

# マルチウェーブレットの構成と応用

## Construction of multiwavelets and their applications

大阪教育大学 数理科学 芦野 隆一

Ryuichi ASHINO

Mathematical Sciences, Osaka Kyoiku University

### 概要

マルチウェーブレット (multiwavelet) はウェーブレット正規直交基底のひとつの一般化である。形式的には通常のウェーブレットをマルチウェーブレットに含めることができるが、ここではこれらを比較するため、通常のウェーブレットをユニウェーブレット (uniwavelet) と呼び、区別して扱う。簡単のため、1次元の場合に限る。本論文ではユニウェーブレットとマルチウェーブレットの類似点と相違点に注意して、多重解像度解析によるマルチウェーブレットの構成法を述べる。また、マルチウェーブレットの必要性とマルチウェーブレットの応用について解説する。

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary: 42C40; Secondary: 65T60.

*Key words and phrases*. multiwavelet, orthonormal basis

## 1 はじめに

ウェーブレット解析では  $n$  変数の実数値あるいは複素数値の関数  $f(x)$  に対して、 $f(Ax + b)$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$  の形の関数系を扱う。行列  $A$  は伸張行列 (dilation matrix) と呼ばれる。1次元 ( $n = 1$ ) の場合には、伸張行列は伸張因子 (dilation factor) と呼ばれる。本論文では単純だが応用上最も重要な 1次元かつ伸張因子が 2 の場合に限って解説する。細かい数学的議論や条件については省略するので、詳しくは文献 [13] を、多次元の場合は文献 [6] を参照していただきたい。また、文献 [22], p. 108, 補足 11 にはマルチウェーブレットが研究され始めた頃の研究者のコメントが掲載されていて興味深い。

## 2 時間周波数解析からの準備

実数  $\mathbb{R}$  上 2 乗可積分な複素数値関数の成すヒルベルト空間を  $L^2(\mathbb{R})$  と表す。内積と内積に付随するノルムをそれぞれ

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx, \quad \|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

と表す。ここで  $\bar{g}$  は複素数値関数  $g$  の複素共役を表す。平行移動, 変調, 伸張作用素をそれぞれ

$$\mathcal{T}_b f(x) := f(x - b), \quad \mathcal{M}_\omega f(x) := e^{ix\omega} f(x), \quad \mathcal{D}_a f(x) := a^{-1/2} f(x/a)$$

で定義する. ここで  $b, \omega \in \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$  である. これらの作用素はすべて  $L^2(\mathbb{R})$  上のユニタリ作用素<sup>1</sup>であるから, それらの共役作用素<sup>2</sup>はそれぞれの逆作用素で与えられる. すなわち,

$$T_b^* = T_{-b}, \quad M_\omega^* = M_{-\omega}, \quad D_a^* = D_{1/a}.$$

関数  $f$  のフーリエ変換と関数  $g$  の逆フーリエ変換をそれぞれ

$$\mathcal{F}[f(x)](\xi) = \widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) dx,$$

$$\mathcal{F}^{-1}[g(\xi)](x) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} g(\xi) d\xi$$

と定義する. 交換関係については,

$$\begin{aligned} T_b M_\omega &= e^{-i\omega b} M_\omega T_b, & M_\omega T_b &= e^{i\omega b} T_b M_\omega, \\ T_b D_a &= D_a T_{b/a}, & D_a T_b &= T_{ab} D_a, \\ M_\omega D_a &= D_a M_{a\omega}, & D_a M_\omega &= M_{\omega/a} D_a. \\ \mathcal{F} T_b &= M_{-b} \mathcal{F}, & T_b \mathcal{F}^{-1} &= \mathcal{F}^{-1} M_{-b}, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F} M_\omega &= T_\omega \mathcal{F}, & M_\omega \mathcal{F}^{-1} &= \mathcal{F}^{-1} T_\omega, \\ \mathcal{F} D_a &= D_{1/a} \mathcal{F}, & D_a \mathcal{F}^{-1} &= \mathcal{F}^{-1} D_{1/a} \end{aligned} \tag{2}$$

が成り立つ.

### 3 ユニウェーブレット

**定義 1** 関数  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  を伸張し, 平行移動した関数系  $\{T_{k/2^j} D_{1/2^j} \psi\}_{k,j \in \mathbb{Z}}$  が  $L^2(\mathbb{R})$  の正規直交基底を成すとき,  $\psi$  をウェーブレット関数 (wavelet function) といひ, 正規直交基底を成す関数を単にウェーブレット (wavelets) という. ここで,

$$T_{k/2^j} D_{1/2^j} \psi = 2^{j/2} \psi(2^j x - k)$$

である. このとき,  $f \in L^2(\mathbb{R})$  の正規直交基底  $\{\psi_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  に関する展開

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, T_{k/2^j} D_{1/2^j} \psi \rangle T_{k/2^j} D_{1/2^j} \psi \tag{3}$$

をウェーブレット展開と呼ぶ. 以下で定義するマルチウェーブレットと区別するときには, このウェーブレットをユニウェーブレット (uniwavelet) と呼ぶ.

<sup>1</sup>有界線形作用素  $A$  が全単射かつ  $\langle Af, Ag \rangle = \langle f, g \rangle$ ,  $\forall f, g \in L^2(\mathbb{R})$  を満たすとき,  $A$  をユニタリ作用素 (unitary operator) という.

<sup>2</sup>有界線形作用素  $A$  に対して,  $\langle Af, g \rangle = \langle f, A^*g \rangle$ ,  $\forall f, g \in L^2(\mathbb{R})$  を満たす  $A^*$  を  $A$  の共役作用素 (adjoint operator) という.

関数  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  がウェーブレット関数であるための必要十分条件として次の定理 1 が知られている. 例えば文献 [23], p. 362, 定理 1.1 を参照せよ. この定理 1 の必要十分条件を満たすように関数  $\psi$  を構成することは,  $\widehat{\psi}$  がコンパクトサポート<sup>3</sup>を持つ場合を除き, 一般には難しい. 現状では後で述べる多重解像度解析を使ってウェーブレット関数を構成する方法が主流である.

定理 1 関数  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  が  $\|\psi\| = 1$  を満たすとする. 関数  $\psi$  がウェーブレット関数であるための必要十分条件は

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(2^j \xi)|^2 = 1 \quad \text{a.e. } \xi \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \widehat{\psi}(2^j \xi) \overline{\widehat{\psi}(2^j(\xi + 2m\pi))} = 0 \quad \text{a.e. } \xi \in \mathbb{R}, \quad m \in 2\mathbb{Z} + 1 \quad (5)$$

が成り立つことである.

交換関係 (1), (2) より, ウェーブレット  $T_{k/2^j} D_{1/2^j} \psi$  のフーリエ像は

$$\mathcal{F} T_{k/2^j} D_{1/2^j} \psi = \mathcal{M}_{-k/2^j} D_{2^j} \widehat{\psi}$$

となるから, パーセヴァルの等式より,

$$\langle f, T_{k/2^j} D_{1/2^j} \psi \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \widehat{f}, \mathcal{M}_{-k/2^j} D_{2^j} \widehat{\psi} \rangle \quad (6)$$

を得る. したがって, (3) のフーリエ像は,

$$\begin{aligned} \widehat{f} &= \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, T_{k/2^j} D_{1/2^j} \psi \rangle \mathcal{M}_{-k/2^j} D_{2^j} \widehat{\psi} \\ &= \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \langle \widehat{f}, \mathcal{M}_{-k/2^j} D_{2^j} \widehat{\psi} \rangle \mathcal{M}_{-k/2^j} D_{2^j} \widehat{\psi} \end{aligned} \quad (7)$$

と展開できる.

