数理解析研究所講究録
第 1621 巻 2009 年 9-28

The approximation to the non-central χ^2- and t-distributions

筑波大・数理物質　黒田 晋吾 (Shingo Kuroda)
(Graduate School of Pure and Applied Sciences, University of Tsukuba)
筑波大・数理物質　赤平 昌文 (Masafumi Akahira)
(Graduate School of Pure and Applied Sciences, University of Tsukuba)

1. はじめに

正規母集団からの無作為標本に基づく統計量は推測において重要であるが, その応用も興味深い. 特にその統計量が非心分布に従うことも多いが, 非心分布の形が複雑なため, そのパーセント点を解析的に求めることは必ずしも容易ではない. そこで, 非心分布のパーセント点の値を求めるための近似式が従来から提案されてきた ([JKB95]). しかし非心度が大きいときに非心分布の近似の精度はあまり良いとは言えないため, その改良が行われてきた ([A95], [AST95]), [To96]). また, 特に非心カイ 2 乗 (χ^2) 分布の場合に, 自由度が偶数のときにパーセント点の近似式が得られている ([KA05], [ATK05]).

本稿では, 自由度が奇数の場合に, 非心 χ^2 分布のパーセント点の近似式を求め, その良さも数値的に評価する. また, χ^2 検定の検出力と非心度の観点からも非心 χ^2 分布の近似の良さを数値的に評価する. さらに Akahira([A95]) の近似式を用い, t 検定の検出力と非心度の観点から非心 t 分布の近似の良さも数値的に評価する.

2. 非心 χ^2 分布と中心 χ^2 分布との関係

まず, $X_1, X_2, \cdots, X_\nu$ をたがいに独立に, いずれも標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数とし, $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_\nu$ を定数とする. このとき $\sum_{j=1}^{\nu}(X_j+\delta_j)^2$ の分布は $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_\nu$ にそれらの 2 乗の和を通してのみ依存する. この分布を自由度 ν, 非心度 $\lambda := \sum_{j=1}^{\nu}\delta_j^2$ をもつ非心 χ^2 分布といい, これを $\chi^2(\nu;\lambda)$ と表わし, これに従う確率変数を $\chi^2_{\nu,\lambda}$ と表わす. いま

$$\chi^2_{\nu,\lambda} = \sum_{j=1}^{\nu}(U_j+\delta_j)^2$$

とすれば, その積率母関数 (m.g.f.)

$$\begin{aligned} g_{\chi^2_{\nu,\lambda}}(\theta) &= E\left[\exp\left\{\sum_{j=1}^{\nu}\theta(U_j+\delta_j)^2\right\}\right] \\ &= (1-2\theta)^{-\nu/2}e^{-\lambda/2}\exp\left\{\frac{1}{2}\lambda(1-2\theta)^{-1}\right\} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}e^{-\lambda/2}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^j(1-2\theta)^{-(\nu+2j)/2} \end{aligned} \tag{2.1}$$

となり, (2.1) における $(1-2\theta)^{-(\nu+2j)/2}$ は自由度 $\nu+2j$ をもつ (中心)χ^2 分布に従う確率変数 $\chi^2_{\nu+2j}$ の m.g.f. になっていることに注意 ([JKB95]). ここで, Y_λ をポアソン分布 $Po(\lambda)$ に従う確率変数とすれば, (2.1) から

$$P\{\chi^2_{\nu,\lambda} \le t\} = P\{\chi^2_{\nu+2Y_{\lambda/2}} \le t\}, \quad t>0 \tag{2.2}$$

となる. 実際

$$\begin{aligned}
&P\{\chi^2_{\nu+2Y_{\lambda/2}} \le t\} = E\left[P\{\chi^2_{\nu+2Y_{\lambda/2}} \le t | Y_{\lambda/2}\}\right] \\
=&E\left[\int_0^t \frac{1}{2\Gamma\left((\nu/2)+Y_{\lambda/2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{(\nu/2)+Y_{\lambda/2}-1} e^{-x/2}dx\right] \\
=&\int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda/2}(\lambda/2)^k}{k!}\frac{1}{2\Gamma\left((\nu/2)+k\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{(\nu/2)+k-1} e^{-x/2}dx \\
=&P\{\chi^2_{\nu,\lambda} \le t\}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

になって, (2.2) を得る.

3. 非心 χ^2 分布の近似

まず, 自由度 ν, 非心度 λ をもつ非心 χ^2 分布 $\chi^2(\nu;\lambda)$ に従う確率変数 $\chi^2_{\nu,\lambda}$ の確率密度関数 (p.d.f.) は (2.3) より

$$f_{\chi^2_{\nu,\lambda}}(x;\nu,\lambda) = \begin{cases} e^{-\lambda/2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^k \frac{1}{2\Gamma((\nu/2)+k)}\left(\frac{x}{2}\right)^{(\nu/2)+k-1} e^{-x/2} & (x>0), \\ 0 & (x\le 0), \end{cases}$$
$$(\nu=1,2,\cdots;0<\delta<\infty)$$

となる.

(i) 自由度 ν が偶数の場合 ([KA05]): 確率変数 $\chi^2_{\nu,\lambda}$ の累積分布関数 (c.d.f.) は

$$F_{\chi^2_{\nu,\lambda}}(x) = P\left\{\chi^2_{\nu,\lambda} \le x\right\} = P\left\{Y_{x/2} - Y_{\lambda/2} \ge \nu/2\right\} \quad (x>0) \tag{3.1}$$

となる ([JKB95], [Ta75]). ただし, $Y_{x/2}, Y_{\lambda/2}$ はそれぞれポアソン分布 $Po(x/2)$, $Po(\lambda/2)$ に従う独立な確率変数とする. このとき $T := Y_{x/2} - Y_{\lambda/2}$ のキュムラント母関数 (c.g.f.) は

$$K_T(\theta) = \frac{x}{2}\left(e^{\theta}-1\right) + \frac{\lambda}{2}\left(e^{-\theta}-1\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left\{x+(-1)^j\lambda\right\}\frac{\theta^j}{j!}$$

となる. これより T の j 次キュムラントは

$$\kappa_j(T) = \frac{1}{2}\left\{x+(-1)^j\lambda\right\} \quad (j=1,2,\cdots) \tag{3.2}$$

になるから

$$E(T) = \frac{1}{2}(x-\lambda), \qquad V(T) = \frac{1}{2}(x+\lambda)$$

になり,

$$Z := \frac{T - \frac{1}{2}(x - \lambda)}{\sqrt{\frac{1}{2}(x + \lambda)}}$$

とすれば, (3.1) より連続補正によって

$$\begin{aligned} P\left\{\chi^2_{\nu,\lambda} > x\right\} &= 1 - P\{T \geq \nu/2\} = 1 - P\left\{T \geq \frac{\nu}{2} - \frac{1}{2}\right\} \\ &= P\left\{Z < \frac{\nu - (x - \lambda) - 1}{\sqrt{2(x + \lambda)}}\right\} =: F_Z(z) \end{aligned} \tag{3.3}$$

