply-connected domains by the charge simulation method, *J. Comput. Appl. Math.*, 159 (2003), pp. 109–117 .
- [29] 岡本 久, 桂田祐史, ポテンシャル問題の高速解法, *応用数理*, 2 (1992), pp. 212–230.
- [30] 斎藤三郎, 再生核の理論入門, 牧野書店, 東京, 2002.
- [31] M. Shiba, On the Riemann-Roch theorem on open Riemann surfaces, *J. Math. Kyoto Univ.*, 11 (1971), pp. 495–525.
- [32] G.T. Symm, An integral equation method in conformal mapping, *Numer. Math.*, 9 (1966), pp. 250–258.
- [33] G.T. Symm, Numerical mapping of exterior domains, *Numer. Math.*, 10 (1967), pp. 437–445.
- [34] G.T. Symm, Conformal mapping of doubly-connected domains, *Numer. Math.*, 13 (1969), pp. 448–457.
- [35] L.N. Trefethen (ed.), *Numerical Conformal Mapping*, North-Holland, Amsterdam, 1986; *J. Comput. Appl. Math.*, 14, No. 1-2 (1986).