

第二世代ウェーブレットの構成法と応用 A Construction Method of Second Generation Wavelets and Its Applications

京都大学数理解析研究所 山田 道夫
Michio YAMADA (RIMS, Kyoto University)

1 はじめに

第二世代ウェーブレット (second generation wavelet)¹ は, 従来の (「第一世代」の) ウェーブレットが伸長と平行移動を構成の基本操作としていたのに対し, それらの操作を全く含まない形で構成される「ウェーブレット」である. これらの操作に依存しないことから, 従来の (双直交) ウェーブレットが無限領域でしか定義されなかったのに対し, 第二世代ウェーブレットは有界領域でも定義可能である. 以下ではまず従来の (「第一世代」の) 直交ウェーブレットについてその構成とフィルタ理論との関係について概略をまとめたのち, 双直交ウェーブレットへの拡張とリフティング (lifting) の手法を述べ, 第二世代ウェーブレットについて紹介する.

2 「第一世代」ウェーブレット

標準的な直交ウェーブレットはパラメータ a, b を $a = 1/2^j, b = k/2^j$ ($j, k \in \mathbf{Z}$) とオクターブで離散化し, マザーウェーブレット $\psi(x)$ を注意深く選ぶことによって構成される². このとき直交ウェーブレットは

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k) \quad (1)$$

となり, 関数 $f(x) (\in L^2(\mathbf{R}))$ は

$$f(x) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} D_{j,k} \psi_{j,k}(x) \quad (2)$$

$$D_{j,k} = (\psi_{j,k}, f) \quad (3)$$

のように展開される³.

多重解像度解析 (MRA: Multi-Resolution Analysis) [3] は, $L^2(\mathbf{R})$ において次の条件を満たす閉部分空間の列 V_j ($j \in \mathbf{Z}$) およびスケーリング関数とよばれる関数 $\phi(x)$ の組をいう.

$$1. V_j \subset V_{j+1}, \quad \bigcap_{j \in \mathbf{Z}} V_j = \emptyset, \quad \overline{\bigcup_{j \in \mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R})$$

¹ この名称を使わない研究者もあるがここでは提案者の Sweldens [2] に従うことにする.

² \mathbf{Z} は整数全体の集合.

³ 括弧は L^2 内積 $(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}g(x) dx$ とする.

2. $f(x) \in V_j \iff f(2x) \in V_{j+1}$
3. V_0 に属する関数 $\phi(x)$ で $\{\phi(x-k) | k \in \mathbf{Z}\}$ が V_0 の正規直交基底となるものがある.

スケーリング関数 $\phi(x)$ を伸長して作られる $\{\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\phi(2^j x - k) | k \in \mathbf{Z}\}$ は V_j の正規直交基底となる.

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad W_j \perp V_j \quad (4)$$

で定義される部分空間 W_j は

$$\overline{\bigcup_{j \in \mathbf{Z}} W_j} = L^2(\mathbf{R}) \quad (5)$$

を満たすが, これらの W_j についても

$$f(x) \in W_j \iff f(2x) \in W_{j+1} \quad (6)$$

が成り立つので, W_0 に属する関数 $\psi(x)$ で, 特にその整数平行移動全体 $\{\psi(x-k) | k \in \mathbf{Z}\}$ が W_0 の正規直交基底となるものが直交ウェーブレットを与え $2^{j/2}\psi(2^j x - k)$ ($j, k \in \mathbf{Z}$) の全体は, $\overline{\bigcup_{j \in \mathbf{Z}} W_j}$ の基底となる. $\phi(x)$ と $\psi(x)$ は V_1 の基底 $\{\phi_{1,k}(x) = \sqrt{2}\phi(2x - k) | k \in \mathbf{Z}\}$ によって展開でき,,

$$\phi(x) = \phi_{0,0}(x) = \sum_k h_k \phi_{1,k}(x) \quad (7)$$

$$\psi(x) = \psi_{0,0}(x) = \sum_k g_k \phi_{1,k}(x) \quad (8)$$

となる (2スケール関係式). いま MRA は与えられたものとしているので, $\phi(x), h_k$ は既知でありウェーブレット関数については

$$g_k = (-1)^{1-k} \bar{h}_{1-k+2N} \quad (N \text{ は整数}) \quad (9)$$

と選べば, 記述の簡単のため以下では h_k, g_k は実数とする.