となる. ただし

$$z = \frac{\nu - (x - \lambda) - 1}{\sqrt{2(x + \lambda)}}$$

とする. そこで, (3.2) を用いて (3.3) を Edgeworth 展開すれば

$$\begin{aligned} F_Z(z) \approx \Phi(z) - \phi(z)\Bigg\{ &\frac{\sqrt{2}(x - \lambda)}{6(x + \lambda)^{3/2}}(z^2 - 1) + \frac{1}{12(x + \lambda)}(z^3 - 3z) \\ &+ \frac{(x - \lambda)^2}{36(x + \lambda)^3}(z^5 - 10z^3 + 15z) - \frac{1}{12(x + \lambda)}z \Bigg\} =: \tilde{F}_Z(z) \end{aligned} \tag{3.4}$$

となる. ただし Φ, ϕ はそれぞれ $N(0, 1)$ の c.d.f., p.d.f. とする. よって $1 - \tilde{F}_Z(z)$ により $\chi^2_{\nu,\lambda}$ の c.d.f. は近似される. さらに, (3.3), (3.4) より

$$\tilde{F}_Z(z) = \alpha$$

をみたす $z = z_\alpha$ により, 非心 χ^2 分布 $\chi^2(\nu; \lambda)$ の上側 $100\alpha\%$ 点の近似値を求めることができる.

(ii) 自由度 ν が奇数の場合: まず, (2.2) より

$$P\left\{\chi^2_{\nu,\lambda} \geq t\right\} = P\left\{\chi^2_{\nu + 2Y_{\lambda/2}} \geq t\right\}, \quad t > 0 \tag{3.5}$$

となる. ここで ν を奇数として $\nu = 2m - 1$ $(m = 1, 2, \cdots)$ とする. いま, χ^2_ν を自由度 ν の χ^2 分布に従う確率変数とすると, 部分積分を行うことによって, 任意の $t > 0$ について

$$\begin{aligned} P\left\{\chi^2_\nu \geq t\right\} &= \int_t^\infty \frac{1}{2^{m-(1/2)}\Gamma(m - (1/2))} u^{m-(3/2)} e^{-u/2} du \\ &= \frac{t^{m-(3/2)} e^{-t/2}}{2^{m-(3/2)}\Gamma(m - (1/2))} + \frac{1}{2^{m-(3/2)}\Gamma(m - (3/2))} \int_t^\infty u^{m-(5/2)} e^{-u/2} du \end{aligned}$$

$$= \frac{t^{m-(3/2)}e^{-t/2}}{2^{m-(3/2)}\Gamma(m-(1/2))} + \frac{t^{m-(5/2)}e^{-t/2}}{2^{m-(5/2)}\Gamma(m-(3/2))} + \cdots + \frac{t^{m-((2m-1)/2)}e^{-t/2}}{2^{m-((2m-1)/2)}\Gamma(m-((2m-3)/2))}$$
$$+ \int_t^\infty \frac{1}{\sqrt{2}\Gamma(1/2)} u^{-1/2}e^{-u/2}du$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} t^{1/2}e^{-t/2}\left\{1 + \frac{t}{1\cdot 3} + \frac{t^2}{1\cdot 3\cdot 5} + \cdots + \frac{t^{m-2}}{1\cdot 3\cdots(2m-3)}\right\} + 2\left\{1 - \Phi\left(\sqrt{t}\right)\right\} \tag{3.6}$$

になる. そこで, 次のような確率量関数 (p.m.f.) p_ρ に従う確率変数 Z_ρ を考える.

$$p_\rho(z) = P\{Z_\rho = z\} = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(z+(1/2))}\rho^{z-(1/2)}e^{-\rho} & (z = 1, 2, \cdots), \\ 2\{1 - \Phi\left(\sqrt{2\rho}\right)\} & (z = 0), \\ 0 & (\text{その他}). \end{cases} \tag{3.7}$$

ただし, $\rho > 0$ とする. このとき

$$P\left\{\chi_\nu^2 \geq t\right\} = P\left\{Z_{t/2} \leq m-1\right\} \tag{3.8}$$

となる. 実際, (3.6), (3.7) より

$$P\{Z_{t/2} \leq m-1\} = \sum_{z=1}^{m-1} \frac{1}{\Gamma(z+(1/2))}\left(\frac{t}{2}\right)^{z-(1/2)} e^{-t/2} + 2\left\{1 - \Phi\left(\sqrt{t}\right)\right\}$$
$$= P\left\{\chi_\nu^2 \geq t\right\}$$

となるから, (3.8) が成り立つ. よって, (3.5), (3.8) より

$$P\left\{\chi_{2m-1,\lambda}^2 \geq t\right\} = P\left\{\chi_{2m-1+2Y_{\lambda/2}}^2 \geq t\right\}$$
$$= P\left\{Z_{t/2} \leq m + Y_{\lambda/2} - 1\right\}$$
$$= P\left\{Z_{t/2} - Y_{\lambda/2} \leq m-1\right\} \tag{3.9}$$

となる. ここで $Z_{t/2}$ と $Y_{\lambda/2}$ はたがいに独立とする. このとき

$$T_{t,\lambda} := Z_{t/2} - Y_{\lambda/2}$$

とおく. いま, Z_ρ の m.g.f. は

$$g_\rho(\theta) := E\left[e^{\theta Z_\rho}\right]$$
$$= \sum_{z=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(z+(1/2))}\rho^{z-(1/2)}e^{\theta z}e^{-\rho} + 2\left\{1 - \Phi\left(\sqrt{2\rho}\right)\right\}$$
$$= e^{\rho(e^\theta - 1)+(\theta/2)} \sum_{z=1}^{\infty} \frac{(\rho e^\theta)^{z-(1/2)}}{\Gamma(z+(1/2))}e^{-\rho e^\theta} + 2\left\{1 - \Phi\left(\sqrt{2\rho}\right)\right\} \tag{3.10}$$

となる. 一方, p_ρ が p.m.f. であるから, (3.7) より

$$1=\sum_{z=0}^{\infty}p_\rho(z)=\sum_{z=1}^{\infty}\frac{\rho^{z-(1/2)}}{\Gamma\left(z+(1/2)\right)}e^{-\rho}+2\left\{1-\Phi\left(\sqrt{2\rho}\right)\right\}$$