まず  $j$  を固定して考える. 任意の  $k \in \mathbb{Z}$  に対して,  $|\mathcal{M}_{-k/2^j} D_{2^j} \widehat{\psi}| = |D_{2^j} \widehat{\psi}|$  であるから, ウェーブレット展開 (3) は関数  $f$  を  $x$  空間 (時間領域) において  $k/2^j$  刻みで局所化すると同時に, そのフーリエ像 (7) は関数  $\widehat{f}$  を  $\xi$  空間 (周波数領域) において関数  $D_{2^j} \widehat{\psi}$  が局在している部分に局所化していることになる. そして, それぞれの局所化された成分の大きさが同じウェーブレット係数 (6) で与えられるので, ウェーブレット展開を時間周波数解析の道具として使うことができる. ただし,  $x$  空間では刻み幅  $k/2^j$  で情報にアクセスできるが,  $\xi$  空間では  $\widehat{\psi}$  が局在している部分を拡大縮小した部分の情報にのみアクセスすることができるので, 時間に関して比較的細かい情報が得られるが周波数に関しては比較的粗い情報しか得られない. つまり, 時間と周波数を平等には扱っていない. また, 時間と周波数の両方の領域

<sup>3</sup>連続関数  $f$  に対して, 集合  $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$  を含む最小の閉集合を  $f$  のサポート (support) という. 実数  $\mathbb{R}$  上では有界閉集合をコンパクト集合 (compact set) と呼ぶと思つてよい.

で同時に局所化できるためには、ウェーブレット関数が両方の領域で局在していることが必要である。例えば、シュワルツの急減少関数のフーリエ像はシュワルツの急減少関数であるから、ウェーブレット関数  $\psi$  がシュワルツの急減少関数であればよい。応用上、ウェーブレット関数には次のような条件を課することが多い。

条件 1 (i) 局所性 (localization):

$$\forall \ell \in \mathbb{N}, \exists C_\ell; |\psi(x)| \leq C(1 + |x|)^{-\ell}.$$

(ii) バニシングモーメント (vanishing moments):

$$\exists L \in \mathbb{Z}_+ := \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0\}, 0 \leq \forall \ell \leq L; \int_{\mathbb{R}} x^\ell \psi(x) dx = 0.$$

(iii) 正則性 (regularity):

$$\exists r \in \mathbb{Z}_+; \psi \in C^r(\mathbb{R}).$$

一般に関数  $\psi$  が局所性 (i) を持つとき、 $\psi$  は無限遠で急減少と呼ぶ。ウェーブレット関数  $\psi$  が、 $r$  次の正則性 (iii) をもち、 $\psi$  の  $r$  次までの導関数が局所性 (i) を持つなら、 $\psi$  が  $r$  次までのすべてのバニシングモーメント (ii) ( $L = r$ ) を持つことが知られている。例えば文献 [20], p. 64, 定理 7.2.1 を参照せよ。そこで他の条件から導けるバニシングモーメントを仮定せずにすむように、条件 1 をうまくまとめた条件のひとつとして、次の  $r$  次正則性がある。

定義 2 非負の整数  $r \in \mathbb{Z}_+$  に対し、

$$S_r(\mathbb{R}) := \{f \in C^r(\mathbb{R}) \mid f^{(\alpha)}, 0 \leq \alpha \leq r \text{ は無限遠で急減少}\}$$

とする。関数  $f$  が  $f \in S_r(\mathbb{R})$  を満たすとき、 $f$  は  $r$  次正則であるという。

文献 [15], p. 21, Definition 2 では、微分を超関数の意味で考えて、 $C^r(\mathbb{R})$  を  $L^\infty(\mathbb{R})$  に取り替えた弱い条件を  $r$ -regular と呼んでいる。

次に  $j \rightarrow -\infty$  のときを考える。ウェーブレット関数  $\mathcal{D}_{1/2^j} \psi$  が  $x$  空間で局在している部分は無限遠方に引き延ばされ、そのフーリエ像  $\mathcal{D}_{2^j} \hat{\psi}$  が  $\xi$  空間で局在している部分は原点に収縮される。工学などで実際に扱う信号 (つまり関数) では、信号のゆっくりと変動する成分が重要であり、この成分は信号のフーリエ像の原点近傍の値に対応する。したがって、このゆっくりと変動する成分が無限に分割されることは望ましくない。この問題を解決するひとつの方法は、関数系  $\{T_{k/2^j} \mathcal{D}_{1/2^j} \psi\}_{k \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}_-}$ ,  $\mathbb{Z}_- := \{n \in \mathbb{Z} \mid n < 0\}$  で張られる閉部分空間を、スケーリング関数と呼ばれるひとつの関数  $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $\|\varphi\| = 1$  を整数だけ平行移動して得られる別の関数系  $\{T_k \varphi\}_{k \in \mathbb{Z}}$  で張り替えること、つまり正規直交基底を取り替えることである。このスケーリング関数  $\varphi$  の持つ性質を研究することにより、スケーリング関数を構成すればスケーリング関数からウェーブレット関数が構成できることが示され、多重解像度解析という枠組みにまとめられた。

## 4 ユニウェーブレットからマルチウェーブレットへ

最も有名なウェーブレット正規直交基底は Daubechies のウェーブレット [21] であろう。Daubechies のウェーブレットは実数値のコンパクトサポートを持つ正規直交基底であり、任意の自然数  $N \geq 2$  に対し、適当にウェーブレット関数  $N\psi$  を構成すれば、サポート幅は  $2N - 1$  であり、 $r(N)$  次のヘルダー正則性<sup>4</sup>と  $N - 1$  次までの消失モーメントを持つようにできる。この  $r(N)$  は、十分大きな  $N$  に対し、

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} N^{-1}r(N) = 1 - (\log 3)/(2 \log 2) \simeq 0.2075$$

であることが知られている。Daubechies のウェーブレットは、数値計算を用いた応用上は非常に有用であったが、対称性をもたなかった。画像処理などの一部の分野では、この対称性が重要な意味を持つ。そこで、次の問題が考えられた。

- ある程度のヘルダー正則性とバニシングモーメントをもち、実数値でコンパクトサポートを持つ対称なウェーブレット正規直交基底を構成することができるか。

この問題は否定的に解決された。例えば、[21], p. 317, 定理 8.1.4 をみよ。その後、上の問題の条件のどれかあきらめて、ウェーブレットを構成する研究がなされた。複素数値を許した Lawton のウェーブレット [14] や正規直交基底をあきらめた双直交 (biorthogonal) ウェーブレット [21], 8.3 節 などである。これ以前に構成されていたウェーブレットでは、不連続性を許した Haar のウェーブレット、コンパクトサポートでない場合には Meyer のウェーブレット [15], p. 75, third example of one-dimensional wavelets などがある。

このような流れとは別に、[2] のように、ウェーブレット正規直交基底をひとつのウェーブレット関数から生成するのではなく、複数のウェーブレット関数、つまり、ベクトル値のウェーブレット関数を使って、整数だけの平行移動と伸張因子 2 だけで生成される正規直交基底を構成したとすればどのようなメリットを持つかが考えられた。

### 多重解像度解析

いろいろなウェーブレットの構成を統一的に説明する Mallat の多重解像度解析のマルチウェーブレットへの拡張を述べよう。

**定義 3** 次の条件を満たす  $L^2(\mathbb{R})$  の閉部分空間の列  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  を多重解像度解析 (multiresolution approximation, multiresolution analysis, MRA) と呼ぶ。

<sup>4</sup> $\mathbb{R}$  上で定義された関数  $f$  が  $x = x_0$  でヘルダー指数  $\alpha \geq 0$  であるとは、 $x_0$  に依存して決まる正数  $K$  と  $m = [\alpha]$  次 ( $[\alpha]$  は  $\alpha$  を超えない最大の整数を表すガウス記号) の多項式  $P(x)$  があって、 $|f(x) - P(x)| \leq K|x - x_0|^\alpha$ ,  $x \in \mathbb{R}$  が成り立つときをいう。さらに、正数  $K$  を  $x_0 \in [a, b]$  によらないようにとれるとき、 $f$  は閉区間  $[a, b]$  上で一様にヘルダー指数  $\alpha$  であるという。このようなヘルダー指数  $\alpha$  の上限をそれぞれ、 $x = x_0$  における、あるいは、 $[a, b]$  上での、ヘルダー正則性という。

- (a)  $\cdots \subset V_{j-1} \subset V_j \subset V_{j+1} \subset \cdots$  ( $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  は増大列であるという),
- (b)  $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$ ,
- (c)  $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$ ,
- (d)  $f(x) \in V_j \iff f(2x) \in V_{j+1}$ ,
- (e) 関数  $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in V_0$ ,  $r \geq 2$  が存在して,  $\{T_k \varphi_l\}_{k \in \mathbb{Z}, 1 \leq l \leq r}$  は  $V_0$  の正規直交基底となる.