MRA による直交ウェーブレットの構成において, 個々の直交ウェーブレットを特徴づける重要な量は係数 h_k, g_k であるが, この係数 (フィルタ係数とよばれる) は次のように関数の展開係数と密接な関係を持っている.

いま $f(x) \in V_1 = V_0 \oplus W_0$ とすると次の2種類の展開が可能である.

$$f(x) = \sum_k C_{1,k} \phi_{1,k}(x) \quad (10)$$

$$= \sum_l C_{0,l} \phi_{0,l}(x) + \sum_l D_{0,l} \psi_{0,l}(x) \quad (11)$$

これらの展開係数は内積によって表すことができるので

$$C_{0,l} = (\phi_{0,l}, f), \quad D_{0,l} = (\psi_{0,l}, f) \quad (12)$$

となるが、ここに2スケール関係式 (7), (8) を代入すると、展開係数の変換公式 (Mallat 変換) が得られる。

$$C_{0,l} = \sum_k h_{k-2l} C_{1,k} \quad (13)$$

$$D_{0,l} = \sum_m g_{k-2l} C_{1,k} \quad (14)$$

また (11) にやはり2スケール関係式 (7), (8) を代入すると、展開係数の逆変換公式 (逆 Mallat 変換)

$$C_{1,k} = \sum_l h_{k-2l} C_{0,l} + g_{k-2l} D_{0,l} \quad (15)$$

が得られる。これは任意のレベル j についても同様である。

Mallat 変換は信号の分解に、逆 Mallat 変換は信号の再構成にそれぞれ対応し、これらの公式は畳みこみ演算を再帰的に繰り返す高速数値演算のアルゴリズムを与える。特に離散化されたデータ $f_k (k \in \mathbf{Z})$ を与えられる場合は、 f_k をあるレベル M における展開係数 $D_{M,k}$ と同一視して直接 Mallat 変換を施すことも多い。

Mallat 変換は、 z 変換 ($z = \exp(i\omega)$) した信号 $C_m(\omega) = \sum_k C_{m,k} z^{-k}$ とフィルタ係数

$$H(\omega) = \sum_k h_k z^{-k}, \quad G(\omega) = \sum_k g_k z^{-k} \quad (16)$$

を用いて次のように表現される。

$$C_{m-1}(2\omega) \quad (17)$$

$$= \frac{1}{2} (\overline{H(\omega)} C_m(\omega) + \overline{H(\omega + \pi)} C_m(\omega + \pi)) \quad (18)$$

$$D_{m-1}(2\omega) \quad (19)$$

$$= \frac{1}{2} (\overline{G(\omega)} C_m(\omega) + \overline{G(\omega + \pi)} C_m(\omega + \pi)) \quad (20)$$

逆 Mallat 変換すなわち再構成過程については

$$C_m(\omega) = H(\omega) C_{m-1}(2\omega) + G(\omega) D_{m-1}(2\omega) \quad (21)$$

となる。

3 双直交ウェーブレットとリフティング

Mallat 変換と逆 Mallat 変換で特徴的なのは分解と再構成に同じフィルタ (H と G) を用いることであるが、信号の分解と再構成を観点からはこれらのフィルタは異なってもよく、新しいフィルタ

$$\tilde{H}(\omega) = \sum_k \tilde{h}_k z^{-k}, \quad \tilde{G}(\omega) = \sum_k \tilde{g}_k z^{-k} \quad (22)$$

を考えて ($H, G, \tilde{H}, \tilde{G}$) が (21) と類似の形式

$$C_m(\omega) = \tilde{H}(\omega) C_{m-1}(2\omega) + \tilde{G}(\omega) D_{m-1}(2\omega) \quad (23)$$

によって信号の再構成を与えるためには、条件（完全再構成条件）

$$\tilde{H}(\omega)\overline{H(\omega)} + \tilde{G}(\omega)\overline{G(\omega)} = 2 \quad (24)$$

$$\tilde{H}(\omega)\overline{H(\omega + \pi)} + \tilde{G}(\omega)\overline{G(\omega + \pi)} = 0 \quad (25)$$

が成り立てばよい（双直交フィルタ）。この条件から再構成フィルタ \tilde{H}, \tilde{G} が定まり、特に次の関係が導かれる。

$$\overline{H(\omega)}\tilde{H}(\omega) + \overline{H(\omega + \pi)}\tilde{H}(\omega + \pi) = 2 \quad (26)$$

$$G(\omega) = ae^{-i(2l+1)\omega}\overline{\tilde{H}(\omega + \pi)} \quad (27)$$

$$\tilde{G}(\omega) = (1/a)e^{-i(2l+1)\omega}\overline{H(\omega + \pi)} \quad (28)$$