となる. よって

$$\sum_{z=1}^{\infty}\frac{1}{\Gamma\left(z+(1/2)\right)}\rho^{z-(1/2)}e^{-\rho}=1-2\left\{1-\Phi\left(\sqrt{2\rho}\right)\right\}=2\Phi\left(\sqrt{2\rho}\right)-1 \tag{3.11}$$

となる. そこで (3.11) を (3.10) に代入すると

$$g_\rho(\theta)=e^{\rho(e^\theta-1)+(\theta/2)}\left\{2\Phi\left(\sqrt{2\rho e^\theta}\right)-1\right\}+2\left\{1-\Phi\left(\sqrt{2\rho}\right)\right\} \tag{3.12}$$

となり,

$$E(Z_\rho)=\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\log g_\rho(\theta)\right]_{\theta=0}=\left(\rho+\frac{1}{2}\right)\left\{2\Phi\left(\sqrt{2\rho}\right)-1\right\}+\sqrt{2\rho}\phi\left(\sqrt{2\rho}\right) \tag{3.13}$$

となる. このとき, Mills 比より $\rho\to\infty$ のとき

$$\Phi\left(\sqrt{2\rho}\right)=1-\phi\left(\sqrt{2\rho}\right)\left\{\frac{1}{\sqrt{2\rho}}-\frac{1}{(2\rho)^{3/2}}+O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\right\}$$

となるから, (3.13) に代入すると

$$E(Z_\rho)=\rho+\frac{1}{2}+O\left(\sqrt{\rho}\phi\left(\sqrt{2\rho}\right)\right)$$

となる. 同様にして, Z_ρ の分散, 3 次のキュムラント, 4 次のキュムラントはそれぞれ

$$\begin{aligned}V(Z_\rho)&=\rho+O\left(\rho\sqrt{\rho}\phi\left(\sqrt{2\rho}\right)\right),\\ \kappa_3(Z_\rho)&=\rho+O\left(\rho^2\sqrt{\rho}\phi\left(\sqrt{2\rho}\right)\right),\\ \kappa_4(Z_\rho)&=\rho+O\left(\rho^3\sqrt{\rho}\phi\left(\sqrt{2\rho}\right)\right),\end{aligned}$$

となる. 一方, $Y_{\lambda/2}$ はポアソン分布 $Po(\lambda/2)$ に従うことから, その平均, 分散, 3 次のキュムラント, 4 次のキュムラントはそれぞれ

$$E(Y_{\lambda/2})=V(Y_{\lambda/2})=\kappa_3(Y_{\lambda/2})=\kappa_4(Y_{\lambda/2})=\lambda/2$$

となる. ここで $\rho=t/2$ とし, $Z_{t/2}$ と $Y_{\lambda/2}$ がたがいに独立であることに注意すれば, $T_{t,\lambda}=Z_{t/2}-Y_{\lambda/2}$ の 4 次までのキュムラントは

$$\begin{aligned}E(T_{t,\lambda})&=\frac{1}{2}(t-\lambda+1)+O\left(\sqrt{t}\phi\left(\sqrt{t}\right)\right),\\ V(T_{t,\lambda})&=\frac{1}{2}(t+\lambda)+O\left(t\sqrt{t}\phi\left(\sqrt{t}\right)\right),\end{aligned}$$

$$\kappa_3(T_{t,\lambda}) = \frac{1}{2}(t-\lambda) + O\left(t^2\sqrt{t}\phi\left(\sqrt{t}\right)\right),$$
$$\kappa_4(T_{t,\lambda}) = \frac{1}{2}(t+\lambda) + O\left(t^3\sqrt{t}\phi\left(\sqrt{t}\right)\right)$$

になる．そこで，$T_{t,\lambda}$ を規準化して

$$Z := \left\{T_{t,\lambda} - \frac{1}{2}(t-\lambda+1)\right\} \Big/ \sqrt{\frac{1}{2}(t+\lambda)}$$

とし，(3.9) において連続補正を用いると

$$\begin{aligned} P\left\{\chi^2_{2m-1,\lambda} \geq t\right\} &= P\left\{T_{t,\lambda} \leq m-1\right\} = P\left\{T_{t,\lambda} \leq m - \frac{1}{2}\right\} \\ &= P\left\{Z \leq \left(m - \frac{1}{2}(t-\lambda) - 1\right) \Big/ \sqrt{\frac{1}{2}(t+\lambda)}\right\} \\ &=: F_Z(z) \end{aligned}$$

となる．ただし，

$$\begin{aligned} z &:= \left\{m - \frac{1}{2}(t-\lambda) - 1\right\} \Big/ \sqrt{\frac{1}{2}(t+\lambda)} \\ &= \frac{2(m-1)-(t-\lambda)}{\sqrt{2(t+\lambda)}} = \frac{\nu-(t-\lambda)-1}{\sqrt{2(t+\lambda)}} \end{aligned}$$

とする．このとき，$F_Z(z)$ に Edgeworth 展開を適用すると，十分大きい t について

$$\begin{aligned} F_Z(z) \approx \Phi(z) - \phi(z)\Bigg\{ &\frac{\sqrt{2}(t-\lambda)}{6(t+\lambda)^{3/2}}(z^2-1) - \frac{1}{12(t+\lambda)}z + \frac{1}{12(t+\lambda)}(z^3-3z) \\ &+ \frac{(t-\lambda)^2}{36(t+\lambda)^3}(z^5 - 10z^3 + 15z)\Bigg\} =: \tilde{F}_Z(z) \qquad (3.14) \end{aligned}$$

となる．そして，$\tilde{F}_Z(z) = \alpha$ となる $z = -z_\alpha$ を求め，

$$-z_\alpha\sqrt{\frac{1}{2}(t+\lambda)} = m - \frac{1}{2}(t-\lambda) - 1$$

となる $t = t_\alpha$ を求めれば，これが非心 χ^2 分布 $\chi^2(2m-1,\lambda)$ の上側 $100\alpha\%$ 点の近似値になる．

さて，(3.4), (3.14) を比較すると ν が奇数の場合も偶数の場合も $\tilde{F}_Z$ は全く同じになり，パーセント点の近似も同じになる．なお，(i) の $T = Y_{x/2} - Y_{\lambda/2}$ と (ii) の $T_{t,\lambda} = Z_{t/2} - Y_{\lambda/2}$ の 4 次までのキュムラントで異なるのは平均のみで

$$E(T_{t,\lambda}) - E(T) = \frac{1}{2}$$

となり，これは (i), (ii) における規準化した確率変数 Z の分布の $o(1/t)$ のオーダーまでの Edgeworth 展開には，ν が奇数，偶数であることは影響しないことが分かる．