整数  $j$  をスケールと呼ぶ. 多重解像度解析  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  が  $r$  次正則であるとは,  $\varphi_l \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R})$ ,  $l = 1, \dots, r$  が成り立つことをいう. (e) より,

$$f(x) \in V_0 \iff \forall k \in \mathbb{Z}; T_k f \in V_0$$

であり, (d) と (e) より,

$$V_j = \overline{\text{Span} \{T_{k/2^j} \mathcal{D}_{1/2^j} \varphi_l\}_{k \in \mathbb{Z}, 1 \leq l \leq r}}$$

が成り立つ.

## マルチウェーブレット

**定義 4** 複数個のスケール関数  $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ ,  $r \geq 2$  から構成される複数個のウェーブレット関数  $\psi_1, \dots, \psi_r$  を伸張し, 平行移動した関数系  $\{T_{k/2^j} \mathcal{D}_{1/2^j} \psi_l\}_{k, j \in \mathbb{Z}, 1 \leq l \leq r}$  が  $L^2(\mathbb{R})$  の正規直交基底を成すとき, それら複数個のスケール関数とウェーブレット関数をそれぞれマルチスケール関数, マルチウェーブレット関数といい, 正規直交基底を成す関数を単にマルチウェーブレット<sup>5</sup>(multiwavelets) という.

複数個のスケール関数から構成されるかどうかとは無関係に, 単に複数個のウェーブレット関数を伸張し, 平行移動した関数系から正規直交基底が構成できる場合にマルチウェーブレットという流儀もある. スケール関数の個数, すなわちマルチウェーブレット関数の個数  $r$  を多重度<sup>6</sup>(multiplicity) という. 伸張因子が  $M \geq 2$  のとき, 1 個のスケール関数から  $M - 1$  個の  $M$ -band wavelet と呼ばれるウェーブレット関数が構成されたり,  $n$  変数の場合には, 伸張因子が 2 のときであっても  $r$  個のマルチスケール関数から  $(2^n - 1)r$  個のマルチウェーブレット関数が構成されたりするので, スケール関数の個数とウェーブレット関数の個数との関係は単純ではない. マルチウェーブレットの定義で  $r = 1$  の場合が通常のウェーブレットであり, 形式的には通常のウェーブレットをマルチウェーブレットに含めることができるが, ここではこれらを比較するため, 通常のウェーブレットをユニウェーブレットと呼び, 区別して扱う.

<sup>5</sup>マルチウェーブレットという言葉が使われたのは, MathSciNet で検索する限り文献 [1] が最初であろう. そこでは “multi-wavelet” とハイフンが入っている.

<sup>6</sup>文献 [11] で使われている. この論文ではマルチウェーブレットという言葉は使われていないが, マルチウェーブレットを扱っている.

## ベクトル・行列記法による表現形式

マルチスケリング関数とマルチウェーブレット関数をそれぞれ並べて  $r$  次元列ベクトル値関数

$$\Phi := [\varphi_1, \dots, \varphi_r]^T, \quad \Psi := [\psi_1, \dots, \psi_r]^T$$

を定義する。  $T$  は行列の転置を表す。ここでは  $\Phi, \Psi$  が列ベクトルであることを表している。また、平行移動、変調、伸張作用素やフーリエ変換と逆フーリエ変換などの作用素は、ベクトル値関数に対して、例えば  $D_a \Phi = [D_a \varphi_1, \dots, D_a \varphi_r]^T$ ,  $\widehat{\Phi} = [\widehat{\varphi}_1, \dots, \widehat{\varphi}_r]^T$  のように、成分ごとに作用するものとする。このようなベクトル記法をうまく導入することによって、マルチウェーブレットはユニウェーブレットのベクトル値関数バージョンのように扱える。実際、マルチスケリング関数が満たす伸張方程式 (dilation equation) は、

$$\varphi_l = \sum_{k \in \mathbb{Z}, 1 \leq m \leq r} \langle \varphi_l, T_{k/2} D_{1/2} \varphi_m \rangle T_{k/2} D_{1/2} \varphi_m, \quad 1 \leq l \leq r \quad (8)$$

であるが、正規直交基底による展開は和の順序をどのように変えてもよい<sup>7</sup>ので、ベクトル・行列記法が使えるように和の順序を変えると、

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} H_k T_{k/2} D_{1/2} \Phi, \\ H_k &:= [\langle \varphi_l, T_{k/2} D_{1/2} \varphi_m \rangle]_{1 \leq l, m \leq r} \in \mathbb{C}^{r \times r} \end{aligned} \quad (9)$$

と表せる。内積の記号を流用して、 $r$  次元列ベクトル値関数  $F_1, F_2$  に対して、

$$\langle F_1, F_2 \rangle := \int_{\mathbb{R}} F_1(x) F_2(x)^* dx$$

と定義する。ここで  $F_2(x)^*$  は  $F_2(x)$  の複素共役転置を表すから  $F_1(x) F_2(x)^*$  は  $r \times r$  行列である。また、積分は行列の成分ごとに行うものと解釈する。このとき、 $H_k = \langle \Phi, T_{k/2} D_{1/2} \Phi \rangle$  と表現できるから、伸張方程式 (9) は

$$\Phi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \Phi, T_{k/2} D_{1/2} \Phi \rangle T_{k/2} D_{1/2} \Phi$$

と表すことができ、ユニウェーブレットと同じ形式で表現できる。行列は一般に零因子<sup>8</sup>を持ち、非可換<sup>9</sup>のため、伸張方程式の扱いはユニウェーブレットに比べて難しい。

<sup>7</sup>このことを正規直交基底は無条件基底であると表現できる。一般に、バナッハ空間  $B$  の元  $x_n \in B$  の級数  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  が無条件収束 (unconditional convergence) するとは、和の順序をどのように変えても級数の和の値が不変であるときをいう。バナッハ空間  $B$  の基底  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  が無条件基底 (unconditional basis) であるとは、任意の元  $x \in B$  に対して、 $x$  の基底  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  に関する展開  $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n b_n$ ,  $\alpha_n \in \mathbb{C}$  が無条件収束するときをいう。このことに関連して、ウェーブレット正規直交基底はバナッハ空間  $L^p(\mathbb{R})$ ,  $0 < p < \infty$  等でも無条件基底となるのかという問題がある。詳しくは [12] を参照せよ。

<sup>8</sup> $A, B \neq 0$  で  $AB = 0$  を満たす  $A, B$  を零因子 (zero divisor) と呼ぶ。

<sup>9</sup> $AB \neq BA$  のとき  $A, B$  は非可換 (noncommutative) であるという。

## 伸張方程式とウェーブレット方程式

伸張方程式 (9) をフーリエ変換すると, 項別にフーリエ変換してよいとして (例えば係数行列  $H_k$  が有限個を除いて零行列ならばよい) 交換関係 (1), (2) を使うと,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\Phi](\xi) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}[H_k T_{k/2} \mathcal{D}_{1/2} \Phi](\xi) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} H_k \mathcal{M}_{-k/2} \mathcal{D}_2 \mathcal{F}[\Phi](\xi) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} H_k e^{-i(k/2)\xi} 2^{-1/2} \mathcal{F}[\Phi](\xi/2)\end{aligned}\quad (10)$$

となる.

$$M_0(\xi) := 2^{-1/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} H_k e^{-ik\xi}$$

とおく.  $M_0(\xi)$  はローパスフィルタと呼ばれる. 等式 (10) に  $\xi \rightarrow 2\xi$  を代入すると, 伸張方程式のフーリエ領域における表現

$$\widehat{\Phi}(2\xi) = M_0(\xi) \widehat{\Phi}(\xi) \quad (11)$$

を得る.  $M_0$  は次の補題 1 を満たす.