後者の関係はフィルタ係数では

$$g_k = (-1)^{1-k}\tilde{h}_{1-k}, \quad \tilde{g}_k = (-1)^{1-k}h_{1-k} \quad (29)$$

となり、当然ながら直交ウェーブレットにおける関係 (9) と類似している⁴。

フィルタによる数列の分解は、 $l^2(\mathbf{Z})$ 上の展開でもあり、 $\{h_{k-2l}, g_{k-2l} | k \in \mathbf{Z}\}_{l \in \mathbf{Z}}$ および $\{\tilde{h}_{k-2l}, \tilde{g}_{k-2l} | k \in \mathbf{Z}\}_{l \in \mathbf{Z}}$ は $l^2(\mathbf{Z})$ 上の双直交基底である。また $C_{m-1,l}$ や $D_{m-1,l}$ を $C_{m,k}$ で表す式はこれらの基底との l^2 内積である。

ウェーブレット理論では、分解フィルタや再構成フィルタは $l^2(\mathbf{Z})$ の元であるが、それらに対応するスケーリング関数やウェーブレットは $L^2(\mathbf{R})$ の元であり、これらが互いに平行して理論が進む構造をもつ。双直交フィルタの場合も、これらに対応するスケーリング関数やマザーウェーブレットはフィルタ係数を用いた2スケール関係式

$$\phi_{0,0}(x) = \sum_k h_k \phi_{1,k} \quad \psi_{0,0}(x) = \sum_k g_k \phi_{1,k} \quad (30)$$

$$\tilde{\phi}_{0,0}(x) = \sum_k \tilde{h}_k \tilde{\phi}_{1,k} \quad \tilde{\psi}_{0,0}(x) = \sum_k g_k \tilde{\psi}_{1,k} \quad (31)$$

を満たすものとして得られ、この関係からスケーリング関数とマザーウェーブレットは

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{H(\omega/2^k)}{\sqrt{2}} \quad (32)$$

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{G(\omega)}{\sqrt{2}} \hat{\phi}(\omega) \quad (33)$$

のように決定される。またこのとき特に、ウェーブレットは $L^2(\mathbf{R})$ の双直交基底

$$(\psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{j',k'}) = \delta_{j,j'} \delta_{k,k'} \quad (34)$$

$$f = \sum_{j,k} (\tilde{\psi}_{j,k}, f) \psi_{j,k} = \sum_{j,k} (\psi_{j,k}, f) \tilde{\psi}_{j,k} \quad (35)$$

⁴ (27) と (28) において $a = 1, l = 0$ とおいた。

を構成する。これらの関数は分解・再構成フィルタの関数空間への表現であるがもっと積極的な意味ももつ。例えば、レベル0のデータ $C_{0,k}$ から分解を j 回繰り返してレベル $-j$ のデータ $C_{-j,k}$ を得たとすると、 $C_{0,k}$ から直接 $C_{-j,k}$ を与えるフィルタは、

$$\hat{\phi}_j(\omega) = \prod_{l=0}^{j-1} H(2^l \omega) \quad (36)$$

で与えられる。この式と (32) を比較すれば、 $j \rightarrow \infty$ のときのフィルタ係数の値がスケーリング関数の関数値に対応することが分かる。同様の関係は $D_{-j,k}$ を与えるフィルタ係数とマザーウェーブレットの間にも成り立ち、スケーリング関数やウェーブレットの関数形はフィルタの極限值に対応する。

応用に際してはしばしば、何か特別な条件を満たす直交ウェーブレットを求めたい場合があるが、直交条件を保ちながらそれらの条件を満たすのは実際上不可能であることが多く、直交条件を諦めて双直交条件が適用されることも多い。双直交ウェーブレットは自由度が高いが、それでも実際に特定の条件を満たすものを構成するためには新しい手法が必要である。リフティング (lifting) はそのような要求に対応するもので、望む性質をもつ双直交ウェーブレットを構成するための柔軟性の高い手法である。リフティングは既知の双直交フィルタから新しい双直交フィルタを構成する手続きである。