次に, $X_1, \cdots, X_n$ を互いに独立に, 各 X_i が正規分布 $N(\mu_i, \sigma^2)$ に従うとし, $\mu_i (i = 1, \cdots, n)$ は既知で σ^2 は未知とする. このとき, $\sum_{i=1}^n X_i^2/\sigma^2$ が自由度 n, 非心度 $\lambda := \sum_{i=1}^n \mu_i^2/\sigma^2$ の非心 χ^2 分布 $\chi^2(n;\lambda)$ に従うことが分かる. このとき非心度 λ の $100(1-\alpha)\%$ 信頼区間を漸近的に求めよう. まず, $\tilde{F}_Z(z) = \alpha/2$ となる z を z_2, $1 - \tilde{F}_Z(z) = \alpha/2$ となる z を z_1 とすると

$$\begin{aligned} 1-\alpha &\approx P\{z_2 < Z < z_1\} = \tilde{F}_Z(z_1) - \tilde{F}_Z(z_2) \\ &= 1 - \tilde{F}_Z(z_2) - \left\{1 - \tilde{F}_Z(z_1)\right\} \\ &\approx P\left\{\chi^2_{\nu,\lambda} \le x_2\right\} - P\left\{\chi^2_{\nu,\lambda} < x_1\right\} \\ &= P\left\{x_1 \le \chi^2_{\nu,\lambda} \le x_2\right\} \end{aligned} \tag{3.15}$$

になる. ただし

$$z_i = \frac{\nu - (x_i - \lambda) - 1}{\sqrt{2(x_i + \lambda)}} \quad (i = 1, 2)$$

とする. このとき, λ の定義と (3.15) から

$$\begin{aligned} &P\left\{x_1 \le \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n X_i^2 \le x_2\right\} \\ =&P\left\{x_1 \le \frac{\lambda}{\sum_{i=1}^n \mu_i^2}\sum_{i=1}^n X_i^2 \le x_2\right\} \\ =&P\left\{\frac{x_1 \sum_{i=1}^n \mu_i^2}{\sum_{i=1}^n X_i^2} \le \lambda \le \frac{x_2 \sum_{i=1}^n \mu_i^2}{\sum_{i=1}^n X_i^2}\right\} \end{aligned}$$

となり, 区間

$$\left[\frac{x_1 \sum_{i=1}^n \mu_i^2}{\sum_{i=1}^n X_i^2}, \ \frac{x_2 \sum_{i=1}^n \mu_i^2}{\sum_{i=1}^n X_i^2}\right]$$

が λ の漸近的に $100(1-\alpha)\%$ 信頼区間になる.

4. χ^2 検定の検出力と非心度

非心度 λ について, 仮説 H : $\lambda = 0$, 対立仮説 K : $\lambda > 0$ の水準 α の検定問題において, 検出力が $1-\beta$ となる非心度の値が適当な α, β, ν に対して得られている ([Y77]). そこで, χ^2_α を自由度 ν の中心 χ^2 分布 $\chi^2(\nu)$ の上側 $100\alpha\%$ 点とすると, 非心 χ^2 分布 $\chi^2(\nu;\lambda)$ に従う確率変数 $\chi^2_{\nu,\lambda}$ について

$$1 - \beta = P\left\{\chi^2_{\nu,\lambda} \ge \chi^2_\alpha\right\} \approx \tilde{F}_Z(z_\alpha) \tag{4.1}$$

から λ の近似値を求める. ただし

$$z_\alpha = \frac{\nu - (\chi^2_\alpha - \lambda) - 1}{\sqrt{2(\chi^2_\alpha + \lambda)}}$$

とする. このとき, [Y77] で与えられた $\alpha = 0.05$, $\nu = 1(1)40$, $50(10)120$, $1-\beta = 0.1(0.1)0.9$ のときの値を真値として, (4.1) から得られた近似値を比較する (付表 1~4 参照). ここで, (3.14) の $\tilde{F}_Z(z)$ の $\{\cdots\}$ の中の第 2 項目までの近似値も比較的良いが, $1-\beta$ が大きくなると, 少し精度が落ちるので, $\tilde{F}_Z(z)$ の $\{\cdots\}$ の中のすべての項を用いた方が良い精度をもつ.

5. 両側 t 検定の検出力と非心度

まず, Z を標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数とし, S^2 を Z と独立な確率変数とし, νS^2 が自由度 ν の中心 χ^2 分布 $\chi^2(\nu)$ に従うとする. このとき, $S := \sqrt{S^2}$ として

$$T_{\nu,\delta} := \frac{Z+\delta}{S}$$

とおくと, これは自由度 ν, 非心度 δ の非心 t 分布 $t(\nu,\delta)$ に従い, その p.d.f. は

$$f_{T_{\nu,\delta}}(t;\nu,\delta) = \frac{e^{-\delta^2/2}}{\sqrt{\pi\nu}\Gamma(\nu/2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2}\delta)^k}{k!} \Gamma\left(\frac{\nu+k+1}{2}\right) \left(\frac{t}{\sqrt{\nu}}\right)^k \left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-(\nu+k+1)/2}$$

$$(t \in \mathbf{R}^1;\ \nu = 1, 2, \cdots;\ \delta \in \mathbf{R}^1)$$

になる. ただし, $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数とする. このとき, Z と S の線形結合に基づく統計量に Cornish-Fisher 展開を適用することで, 次の定理を得る.

定理 ([A95]) 自由度 ν, 非心度 δ の非心 t 分布 $t(\nu,\delta)$ の上側 $100\alpha\%$ 点 t_α の $o(\nu^{-3})$ までの近似は, 次式より導かれる.

$$\frac{t_\alpha b_\nu - \delta}{\sqrt{1+t_\alpha^2(1-b_\nu^2)}} = u_\alpha - \frac{t_\alpha^3(u_\alpha^2-1)}{24\{1+t_\alpha^2(1-b_\nu^2)\}^{3/2}} \left\{\frac{1}{\nu^2} + \frac{1}{4\nu^3} + O\left(\frac{1}{\nu^4}\right)\right\} \tag{5.1}$$

ただし, u_α は $N(0,1)$ の上側 $100\alpha\%$ 点とし,

$$b_\nu = \sqrt{\frac{2}{\nu}}\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \Big/ \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)$$

とする.

次に, 非心度 δ について, 仮設 $H:\ \delta = 0$, 対立仮説 $K:\ \delta \neq 0$ の水準 α の検定問題において, 検出力が $1-\beta$ となる非心度の値が適当な α, β, ν に対して得られている ([Y77]). そこで, $t_{\alpha/2}$ を自由度 ν の中心 t 分布 $t(\nu)$ の上側 $100(\alpha/2)\%$ 点とすると, 非心 t 分布 $t(\nu,\delta)$ に従う確率変数 $T_{\nu,\delta}$ について

$$1-\beta = P\{T_{\nu,\delta} \geq t_{\alpha/2}\} = 1 - F_{T_{\nu,\delta}}(t_{\alpha/2}),$$

すなわち

$$F_{T_{\nu,\delta}}(t_{\alpha/2}) = \beta \tag{5.2}$$

となる δ の近似値を, (5.1) において t_α に $t_{\alpha/2}$ を代入して求める. ただし, $F_{T_{\nu,\delta}}$ を $T_{\nu,\delta}$ の c.d.f. とする. そして, [Y77] で与えられた, $\alpha=0.10,\ \nu=1(5)30,\ 30(10)60,$
$80,\ 120,\ 1-\beta=0.2(0.1)0.9$ のときの値を真値として, (5.1) から得られた近似値を比較する (付表 5~8 参照).