**補題 1** ローパスフィルタ  $M_0(\xi)$  は

$$M_0(\xi) M_0(\xi)^* + M_0(\xi + \pi) M_0(\xi + \pi)^* \equiv I_r \quad (12)$$

を満たす<sup>10</sup>. ただし,  $M_0^*$  は  $M_0$  の複素共役転置,  $I_r$  は  $r$  次単位行列である.

この証明には次の補題 2 を使う.

**補題 2** 関数列  $\{T_k \varphi_l\}_{k \in \mathbb{Z}, 1 \leq l \leq r}$  が正規直交系である必要十分条件は

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{\Phi}(\xi + 2\pi k) \widehat{\Phi}(\xi + 2\pi k)^* \equiv I_r \quad (13)$$

である.

ウェーブレット方程式は

$$\Psi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} G_k T_{k/2} \mathcal{D}_{1/2} \Phi, \quad (14)$$

$$G_k := [\langle \psi_l, T_{k/2} \mathcal{D}_{1/2} \varphi_m \rangle]_{1 \leq l, m \leq r} \in \mathbb{C}^{r \times r}$$

であり,

$$M_1(\xi) := 2^{-1/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} G_k e^{-ik\xi}$$

とおくと, そのフーリエ領域における表現は

$$\widehat{\Psi}(2\xi) = M_1(\xi) \widehat{\Phi}(\xi) \quad (15)$$

である. このとき, 次の補題 3 が成り立つ.

<sup>10</sup>記号 “ $\equiv$ ” はほとんどすべての  $\xi \in \mathbb{R}$  に対して等しいことを表す.



補題 3 関数系  $\{T_k\varphi_l, T_k\psi_l\}_{k \in \mathbb{Z}, 1 \leq l \leq r}$  (ただし  $\varphi_l \neq T_k\psi_l$  とする) が正規直交系となるための必要十分条件は,  $M_0(\xi)$  と  $M_1(\xi)$  から作られる  $2r \times 2r$  行列

$$M(\xi) := \begin{bmatrix} M_0(\xi) & M_0(\xi + \pi) \\ M_1(\xi) & M_1(\xi + \pi) \end{bmatrix} \quad (16)$$

がほとんどすべての  $\xi$  に対してユニタリ行列になることである.

特にすべての成分が三角多項式<sup>11</sup>であるような正方行列  $M(\xi)$  がこの性質を持つとき,  $M(\xi)$  はパラユニタリ (paraunitary) であるといわれる.  $r$  次の単位行列と零行列をそれぞれ  $I_r, O_r$  と表す.  $M(\xi)$  の複素共役転置を  $M(\xi)^*$  とすると,

$$M(\xi)^* = \begin{bmatrix} M_0(\xi)^* & M_1(\xi)^* \\ M_0(\xi + \pi)^* & M_1(\xi + \pi)^* \end{bmatrix}$$

であるから,  $M(\xi)M(\xi)^* = I_{2r}$  をブロックごとに計算して,  $M(\xi)$  がほとんどすべての  $\xi$  に対してユニタリ行列になる必要十分条件は

$$\begin{aligned} M_0(\xi)M_0(\xi)^* + M_0(\xi + \pi)M_0(\xi + \pi)^* &\equiv I_r, \\ M_1(\xi)M_1(\xi)^* + M_1(\xi + \pi)M_1(\xi + \pi)^* &\equiv I_r, \\ M_0(\xi)M_1(\xi)^* + M_0(\xi + \pi)M_1(\xi + \pi)^* &\equiv O_r, \end{aligned} \quad (17)$$

$$M_1(\xi)M_0(\xi)^* + M_1(\xi + \pi)M_0(\xi + \pi)^* \equiv O_r \quad (18)$$

であることがわかる. 式 (17) の複素共役転置は式 (18) だから, これら二式は同値である.

### マルチウェーブレット関数の構成

補題 3 より, マルチスケール関数からマルチウェーブレット関数を構成するには,  $M(\xi)$  がほとんどすべての  $\xi$  に対してユニタリ行列になるような  $M_1(\xi)$  を構成し, ウェーブレット方程式のフーリエ領域における表現 (15) を使ってマルチウェーブレット関数を定義すれば, 多重解像度解析が満たす条件: 定義 3 の (b), (c) によって, 関数系  $\{T_{k/2^j}D_{1/2^j}\psi_l\}_{k, j \in \mathbb{Z}, 1 \leq l \leq r}$  が正規直交基底であることが示せる. このとき, マルチスケール関数と同程度の滑らかさや無限遠方での減少度を持つようなマルチウェーブレット関数を構成するためには,  $M_1(\xi)$  は無限回微分可能 (例えば  $M_1(\xi)$  の各成分が三角多項式) であればよい. 1 変数のユニウェーブレットの場合は簡単であったが, マルチウェーブレットや多変数のユニウェーブレットの場合は考察が必要である. 無限回微分可能な  $M_1(\xi)$  のひとつの構成方法は文献 [4], p. 268, Theorem 1 に与えられている. このようにして, 一般存在定理とよばれる次の定理 2 が成り立つ. 詳しい証明は [5], p. 29, Theorem 1 を参照せよ.

<sup>11</sup>フーリエ係数が有限個を除いて 0 であるフーリエ級数を三角多項式 (trigonometric polynomial) という.

定理 2  $r$  次正則多重解像度解析  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  が与えられれば,  $r$  次正則マルチウェーブレット関数を構成できる.

マルチウェーブレットの場合は  $r^2$  個の成分を持つ行列  $M_0(\xi), M_1(\xi)$  を構成することになり, ユニウェーブレットの場合に比べて満たすべき連立方程式の数が増えるが自由度も増えることになる. ユニウェーブレットの場合には同時に持つことが不可能であった性質を持ったマルチウェーブレットがこの増えた自由度を使って設計できる. 文献 [2] は, 0 次のバニシングモーメント (バニシングモーメントの定義は文献 [20], p. 64, 7.2 節を参照) しか持たない Haar ウェーブレットを一般化して, 任意に与えられたの次数までのバニシングモーメントを持つ不連続なマルチウェーブレットを設計した. また, 文献 [21], p. 317, 定理 8.1.4 で証明されているように, 実数値の連続関数でコンパクトサポートと対称性を持ったユニウェーブレットを構成することは不可能であるが, 文献 [10], [8] ではこれらの性質をすべてを持ったマルチウェーブレットを設計した.