双直交フィルタ条件は (26)(27)(28) であるので、これらを満たしながらフィルタ $(H, G, \tilde{H}, \tilde{G})$ を変形する。このためにはリフティング (lifting) とよばれる次の手続きを行えばよい。

$$G^L(\omega) = G(\omega) - \overline{S(2\omega)}H(\omega) \quad (37)$$

$$\tilde{H}^L(\omega) = \tilde{H}(\omega) + S(2\omega)\tilde{G}(\omega) \quad (38)$$

これはフィルタ係数を用いると

$$g_k^L = g_k - \sum_l s_l h_{k+2l} \quad (39)$$

$$\tilde{h}_k^L = \tilde{h}_k + \sum_l s_l \tilde{g}_{k-2l} \quad (40)$$

であり、 $(H, G^L, \tilde{H}^L, \tilde{G})$ が新しい双直交フィルタとなる。またこれに双対な次の手続き

$$H^L(\omega) = H(\omega) + \overline{S(2\omega)}G(\omega) \quad (41)$$

$$\tilde{G}^L(\omega) = \tilde{G}(\omega) - S(2\omega)\tilde{H}(\omega) \quad (42)$$

もリフティング (双対リフティング) といい、 $(H^L, G, \tilde{H}, \tilde{G}^L)$ が新しい双直交フィルタとなる。スケーリング関数とウェーブレットもこれに伴い変形される。リフティングでは $S(\omega)$ は任意関数なので自由度が大きい。実際、 $H(\omega) = \tilde{H}(\omega) = 1$ かつ $G(\omega) = \tilde{G}(\omega) = \exp(-i\omega)$ という最も単純なフィルタ (Lazy filter) から出発し、リフティングを繰り返すことで任意の双直交フィルタに到達できることが知られている。

4 第二世代ウェーブレット

4.1 有界領域への拡張

従来のウェーブレットは伸長と平行移動によって構成されたが、これらの操作はウェーブレットの定義領域が無限領域であることを要求する。そこでこの制約をはずし、有界領域上で双直交ウェーブレットを一般化した概念が提案され第二世代ウェーブレットとよばれている。以下主として Sweldens[2] に従う。

有界領域 D の上で⁵ 考える。 $L^2(D)$ の閉部分空間列 $V_j (j \in \mathbf{Z})$ で

1. $V_j \subset V_{j+1}$, $\bigcap_{j \in \mathbf{Z}} V_j = \emptyset$, $\overline{\bigcup_{j \in \mathbf{Z}} V_j} = L^2(D)$
2. 各 V_j に Riesz 基底 $\phi_{j,k}(x) (k \in K(j))$ が存在する。 ($K(j)$ は添字集合で $K(j) \subset K(j+1)$)

となるものを多重解像度解析とよぶことにし、通常の変直交ウェーブレットと同じく互いに双対となる2つの閉部分空間列を考える。通常の変直交関係式に対応して細分関係式 (refinement relation)

$$\phi_{j,k} = \sum_{l \in K(j+1)} h_{j,k,l} \phi_{j+1,l} \quad (43)$$

を考える。ここでは領域の有限性から (通常の場合と異なり) h が j に依存するため、スケーリング関数の構成法が問題とある ((32) と比較されたい)。

4.2 スケーリング関数

そこでまず領域 D の分割集合 $\{S_{j,k} (C D) | j \in \mathbf{Z}, k \in K(j)\}$ を

1. $\forall j, \overline{\bigcup_{k \in K(j)} S_{j,k}} = D$, $S_{j,k} \cap S_{j,k'} = \emptyset (k \neq k')$
2. $S_{j+1,k} \subset S_{j,k}$
3. $k \in K(j_0)$ に対し $\bigcap_{j > j_0} S_{j,k}$ は一点 x_k からなる。

のように定め、これらの集合の定義関数 $\chi_{S_{j,k}}$ を用意する。(43) を満たす関数を組み立てるには、レベル j_0 の Kronecker 列 $\{\lambda_{j_0,k}^{(j_0,k_0)} = \delta_{k,k_0} | k \in K(j_0)\}$ から

$$\lambda_{j+1,l}^{(j_0,k_0)} = \sum_{k \in K(j)} h_{j,k,l} \lambda_{j,k}^{(j_0,k_0)} \quad (j \geq j_0) \quad (44)$$

のように $\lambda_{j,l}^{(j_0,k_0)}$ を定め、それを用いて

$$f_{j_0,k_0}^{(j)} = \sum_{k \in K(j)} \lambda_{j,k}^{(j_0,k_0)} \chi_{S_{j,k}} \quad (j \geq j_0) \quad (45)$$