6. おわりに

本稿において, 非心 χ^2 分布のパーセント点の近似式が自由度が奇数の場合にも, 偶数の場合と同じになることを示した. そして, 非心 χ^2 分布の近似の良さを χ^2 検定の検出力と非心度の観点も含めて数値的に評価した. その結果, その近似がかなり良いことを確認した. また, 非心 t 分布の近似についても同様の観点から評価し, 同様の結論を得た.

参考文献

[A95] Akahira, M. (1995). A higher order approximation to a percentage point of the non-central t-distribution. *Commun. Statist.-Simula.*, **24**(3), 595-605.

[AST95] Akahira, M., Sato, M. and Torigoe, N. (1995). On the new approximation to non-central t-distributions. *J. Japan Statist. Soc.*, **25**(1), 1-18.

[ATK05] Akahira, M., Takeuchi, K. and Kato, M. (2005). Approximations to the non-central distributions and the distribution of the sample correlation coefficient. In revision.

[JKB95] Johnson, N. L., Kotz, S. and Balakrishnan, N. (1995). *Continuous Univariate Distributions, Vol.2. (2nd ed.)*, Wiley, New York.

[KA05] 加藤 雅章, 赤平 昌文. (2005). 母数の境界近傍における非心分布および標本相関係数の分布の近似. 数理解析研究所講究録, **1439**, 79-110.

[Pa49] Patnaik, P. B. (1949). The non-central χ^2- and F-distributions and their applications. *Biometrika*, **36**, 202-232.

[Pe59] Pearson, E. S. (1959). Note on an approximation to the distribution of non-central χ^2. *Biometrika*, **46**, 364.

[Sa63] Sankaran, M. (1963). Approximations to the non-central chi-square distribution. *Biometrika*, **50**, 199-244.

[Sh81] 柴田 義貞 (1981). 正規分布. 東京大学出版会.

[Ta75] 竹内 啓 (1975). 確率分布と統計解析.

[To96] Torigoe, N. (1996). Approximations to non-central χ^2 and F distributions. *J. Japan Statist. Soc.*, **26**(2), 145-159.

[Y77] 山内 二郎 (1977). 簡約統計数値表. 日本規格協会.

付表 1 非心 χ^2 分布 $\chi^2(\nu;\lambda)$ における検出力と非心度: $\alpha = 0.05$, ν, $1-\beta$ を与えたときの λ の真値 ([Y77]).

$\nu \setminus 1-\beta$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1	0.43	1.24	2.06	2.91	3.84	4.90	6.17	7.85	10.51
2	0.62	1.73	2.78	3.83	4.96	6.21	7.70	9.63	12.65
3	0.78	2.10	3.30	4.50	5.76	7.15	8.79	10.90	14.17
4	0.91	2.40	3.74	5.05	6.42	7.92	9.68	11.94	15.41
5	1.03	2.67	4.12	5.53	6.99	8.59	10.45	12.83	16.47
6	1.13	2.91	4.46	5.96	7.50	9.19	11.14	13.62	17.42
7	1.23	3.13	4.77	6.35	7.97	9.73	11.77	14.35	18.28
8	1.32	3.33	5.06	6.71	8.40	10.24	12.35	15.02	19.08
9	1.40	3.53	5.33	7.05	8.81	10.71	12.89	15.65	19.83
10	1.49	3.71	5.59	7.37	9.19	11.15	13.40	16.24	20.53
11	1.56	3.88	5.83	7.68	9.56	11.57	13.89	16.80	21.2
12	1.64	4.05	6.06	7.97	9.90	11.98	14.35	17.34	21.83
13	1.71	4.20	6.29	8.25	10.23	12.36	14.80	17.85	22.44
14	1.77	4.36	6.50	8.52	10.55	12.73	15.22	18.34	23.02
15	1.84	4.50	6.71	8.78	10.86	13.09	15.63	18.81	23.58
16	1.90	4.65	6.91	9.03	11.16	13.43	16.03	19.27	24.13
17	1.97	4.78	7.10	9.27	11.45	13.77	16.41	19.71	24.65
18	2.03	4.92	7.29	9.50	11.73	14.09	16.78	20.14	25.16
19	2.08	5.05	7.47	9.73	12.00	14.41	17.14	20.56	25.65
20	2.14	5.18	7.65	9.96	12.26	14.71	17.50	20.96	26.13
21	2.20	5.30	7.83	10.17	12.52	15.01	17.84	21.36	26.6
22	2.25	5.42	8.00	10.38	12.77	15.30	18.17	21.74	27.06
23	2.30	5.54	8.16	10.59	13.02	15.59	18.50	22.12	27.5
24	2.36	5.66	8.33	10.79	13.26	15.87	18.82	22.49	27.94
25	2.41	5.77	8.48	10.99	13.49	16.14	19.13	22.85	28.37
26	2.46	5.88	8.64	11.19	13.72	16.41	19.44	23.20	28.78
27	2.51	5.99	8.79	11.38	13.95	16.67	19.74	23.55	29.19
28	2.56	6.10	8.94	11.57	14.17	16.93	20.04	23.89	29.6
29	2.60	6.20	9.09	11.75	14.39	17.18	20.33	24.22	29.99
30	2.65	6.31	9.24	11.93	14.60	17.43	20.61	23.55	30.38

付表 1(続) 非心 χ^2 分布 $\chi^2(\nu;\lambda)$ における検出力と非心度: $\alpha = 0.05$, ν, $1-\beta$ を与えたときの λ の真値 ([Y77]).