### 離散マルチウェーブレット変換

関数系  $\{T_k \varphi_l\}_{k \in \mathbb{Z}, 1 \leq l \leq r}, \{T_k \psi_l\}_{k \in \mathbb{Z}, 1 \leq l \leq r}, \{T_{k/2} \mathcal{D}_{1/2} \varphi_l\}_{k \in \mathbb{Z}, 1 \leq l \leq r}$  はユニウェーブレットと同様に正規直交系であり, それぞれの正規直交系で生成される閉部分空間をそれぞれ  $V_0, W_0, V_1$  とおくと,  $V_1$  は  $V_0$  と  $W_0$  の直交直和<sup>12</sup>に分解できる. これを  $V_1 = V_0 \oplus W_0$  と表す. したがって, 関数系  $\{T_{k/2} \mathcal{D}_{1/2} \varphi_l\}_{k \in \mathbb{Z}, 1 \leq l \leq r}$  と  $\{T_k \varphi_l, T_k \psi_l\}_{k \in \mathbb{Z}, 1 \leq l \leq r}$  は  $V_1$  の異なる正規直交基底である. 関数  $f \in V_1$  をこれら二組の異なる正規直交基底で表現すれば,

$$\begin{aligned} f &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, T_{k/2} \mathcal{D}_{1/2} \Phi \rangle T_{k/2} \mathcal{D}_{1/2} \Phi \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} (\langle f, T_m \Phi \rangle T_m \Phi + \langle f, T_m \Psi \rangle T_m \Psi) \end{aligned} \quad (19)$$

となる. ただし, ここでも内積の記号を流用して, 関数  $f$  と列ベクトル値関数  $F = [f_1, \dots, f_r]^T$  に対して,

$$\langle f, F \rangle := \int_{\mathbb{R}} f F(x)^* dx = [\langle f, f_1 \rangle, \dots, \langle f, f_r \rangle]$$

と定義する. 伸張方程式と同様にして,

$$T_m \Phi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle T_m \Phi, T_{k/2} \mathcal{D}_{1/2} \Phi \rangle T_{k/2} \mathcal{D}_{1/2} \Phi$$

と表せるが, この係数は

$$\begin{aligned} \langle T_m \Phi, T_{k/2} \mathcal{D}_{1/2} \Phi \rangle &= \langle \Phi, T_{-m} T_{k/2} \mathcal{D}_{1/2} \Phi \rangle \\ &= \langle \Phi, T_{(k-2m)/2} \mathcal{D}_{1/2} \Phi \rangle = H_{k-2m} \end{aligned}$$

<sup>12</sup> $L^2(\mathbb{R})$  の閉部分空間  $V$  と  $W$  が  $V \perp W$  を満たすとき, 集合  $\{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid f = v + w, v \in V, w \in W\}$  を  $V$  と  $W$  の直交直和 (orthogonal sum) と呼ぶ.

であるから,

$$\mathcal{T}_m \Phi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} H_{k-2m} \mathcal{T}_{k/2} \mathcal{D}_{1/2} \Phi, \quad (20)$$

$$\mathcal{T}_m \Psi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} G_{k-2m} \mathcal{T}_{k/2} \mathcal{D}_{1/2} \Phi \quad (21)$$

が成り立つ。したがって,

$$(H_{k-2m} \mathcal{T}_{k/2} \mathcal{D}_{1/2} \Phi)^* = (\mathcal{T}_{k/2} \mathcal{D}_{1/2} \Phi)^* H_{k-2m}^*$$

に注意すると,

$$\begin{aligned} \langle f, \mathcal{T}_m \Phi \rangle &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, H_{k-2m} \mathcal{T}_{k/2} \mathcal{D}_{1/2} \Phi \rangle \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \mathcal{T}_{k/2} \mathcal{D}_{1/2} \Phi \rangle H_{k-2m}^* \end{aligned} \quad (22)$$

を得る。同様にして

$$\langle f, \mathcal{T}_m \Psi \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \mathcal{T}_{k/2} \mathcal{D}_{1/2} \Phi \rangle G_{k-2m}^* \quad (23)$$

を得る。複素数  $x_n$  から成る無限数列  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  で条件  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|^2 < +\infty$  を満たすものの全体の成す数列空間を  $\ell^2(\mathbb{Z})$  と表し,  $r$  次行ベクトル  $\mathbf{x}_n := [(x_1)_n, \dots, (x_r)_n] \in \mathbb{C}^r$  から成る無限ベクトル列  $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  で, 各成分の成す無限数列  $((x_l)_n)_{n \in \mathbb{Z}}, 1 \leq l \leq r$  が  $\ell^2(\mathbb{Z})$  に属するものの全体の成す数列空間を  $\ell^2(\mathbb{Z})^r$  と表す。等式 (22), (23) から離散マルチウェーブレット変換が次の定義 5 のように定義される。

**定義 5** 次式 (24) で定義される  $\ell^2(\mathbb{Z})^r$  から  $(\ell^2(\mathbb{Z})^r)^2$  への写像を離散マルチウェーブレット変換 (discrete multiwavelet transform) という。

$$\begin{aligned} \ell^2(\mathbb{Z})^r \ni (\tilde{\mathbf{a}}_k)_{k \in \mathbb{Z}} &\mapsto [(\mathbf{a}_m)_{m \in \mathbb{Z}}, (\mathbf{d}_m)_{m \in \mathbb{Z}}] \in (\ell^2(\mathbb{Z})^r)^2, \\ \mathbf{a}_m &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{\mathbf{a}}_k H_{k-2m}^*, \quad \mathbf{d}_m = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{\mathbf{a}}_k G_{k-2m}^*. \end{aligned} \quad (24)$$

また, 等式 (19) の右辺の第一項と第二項にそれぞれ等式 (20), (21) を代入して係数を比較すると,

$$\begin{aligned} \langle f, \mathcal{T}_{k/2} \mathcal{D}_{1/2} \Phi \rangle \\ = \sum_{m \in \mathbb{Z}} (\langle f, \mathcal{T}_m \Phi \rangle H_{k-2m} + \langle f, \mathcal{T}_m \Psi \rangle G_{k-2m}) \end{aligned} \quad (25)$$

を得る。等式 (25) から逆離散マルチウェーブレット変換が次の定義 6 のように定義される。

**定義 6** 次式 (26) で定義される  $(\ell^2(\mathbb{Z})^r)^2$  から  $\ell^2(\mathbb{Z})$  への写像を逆離散マルチウェーブレット変換 (inverse discrete multiwavelet transform) という。

$$\begin{aligned} (\ell^2(\mathbb{Z})^r)^2 \ni [(\mathbf{a}_m)_{m \in \mathbb{Z}}, (\mathbf{d}_m)_{m \in \mathbb{Z}}] &\mapsto (\tilde{\mathbf{a}}_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})^r, \\ \tilde{\mathbf{a}}_k &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \{\mathbf{a}_m H_{k-2m} + \mathbf{d}_m G_{k-2m}\}. \end{aligned} \quad (26)$$

## 5 マルチスケーリング関数の構成

これまではマルチスケーリング関数が与えられたとして、マルチウェーブレット関数を構成する一般論を述べた。ここでは、係数行列  $H_k$  が有限個を除いて零行列の場合、つまり  $M_0(\xi)$  の成分が三角多項式の場合にマルチスケーリング関数をどのように構成するかを扱う。

これには、ユニウェーブレットの構成法を一般化する。等式 (12) を満たす  $M_0(\xi)$  があったとして、伸張方程式 (11) を繰り返し使って、

$$\begin{aligned}\widehat{\Phi}(\xi) &= M_0(\xi/2)\widehat{\Phi}(\xi/2) \\ &= M_0(\xi/2)M_0(\xi/2^2)\widehat{\Phi}(\xi/2^2) \\ &= \prod_{n=1}^N M_0(\xi/2^n)\widehat{\Phi}(\xi/2^N)\end{aligned}$$