$\nu \setminus 1-\beta$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
31	2.69	6.41	9.38	12.11	14.82	17.67	20.89	24.87	30.76
32	2.74	6.51	9.52	12.28	15.02	17.91	21.17	25.19	31.13
33	2.78	6.61	9.66	12.45	15.23	18.15	21.44	25.50	31.5
34	2.83	6.70	9.79	12.62	15.43	18.38	21.70	25.80	31.87
35	2.87	6.80	9.93	12.79	15.63	18.61	21.97	26.11	32.23
36	2.91	6.89	10.06	12.96	15.82	18.84	22.23	26.41	32.58
37	2.96	6.99	10.19	13.12	16.01	19.06	22.48	26.70	32.93
38	3.00	7.08	10.32	13.28	16.20	19.28	22.73	26.99	33.27
39	3.04	7.17	10.45	13.44	16.39	19.50	22.98	27.27	33.61
40	3.08	7.26	10.57	13.59	16.58	19.71	23.23	27.56	33.94
50	3.46	8.10	11.75	15.06	18.31	21.72	25.53	30.20	37.07
60	3.80	8.86	12.81	16.38	19.88	23.53	27.61	32.59	39.89
70	4.12	9.56	13.79	17.60	21.32	25.20	29.52	34.79	42.48
80	4.41	10.21	14.70	18.74	22.67	26.75	31.29	36.83	44.89
90	4.69	10.83	15.56	19.80	23.93	28.21	32.96	38.74	47.16
100	4.95	11.41	16.37	20.81	25.12	29.59	34.54	40.56	49.29
110	5.20	11.96	17.14	21.77	26.25	30.90	36.04	42.28	51.33
120	5.44	12.49	17.88	22.68	27.34	32.15	37.47	43.92	53.27

付表 2 非心 χ^2 分布 $\chi^2(\nu;\lambda)$ における検出力と非心度: $\alpha = 0.05$, ν, $1-\beta$ を与えたときの (4.1) による λ の近似値

$\nu \setminus 1-\beta$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1	0.38	1.22	2.05	2.91	3.84	4.90	6.18	7.86	10.53
2	0.59	1.72	2.77	3.84	4.96	6.22	7.71	9.64	12.67
3	0.75	2.09	3.30	4.51	5.77	7.16	8.80	10.91	14.18
4	0.89	2.39	3.74	5.06	6.43	7.93	9.69	11.94	15.41
5	1.01	2.66	4.12	5.53	7.00	8.59	10.45	12.83	16.47
6	1.11	2.90	4.46	5.96	7.51	9.19	11.14	13.62	17.42
7	1.22	3.12	4.77	6.36	7.98	9.74	11.77	14.36	18.29
8	1.31	3.33	5.06	6.72	8.41	10.24	12.35	15.03	19.09
9	1.39	3.52	5.33	7.06	8.82	10.71	12.90	15.65	19.83
10	1.48	3.71	5.59	7.38	9.20	11.16	13.41	16.25	20.54
11	1.55	3.88	5.84	7.69	9.57	11.58	13.90	16.81	21.20
12	1.63	4.05	6.07	7.98	9.91	11.98	14.36	17.34	21.84
13	1.70	4.20	6.29	8.25	10.24	12.36	14.79	17.84	22.44
14	1.76	4.35	6.50	8.52	10.55	12.73	15.22	18.33	23.02
15	1.83	4.50	6.71	8.78	10.87	13.10	15.64	18.82	23.59
16	1.90	4.65	6.91	9.03	11.17	13.44	16.03	19.27	24.13
17	1.96	4.78	7.11	9.28	11.45	13.77	16.42	19.71	24.65
18	2.02	4.92	7.29	9.51	11.73	14.10	16.78	20.14	25.16
19	2.07	5.04	7.47	9.73	12.00	14.41	17.14	20.55	25.65
20	2.13	5.17	7.65	9.96	12.26	14.72	17.50	20.96	26.13
21	2.19	5.30	7.83	10.18	12.52	15.01	17.84	21.35	26.60
22	2.24	5.42	7.99	10.38	12.77	15.30	18.17	21.74	27.05
23	2.30	5.54	8.16	10.59	13.02	15.59	18.50	22.11	27.50
24	2.35	5.66	8.33	10.80	13.27	15.87	18.83	22.49	27.94
25	2.40	5.77	8.48	10.99	13.49	16.14	19.13	22.84	28.36
26	2.46	5.88	8.65	11.19	13.73	16.41	19.45	23.20	28.79
27	2.50	5.98	8.79	11.38	13.95	16.67	19.74	23.54	29.19
28	2.55	6.10	8.95	11.57	14.18	16.93	20.04	23.89	29.60
29	2.60	6.20	9.09	11.75	14.40	17.18	20.33	24.22	29.99
30	2.64	6.30	9.23	11.93	14.60	17.43	20.61	24.54	30.37

付表 2(続) 非心 χ^2 分布 $\chi^2(\nu;\lambda)$ における検出力と非心度: $\alpha = 0.05$, ν, $1-\beta$ を与えたときの (4.1) による λ の近似値

$\nu \setminus 1-\beta$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
31	2.69	6.41	9.38	12.11	14.82	17.68	20.90	24.87	30.76
32	2.73	6.50	9.52	12.28	15.02	17.91	21.16	25.18	31.13
33	2.78	6.60	9.66	12.46	15.23	18.15	21.44	25.50	31.50
34	2.82	6.70	9.79	12.62	15.43	18.38	21.70	25.80	31.86
35	2.87	6.80	9.93	12.79	15.63	18.61	21.96	26.10	32.22
36	2.91	6.89	10.06	12.96	15.83	18.84	22.23	26.41	32.58
37	2.95	6.98	10.19	13.12	16.01	19.06	22.48	26.70	32.92
38	2.99	7.07	10.32	13.28	16.20	19.28	22.73	26.98	33.26
39	3.03	7.17	10.44	13.44	16.39	19.50	22.98	27.27	33.60
40	3.08	7.26	10.57	13.60	16.58	19.71	23.23	27.56	33.94
50	3.45	8.10	11.74	15.06	18.31	21.71	25.52	30.20	37.06
60	3.80	8.86	12.81	16.38	19.88	23.53	27.61	32.59	39.89
70	4.11	9.56	13.79	17.60	21.32	25.20	29.52	34.79	42.48
80	4.43	10.23	14.72	18.76	22.69	26.77	31.32	36.85	44.92
90	4.65	10.79	15.52	19.76	23.88	28.16	32.91	38.69	47.10
100	4.91	11.37	16.33	20.77	25.08	29.55	34.50	40.51	49.24
110	5.22	11.98	17.16	21.79	26.28	30.92	36.06	42.30	51.35
120	5.47	12.52	17.91	22.71	27.37	32.19	37.51	43.96	53.30

付表 3 非心 χ^2 分布 $\chi^2(\nu;\lambda)$ における検出力と非心度: $\alpha = 0.05$, ν, $1-\beta$ を与えたときの λ の近似誤差 (真値 − 近似値)

$\nu \setminus 1-\beta$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1	0.05	0.02	0.01	0.00	0.00	0.00	-0.01	-0.01	-0.02
2	0.03	0.01	0.01	-0.01	0.00	-0.01	-0.01	-0.01	-0.02
3	0.03	0.01	0.00	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01
4	0.02	0.01	0.00	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	0.00	0.00
5	0.02	0.01	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
6	0.02	0.01	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
7	0.01	0.01	0.00	-0.01	-0.01	-0.01	0.00	-0.01	-0.01
8	0.01	0.00	0.00	-0.01	-0.01	0.00	0.00	-0.01	-0.01
9	0.01	0.01	0.00	-0.01	-0.01	0.00	-0.01	0.00	0.00
10	0.01	0.00	0.00	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01
11	0.01	0.00	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	0.00
12	0.01	0.00	-0.01	-0.01	-0.01	0.00	-0.01	0.00	-0.01
13	0.01	0.00	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.01	0.01	0.00
14	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00
15	0.01	0.00	0.00	0.00	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01
16	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.01	-0.01	0.00	0.00	0.00
17	0.01	0.00	-0.01	-0.01	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00
18	0.01	0.00	0.00	-0.01	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.00
19	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00
20	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.00
21	0.01	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00
22	0.01	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01
23	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00
24	0.01	0.00	0.00	-0.01	-0.01	0.00	-0.01	0.00	0.00
25	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01
26	0.00	0.00	-0.01	0.00	-0.01	0.00	-0.01	0.00	-0.01
27	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00
28	0.01	0.00	-0.01	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
29	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
30	0.01	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01

付表 3(続) 非心 χ^2 分布 $\chi^2(\nu;\lambda)$ における検出力と非心度: $\alpha = 0.05$, ν, $1-\beta$ を与えたときの λ の近似誤差 (真値 − 近似値)

$\nu \setminus 1-\beta$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
31	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.01	-0.01	0.00	0.00
32	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.00
33	0.00	0.01	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
34	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01
35	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01
36	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
37	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01
38	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01
39	0.01	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01
40	0.00	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
50	0.01	0.00	0.01	0.00	0.00	0.01	0.01	0.00	0.01
60	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
70	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
80	-0.02	-0.02	-0.02	-0.02	-0.02	-0.02	-0.03	-0.02	-0.03
90	0.04	0.04	0.04	0.04	0.05	0.05	0.05	0.05	0.06
100	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.05	0.05
110	-0.02	-0.02	-0.02	-0.02	-0.03	-0.02	-0.02	-0.02	-0.02
120	-0.03	-0.03	-0.03	-0.03	-0.03	-0.04	-0.04	-0.04	-0.03

付表 4 非心 χ^2 分布 $\chi^2(\nu;\lambda)$ における検出力と非心度: $\alpha = 0.05$, ν, $1-\beta$ を与えたときの λ の近似相対誤差 ((真値 − 近似値)/真値 × 100)

$\nu \setminus 1-\beta$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1	11.76	1.72	0.40	-0.04	-0.03	0.02	-0.11	-0.17	-0.21
2	4.73	0.78	0.21	-0.16	-0.01	-0.09	-0.07	-0.13	-0.14
3	3.50	0.66	-0.08	-0.13	-0.10	-0.12	-0.07	-0.08	-0.08
4	2.39	0.30	0.04	-0.12	-0.08	-0.10	-0.06	0.00	-0.01
5	2.24	0.37	0.06	-0.06	-0.09	-0.05	-0.04	0.00	-0.02
6	1.44	0.34	0.05	-0.01	-0.09	0.00	-0.01	-0.03	0.00
7	1.20	0.16	-0.08	-0.11	-0.12	-0.09	-0.03	-0.04	-0.05
8	0.98	-0.01	-0.06	-0.15	-0.15	-0.03	-0.04	-0.04	-0.04
9	0.54	0.23	-0.07	-0.12	-0.07	-0.03	-0.04	-0.01	-0.01
10	0.98	0.12	-0.03	-0.16	-0.12	-0.09	-0.07	-0.03	-0.03
11	0.35	-0.01	-0.12	-0.11	-0.06	-0.12	-0.05	-0.05	-0.02
12	0.72	0.12	-0.15	-0.11	-0.11	-0.04	-0.06	-0.01	-0.04
13	0.84	0.02	0.05	-0.03	-0.07	-0.03	0.03	0.03	0.02
14	0.43	0.23	0.01	0.03	-0.03	-0.01	0.02	0.04	0.02
15	0.28	-0.10	-0.06	-0.06	-0.09	-0.06	-0.05	-0.03	-0.03
16	0.07	0.07	-0.05	-0.05	-0.06	-0.08	-0.02	-0.01	0.00
17	0.49	-0.09	-0.10	-0.06	-0.03	-0.03	-0.03	-0.02	-0.01
18	0.53	0.07	-0.04	-0.09	0.00	-0.04	-0.03	0.00	0.01
19	0.24	0.12	-0.03	-0.03	0.02	0.03	-0.01	0.05	0.02
20	0.26	0.12	-0.05	0.01	-0.04	-0.04	0.02	0.00	0.00
21	0.44	0.05	0.03	-0.05	-0.02	-0.03	0.00	0.03	0.01
22	0.36	0.08	0.08	-0.03	0.00	-0.01	0.00	0.02	0.04
23	0.14	0.08	-0.02	-0.02	0.02	0.01	0.01	0.03	0.01
24	0.23	0.04	-0.01	-0.11	-0.04	-0.03	-0.04	-0.01	-0.01
25	0.41	0.09	-0.04	-0.03	-0.02	0.00	-0.01	0.03	0.03
26	0.17	-0.04	-0.06	-0.04	-0.08	-0.03	-0.03	-0.02	-0.03
27	0.44	0.08	-0.01	0.02	0.00	0.01	0.01	0.04	0.01
28	0.31	0.04	-0.08	-0.01	-0.05	-0.01	0.00	0.01	0.01
29	0.01	-0.05	-0.05	-0.04	-0.04	-0.03	0.00	-0.01	-0.01
30	0.31	0.14	0.06	0.00	-0.03	0.02	0.01	0.03	0.02

付表 4(続) 非心 χ^2 分布 $\chi^2(\nu;\lambda)$ における検出力と非心度: $\alpha = 0.05$, ν, $1-\beta$ を与えたときの λ の近似相対誤差 ((真値 − 近似値)/真値 × 100)