を得る。無限乗積の収束は問題にせずに、 $N \rightarrow +\infty$  とすると、形式的には

$$\widehat{\Phi}(\xi) = \prod_{n=1}^{\infty} M_0(\xi/2^n)\widehat{\Phi}(0)$$

を得る。第一の問題は  $\widehat{\Phi}(0) \neq 0$  がどんなベクトルであるべきかということである。伸張方程式 (11) に  $\xi = 0$  を代入すると、 $M(0)\widehat{\Phi}(0) = \widehat{\Phi}(0)$  を得るから、 $\widehat{\Phi}(0)$  は行列  $M(0)$  の固有値 1 に関する固有ベクトルであることがわかる。この固有ベクトルを  $\widehat{\Phi}_0$  と表す。第二の問題は、関数  $\Phi$  を無限乗積

$$\widehat{\Phi}(\xi) := \prod_{n=1}^{\infty} M_0(\xi/2^n)\widehat{\Phi}_0 \quad (27)$$

によって定義したとき、 $\Phi$  がマルチスケーリング関数になる、すなわち、 $\Phi$  が式 (13) を満たすような  $M_0(\xi)$  を探すことである。行列は零因子を持つので  $M_0(\xi)$  の零点<sup>13</sup>から  $\widehat{\Phi}(\xi)$  の零点がどのように決まるかは自明ではない。行列は非可換なので積の順序も考慮する必要がある。式 (27) によって定義された関数  $\Phi$  が、マルチスケーリング関数になるための  $M_0$  に対する必要十分条件が文献 [18], p. 214, Theorem 6 に与えられている。ユニウェーブレットの場合には、この必要十分条件は文献 [21], p. 231, 定理 6.3.1 と p. 240, 定理 6.3.4 でそれぞれ与えられた Cohen 条件あるいは Lawton 条件と呼ばれている条件に相当する。

<sup>13</sup>一般に、関数  $f(x)$  に対して、 $f(x) = 0$  を満たす  $x$  を  $f(x)$  の零点 (zero) という。

## 6 マルチウェーブレットの例

まず、マルチスケーリング関数の例として、文献 [10] によるマルチスケーリング関数と文献 [8] によるマルチウェーブレット関数<sup>14</sup>を取り上げる。伸張方程式は

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^3 H_k \begin{bmatrix} \sqrt{2} \varphi_1(2x - k) \\ \sqrt{2} \varphi_2(2x - k) \end{bmatrix}$$

であり、それぞれの係数行列は、

$$H_0 = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 6\sqrt{2} & 16 \\ -1 & -3\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad H_1 = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 6\sqrt{2} & 0 \\ 9 & 10\sqrt{2} \end{bmatrix},$$

$$H_2 = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 9 & -3\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad H_3 = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

で与えられる。GHM マルチスケーリング関数と DGHM マルチウェーブレット関数は第 1 図のようになる。これらの関数は実数値の連続関数であって対称性と短いサポートを持ち、正規直交基底を生成する。

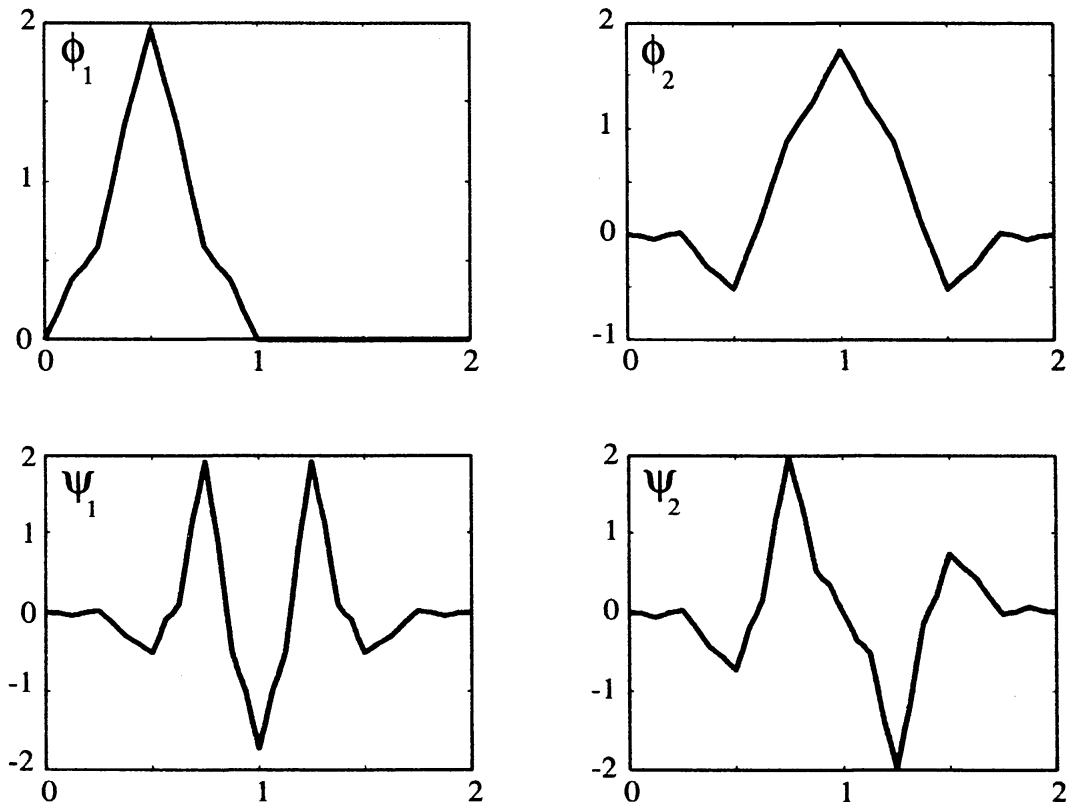


図 1: GHM マルチスケーリング関数と対応する DGHM マルチウェーブレット関数。

<sup>14</sup>このマルチウェーブレットに関しては、マルチスケーリング関数とそれに対応するマルチウェーブレット関数が別々の論文で与えられた。

次に、文献 [7] によるマルチウェーブレットとスケーリング関数の例を述べる。サポート幅  $N = 2$  の場合には、伸張方程式は

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^2 H_k \begin{bmatrix} \sqrt{2} \varphi_1(2x - k) \\ \sqrt{2} \varphi_2(2x - k) \end{bmatrix}$$

であり、それぞれの係数行列は、

$$H_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -\sqrt{7}/4 & -\sqrt{7}/4 \end{bmatrix}, \quad H_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix},$$

$$H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ \sqrt{7}/4 & -\sqrt{7}/4 \end{bmatrix}$$

であり、CL2 マルチスケーリング関数と CL2 マルチウェーブレット関数は第 2 図のようになる。CL2 マルチスケーリング関数  $\varphi_2$  の積分平均は 0、すなわち

$$\widehat{\varphi}_2(0) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_2(x) dx = 0$$

が成り立つ。積分平均 0 はウェーブレット関数が満たす性質である。ユニウェーブレットの場合には、スケーリング関数  $\varphi$  の積分平均は 0 にはなり得ない。実際、文献 [23], p. 51, 定理 1.7 によれば、 $|\widehat{\varphi}(\xi)|$  が  $\xi = 0$  で連続のとき、 $\widehat{\varphi}(0) \neq 0 \iff \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j = L^2(\mathbb{R})$  が成り立つからである。