$\nu \setminus 1-\beta$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
31	0.00	0.00	-0.04	-0.04	-0.02	-0.05	-0.03	-0.01	-0.01
32	0.29	0.12	0.04	-0.01	-0.01	0.01	0.04	0.04	0.01
33	0.00	0.08	0.02	-0.06	0.00	0.00	0.01	0.01	-0.01
34	0.29	0.00	-0.02	-0.03	0.01	0.00	-0.01	0.00	0.02
35	0.16	0.05	0.04	-0.02	0.02	0.00	0.02	0.02	0.03
36	0.00	-0.05	-0.02	0.00	-0.03	0.00	0.01	0.02	0.01
37	0.34	0.09	0.01	0.01	-0.02	0.01	0.00	0.02	0.03
38	0.32	0.08	0.04	0.02	-0.02	0.02	0.00	0.02	0.02
39	0.25	0.05	0.06	0.02	-0.01	0.03	0.00	-0.01	0.02
40	0.14	0.01	-0.03	-0.05	0.00	-0.02	0.00	0.01	0.00
50	0.27	0.06	0.05	0.03	0.00	0.02	0.02	0.01	0.02
60	0.09	0.01	-0.01	-0.02	-0.01	-0.01	0.02	0.00	0.01
70	0.15	0.00	0.00	-0.01	-0.02	0.00	0.01	0.01	0.00
80	-0.4	-0.22	-0.15	-0.09	-0.08	-0.09	-0.08	-0.06	-0.06
90	0.88	0.40	0.28	0.22	0.20	0.16	0.14	0.12	0.12
100	0.74	0.36	0.24	0.20	0.16	0.15	0.13	0.12	0.09
110	-0.30	-0.14	-0.11	-0.08	-0.10	-0.07	-0.06	-0.05	-0.03
120	-0.46	-0.21	-0.16	-0.15	-0.12	-0.11	-0.10	-0.09	-0.06

付表 5 非心 t 分布 $t(\nu;\delta)$ における検出力と非心度: $\alpha = 0.10$, ν, $1-\beta$ を与えたときの δ の真値 ([Y77]).

$\nu \setminus 1-\beta$	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1	1.567	2.458	3.352	4.312	5.380	6.625	8.192	10.515
5	0.893	1.284	1.606	1.906	2.205	2.527	2.905	3.432
10	0.831	1.193	1.490	1.764	2.038	2.331	2.674	3.149
15	0.812	1.165	1.454	1.722	1.989	2.273	2.607	3.069
20	0.802	1.151	1.437	1.702	1.965	2.246	2.575	3.031
25	0.797	1.143	1.427	1.690	1.951	2.230	2.557	3.009
30	0.793	1.138	1.420	1.682	1.942	2.220	2.544	2.995
40	0.788	1.131	1.412	1.672	1.930	2.207	2.530	2.977
50	0.786	1.127	1.407	1.666	1.924	2.199	2.521	2.967
60	0.784	1.125	1.404	1.662	1.919	2.194	2.515	2.960
80	0.782	1.122	1.400	1.658	1.914	2.188	2.508	2.951
120	0.780	1.118	1.396	1.653	1.908	2.181	2.501	2.943

付表 6 非心 t 分布 $t(\nu;\delta)$ における検出力と非心度: $\alpha = 0.10$, ν, $1-\beta$ を与えたときの (5.1) による δ の近似値

$\nu \setminus 1-\beta$	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1	1.479	2.360	3.249	4.191	5.243	6.488	8.103	10.625
5	0.924	1.293	1.610	1.907	2.206	2.527	2.904	3.432
10	0.860	1.201	1.492	1.765	2.038	2.331	2.673	3.149
15	0.841	1.173	1.457	1.723	1.989	2.274	2.607	3.069
20	0.831	1.160	1.441	1.703	1.966	2.247	2.575	3.032
25	0.825	1.151	1.430	1.691	1.951	2.230	2.557	3.009
30	0.821	1.146	1.423	1.683	1.942	2.219	2.544	2.995
40	0.817	1.140	1.416	1.673	1.931	2.207	2.530	2.978
50	0.814	1.136	1.411	1.668	1.924	2.199	2.521	2.967
60	0.813	1.134	1.408	1.664	1.920	2.194	2.515	2.960
80	0.810	1.130	1.403	1.659	1.914	2.188	2.508	2.951
120	0.808	1.127	1.400	1.655	1.909	2.182	2.501	2.943

付表 7 非心 t 分布 $t(\nu;\delta)$ における検出力と非心度: $\alpha = 0.10$, ν, $1-\beta$ を与えたときの δ の近似誤差 (真値 − 近似値)

$\nu \setminus 1-\beta$	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1	0.088	0.098	0.103	0.121	0.137	0.137	0.089	-0.110
5	-0.031	-0.009	-0.004	-0.001	-0.001	0.000	0.001	0.000
10	-0.029	-0.008	-0.002	-0.001	-0.000	0.000	0.001	0.000
15	-0.029	-0.008	-0.003	-0.001	0.000	-0.001	0.000	-0.000
20	-0.029	-0.009	-0.004	-0.001	-0.001	-0.001	-0.000	-0.001
25	-0.028	-0.008	-0.003	-0.001	-0.000	-0.000	0.000	-0.000
30	-0.028	-0.008	-0.003	-0.001	-0.000	0.001	-0.000	0.000
40	-0.029	-0.009	-0.004	-0.001	-0.001	0.000	0.000	-0.001
50	-0.028	-0.009	-0.004	-0.002	-0.000	-0.000	0.000	-0.000
60	-0.029	-0.009	-0.004	-0.002	-0.001	-0.000	-0.000	-0.000
80	-0.028	-0.008	-0.003	-0.001	-0.000	0.000	0.000	-0.000
120	-0.028	-0.009	-0.004	-0.002	-0.001	-0.001	0.000	-0.000

付表 8 非心 t 分布 $t(\nu;\delta)$ における検出力と非心度: $\alpha = 0.10$, ν, $1-\beta$ を与えたときの δ の近似相対誤差 ((真値 − 近似値)/真値 $\times$ 100)

$\nu \setminus 1-\beta$	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1	5.623	3.970	3.084	2.799	2.553	2.071	1.087	-1.045
5	-3.494	-0.694	-0.224	-0.052	-0.032	0.009	0.019	0.010
10	-3.525	-0.669	-0.163	-0.065	-0.007	0.021	0.034	0.002
15	-3.548	-0.706	-0.233	-0.066	0.001	-0.024	0.010	-0.005
20	-3.673	-0.773	-0.252	-0.063	-0.031	-0.024	-0.016	-0.022
25	-3.555	-0.739	-0.221	-0.041	-0.014	-0.005	0.020	-0.008
30	-3.587	-0.706	-0.240	-0.042	-0.001	0.023	-0.011	0.008
40	-3.700	-0.784	-0.256	-0.083	-0.061	0.001	0.008	-0.017
50	-3.603	-0.791	-0.263	-0.094	-0.023	-0.012	0.003	-0.001
60	-3.664	-0.762	-0.266	-0.120	-0.066	-0.021	-0.014	-0.014
80	-3.574	-0.702	-0.232	-0.047	-0.016	0.014	0.014	-0.013
120	-3.606	-0.818	-0.268	-0.093	-0.070	-0.043	0.002	-0.014