今まで述べてきたマルチウェーブレットを考える理由は、複数のスケーリング関数あるいはウェーブレット関数を扱うことによって増える自由度を使って、ユニウェーブレットでは不可能であった性質を実現するためであった。他の理由として、分解に使う関数が増えるためユニウェーブレットではできなかった分解ができることが挙げられる。関数空間  $L^2(\mathbb{R})$  が  $r$  個の閉部分空間の直交直和で  $L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{l=1}^r L_l$  と表されているとする。このとき、それぞれの閉部分空間  $L_l, 1 \leq l \leq r$  にユニウェーブレット  $\psi_l$  からなる正規直交基底  $\{T_{k/2^j} D_{1/2^j} \psi_l\}_{k,j \in \mathbb{Z}}$  を構成したいと考えることは自然である。この場合、 $\{T_{k/2^j} D_{1/2^j} \psi_l\}_{k,j \in \mathbb{Z}, 1 \leq l \leq r}$  は  $L^2(\mathbb{R})$  の正規直交基底を成す、すなわち  $\psi_l, 1 \leq l \leq r$  が  $L^2(\mathbb{R})$  のマルチウェーブレット関数になる。このような閉部分空間  $L_l, 1 \leq l \leq r$  の例として、古典的ハーディ空間  $H^2(\mathbb{R}_{\pm})$  がある。

$$H^2(\mathbb{R}_{\pm}) := \{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \pm \xi \leq 0 \text{ のとき } \widehat{f}(\xi) \equiv 0\}$$

で定義すると、 $L^2(\mathbb{R}) = H^2(\mathbb{R}_+) \oplus H^2(\mathbb{R}_-)$  である。関数  $\psi_{\pm}$  を  $\widehat{\psi}_{\pm} = \chi_{[\pm 2\pi, \pm 4\pi]}$  で定義する。ここで、 $\chi_{[a,b]}$  は閉区間  $[a,b]$  の特性関数を表す。すなわち、 $\xi \in [a,b]$  のとき  $\chi_{[a,b]}(\xi) = 1$  であり、 $\xi \notin [a,b]$  のとき  $\chi_{[a,b]}(\xi) = 0$  である。このとき、関数  $\psi_{\pm}$  はそれぞれ  $H^2(\mathbb{R}_{\pm})$  のユニウェーブレット関数となる。文献 [3], p. 118, Theorem 1 によれば  $\Psi := [\psi_+, \psi_-]^T$  はマルチウェーブレット関数であって、任意の  $f \in L^2(\mathbb{R})$  に対して、

$$P_{\pm} f := \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, T_{k/2^j} D_{1/2^j} \psi_{\pm} \rangle T_{k/2^j} D_{1/2^j} \psi_{\pm}$$

と定義すると、 $P_{\pm} f(x)$  はそれぞれ上半平面  $\{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}$  と下半平面  $\{z \in \mathbb{C} \mid \Im z < 0\}$  に解析接続できる。文献 [3] では、このマルチウェーブレットを多次元の場合に拡張し、画像から方向を持った特異性（線分）を分離した。

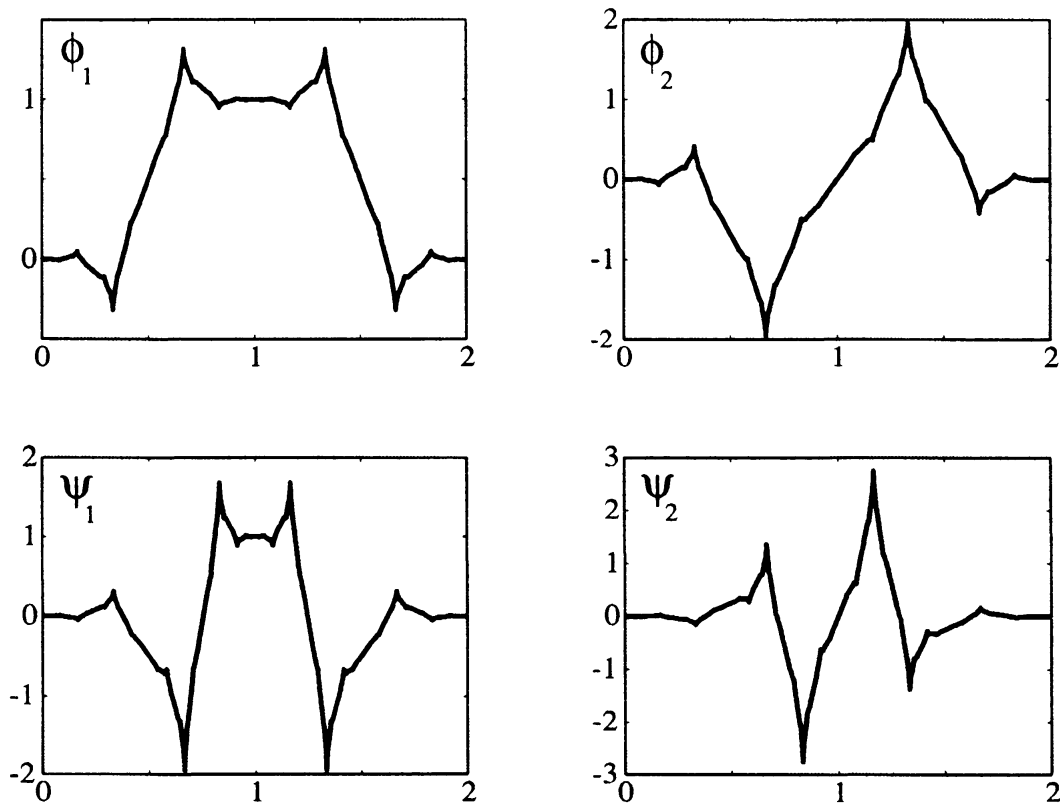


図 2: CL2 マルチスケーリング関数と CL2 マルチウェーブレット関数.

## 7 マルチウェーブレットの応用

本論文で紹介したマルチウェーブレットに限って応用について説明する. 文献 [2] の Alpert マルチウェーブレットは閉区間  $[0, 1]$  上で正規直交基底を成し, 不連続ではあるが高次までのバニシングモーメントを持つため, 積分方程式や微分方程式をマルチウェーブレット基底で行列表現すると, 疎な行列で表現される. したがって逐次近似法などで解く場合には収束が速い. 文献 [9] には Alpert マルチウェーブレットの量子化学計算への応用が述べられていて興味深い. 文献 [8] の DGHM マルチウェーブレットは連続で短いサポートを持ち, 画像処理において重要とされる対称性を持つ. 文献 [19] では画像処理に関して文献 [7] の CL マルチウェーブレットや Daubechies 4 ユニウェーブレットなどと比較され, DGHM のマルチウェーブレットは良い結果を得ている.

### 前処理と後処理

最後に離散マルチウェーブレット変換を行う上で重要となる前処理 (pre-processing) と後処理 (post-processing) について述べる. 離散マルチウェーブレット変換を定義する式 (24), (26) では,  $r$  次元行ベクトルから成るデータ列  $(\tilde{a}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  を同じ構造を持った近似  $(\mathbf{a}_m)_{m \in \mathbb{Z}}$  と詳細  $(\mathbf{d}_m)_{m \in \mathbb{Z}}$  に分解する. したがって, 扱う 1 次元データ列を  $r$  次元行ベクトルから成るデータ列にうまく処理して分配するフィルタが必要

不可欠となる。このフィルタをマルチウェーブレットのプレフィルタ (pre-filter) という。また、プレフィルタで処理されたデータ列を離散マルチウェーブレット変換すると、 $r$ 次元行ベクトルから成る近似と詳細が得られるが、通常はこれらの展開係数に対して何らかの処理を施す。その処理した近似と詳細を逆離散マルチウェーブレット変換すると $r$ 次元行ベクトルから成るデータ列が得られる。このデータ列をプレフィルタで処理される前のデータ列と同じ構造を持った1次元データ列に戻すフィルタをポストフィルタ (post-filter) という。プレフィルタは、 $r$ 個のスケーリング関数の取り方に依存してうまく設計することが重要である。例えばCL2のマルチスケーリング関数 $\varphi_2$ の積分平均は0なので、ユニウェーブレットのスケーリング関数と同じ扱いはできない。実際、文献 [20], p 84, 最後の段落に述べられているように、ユニウェーブレットの高速ウェーブレット変換は、次の1点クアドラチュア公式：

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x) dx \approx f(0), \quad \int_{\mathbb{R}} f(x)\psi(x) dx \approx 0$$

を使っているとみなせるが、 $\varphi, \psi$  のサポート上で  $f$  の変化が非常に小さい場合には、これらの1点クアドラチュア公式は $\varphi$ の積分平均が1、 $\psi$ の積分平均が0であるということから導ける。文献 [16] では、DGHM マルチウェーブレットの新しいプレフィルタを提案し、既存のプレフィルタと比較検討している。また文献 [17] では、解析する離散データに適用してある意味で最適化されるようなマルチウェーブレット・ニューラルネットワークを用いた前処理を提案している。

## 8 おわりに

これまで述べたことに補足を加えてまとめると以下のようなになる。

### ユニとマルチウェーブレットとの類似点

複数個の関数を並べてベクトル値関数を作り適当なベクトル記法を導入すると、形式的にはユニウェーブレットと同様な議論ができる。ただし、ベクトル記法のおかげで単独の方程式に見えても実際には連立方程式であり、行列を係数に持つ式を扱うので注意が必要である。

### ユニとマルチウェーブレットとの相違点

離散マルチウェーブレット変換に入力するデータ列は $r$ 次元行ベクトルであり、出力されるデータ列は二組の $r$ 次元行ベクトルである。ユニウェーブレットは $r=1$ の場合になる。扱うデータ列は1次元データ列であるため、前処理と後処理が必要になる。マルチウェーブレットに応じてこれらの処理をうまく行えば、パフォーマンスの向上が期待できる。



## マルチウェーブレットの構成法

マルチスケーリング関数の構成がユニウェーブレットの場合よりも複雑で難しくなる。マルチスケーリング関数が与えられたらマルチウェーブレットを構成する一般的な方法がある。

## マルチウェーブレットの必要性

ユニウェーブレットでは不可能であった性質を実現することができる。分解に使う関数を増やすことによりユニウェーブレットではできなかった細かい分解ができる。

## マルチウェーブレットの応用

Haar ウェーブレットを使っている場合などに、さらにバニシングモーメントが必要であれば Alpert マルチウェーブレットを使う。画像処理のように Daubechies ウェーブレットでは実現できなかった対称性が必要であれば DGHM マルチウェーブレットを使う。このように、特定の応用に適するいろいろなマルチウェーブレットが構成されている。

## 9 インターネットリソース

MATLAB 上で動くフリーのマルチウェーブレットプログラムについて紹介する。

- ▷ Fritz Keinert の著書 Wavelets and Multiwavelets<sup>15</sup> の Software: mw のページ：  
Software: mw (A toolbox of Matlab subroutines is made available with the book)  
<http://orion.math.iastate.edu/keinert/book.html>
- ▷ MATLAB CENTRAL の File Exchange > Signal Processing > Time-Frequency and Wavelets のページ：  
<http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/loadCategory.do?objectId=68>
  - MultiWavelet Tools  
(GHM multiwavelet computation using the matrix method<sup>16</sup> )
  - Toolbox Alpert Multiwavelets  
(A toolbox for the Alpert multiwavelets transform<sup>17</sup> )

---

<sup>15</sup>文献 [13].

<sup>16</sup>文献 [8], [10], [16].

<sup>17</sup>文献 [1], [2].

- ▷ Vasily Strela の Software: Multiwavelet MATLAB Package  
(MWMP offers a variety of builtin scalar- and multi- filters) へのリンク :  
<http://www.cs.drexel.edu/~vstrela/MWMP/MWMP.tar.gz>

## 参考文献

- [1] B. Alpert, *Wavelets and other bases for fast numerical linear algebra*, Wavelets, 181–216, Wavelet Anal. Appl., 2, Academic Press, Boston, MA, 1992.
- [2] B. Alpert, *A class of bases in  $L^2$  for the sparse representation of integral operators*, SIAM J. Math. Anal. **24**(1) (1993), 246–262.
- [3] R. Ashino, C. Heil, M. Nagase and R. Vaillancourt, *Microlocal filtering with multiwavelets*, Comput. Math. Appl., **41**(1-2) (2001), 111–133.
- [4] R. Ashino and M. Kametani, *A lemma on matrices and the construction of multi-wavelets*, Math. Japon., **45** (1997), 267–287.
- [5] R. Ashino, M. Nagase and R. Vaillancourt, *A construction of multiwavelets*, Comput. Math. Appl., **32**(3) (1996), 23–37.
- [6] C. Cabrelli, C. Heil and U. Molter, *Self-similarity and multiwavelets in higher dimensions*, Mem. Amer. Math. Soc. **170** (807), 2004.
- [7] C. Chui and J. Lian, *A study of orthonormal multi-wavelet*, Appl. Numer. Math. **20** (1996), 273–298.
- [8] G. Donovan, J. Geronimo, D. Hardin and P. Massopust, *Construction of orthogonal wavelet using fractal interpolation functions*, SIAM J. Math. Anal. **27** (1996), 1158–1192.
- [9] G. Fann, G. Beylkin, R. Harrison and K. Jordan, *Singular operators in multi-wavelet bases*, IBM J. Res. & Dev. **48**(2) (2004), 161–171.  
<http://www.research.ibm.com/journal/rd/482/fann.pdf>
- [10] J. Geronimo, D. Hardin and P. Massopust, *Fractal functions and wavelet expansions based on several scaling functions*, J. Approx. Theory **78** (1994), 373–401.
- [11] T. Goodman and S. Lee, *Wavelets of multiplicity  $r$* , Trans. Amer. Math. Soc. **342**(1) (1994), 307–324.
- [12] T. Hoshiro, *Unconditional convergence of wavelet expansions*, 94–104, 数理解析研究所講究録, **1385**, 京都大学数理解析研究所, 2004.  
<http://hdl.handle.net/2433/25768>

- [13] F. Keinert, *Wavelets and multiwavelets*, Studies in Advanced Mathematics, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004.
- [14] W. Lawton, *Applications of complex valued wavelet transforms to subband decomposition*, IEEE Trans. on Signal Processing **41** (1993), 3566–3568.
- [15] Y. Meyer, *Wavelets and operators*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **37**, Cambridge University Press, Cambridge, NY, 1992.
- [16] K. Mizohata, *The Application of the GHM Multiwavelet Transform to Image Processing*, 1–8, 数理解析研究所講究録, **1385**, 京都大学数理解析研究所, 2004. <http://hdl.handle.net/2433/25760>
- [17] A. Morimoto, R. Ashino and R. Vaillancourt, *Pre-processing design for multiwavelet filters using neural networks*, Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process. **2**(2) (2004), 133–148.
- [18] G. Plonka, *Necessary and sufficient conditions for orthonormality of scaling vectors*, 205–218, Multivariate approximation and splines (Mannheim, 1996), Internat. Ser. Numer. Math., 125, Birkhäuser, Basel, 1997.
- [19] V. Strela, P. Heller, G. Strang, P. Topiwala and C. Heil, *The application of multiwavelet filter banks to signal and image processing*, IEEE Trans. on Image Proc., **8**(4) (1999), 548–563.
- [20] 芦野 隆一・山本 鎮男, ウェーブレット解析—誕生・発展・応用—, 共立出版, 1997.
- [21] I. ドブシー (著) 山田 道夫・佐々木 文夫 (翻訳), ウェーブレット 10 講, シュプリンガーフェアラーク東京, 2003.
- [22] B.B. ハバード (著) 山田 道夫・西野 操 (翻訳), ウェーブレット入門—数学的道具の物語, 朝倉書店, 2003.
- [23] E. ヘルナンデス・G. ワイス (著) 芦野 隆一・萬代 武史・浅川 秀一 (翻訳), ウェーブレットの基礎, 科学技術出版, 2000.