⁵ 以下で D は無限領域であってもよい。

とおく.

$$\lambda_{j,k}^{(j_0,k_0)} = \sum_{l \in K(j+1)} h_{j_0,k_0,l} \lambda_{j,k}^{(j_0+1,l)} \quad (46)$$

に注意すると

$$f_{j_0,k_0}^{(j)} = \sum_{k \in K(j_0+1)} h_{j_0,k_0,l} f_{j_0+1,l}^{(j)} \quad (j \geq j_0) \quad (47)$$

となり制限 $j \geq j_0$ のもとで細分関係式 (43) が成り立つ. さらにこの添え字の制限をはずすには極限 $j \rightarrow \infty$ を考えればよい. この極限が存在するとき, それが (43) を満たすスケーリング関数を与えることになる.

$$\phi_{j_0,k_0} = \lim_{j \rightarrow \infty} f_{j_0,k_0}^{(j)} \quad (48)$$

このスケーリング関数については

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_{j,k}^{(j_0,k_0)} = \phi_{j_0,k_0}(x_k) \quad (\text{a.e}) \quad (49)$$

となり (36) のようにスケーリング関数値がフィルタの極限值によって与えられる.

4.3 双直交ウェーブレット

通常の MRA ではウェーブレットは直交補空間の基底として得られる. 第二世代ウェーブレット $\psi_{j,m}$ も, 添字集合 $M(j) \equiv K(j+1) \setminus K(j)$ に属する添字 m を持つものとして, 次の性質を満たすものとして定義する.

1. $\{\psi_{j,m} | m \in M(j)\}$ の張る線形空間の閉包 W_j について $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$, $W_j \perp \tilde{V}_j$
2. $\{\psi_{j,m} / \|\psi_{j,m}\| \mid j \in \mathbf{Z}, m \in M(j)\}$ は $L^2(D)$ の Riesz 基底.

このとき通常のウェーブレットの場合に似た次の関係が成り立つ.

$$(\psi_{j,m}, \tilde{\psi}_{j',m'}) = \delta_{j,j'} \delta_{m,m'} \quad (50)$$

$$\psi_{j,m} = \sum_{l \in K(j+1)} g_{j,m,l} \phi_{j+1,l} \quad (51)$$

$$\phi_{j+1,l} = \sum_{k \in K(j)} \tilde{h}_{j,k,l} \phi_{j,k} + \sum_{m \in M(j)} \tilde{g}_{j,m,l} \phi_{j,m} \quad (52)$$

ここでフィルタ係数 $h, g, \tilde{h}, \tilde{g}$ については双直交関係

$$\sum_l g_{j,m,l} \tilde{g}_{j,m',l} = \delta_{m,m'} \quad (53)$$

$$\sum_l h_{j,k,l} \tilde{g}_{j,m',l} = 0 \quad (54)$$

$$\sum_l h_{j,k,l} \tilde{h}_{j,k',l} = \delta_{k,k'} \quad (55)$$

$$\sum_l g_{j,m,l} \tilde{h}_{j,k',l} = 0 \quad (56)$$

が成り立ち, $\{h_{j,k,l}, g_{j,k,l} | k \in K(j), l \in K(j+1)\}_{j \in \mathbf{Z}}$ および $\{\tilde{h}_{j,k,l}, \tilde{g}_{j,k,l} | k \in K(j), l \in K(j+1)\}_{j \in \mathbf{Z}}$ は互いに双対となる $l^2(\mathbf{Z})$ の双直交基底となる. さらにスケーリング関数とウェーブレットについては双直交関係

$$\langle \tilde{\phi}_{j,k}, \phi_{j,k'} \rangle = \delta_{k,k'} \quad (57)$$

$$\langle \tilde{\psi}_{j,m}, \psi_{j,m'} \rangle = \delta_{m,k,k'} \quad (58)$$

$$\langle \tilde{\phi}_{j,k}, \psi_{j,m} \rangle = 0 \quad (59)$$

$$\langle \tilde{\psi}_{j,m}, \phi_{j,k} \rangle = 0 \quad (60)$$

が成り立つ. その他, 消失モーメント条件についても通常の場合とほぼ同様の性質を満たすことができ, また展開係数に関する高速数値アルゴリズムも通常の場合をそのまま一般化することが可能である.

4.4 リフティング

以上のように有界領域の上でも, MRA, スケーリング関数, ウェーブレットを通常とほぼ平行して作ることができる. そこで問題はこれらを構成するためのフィルタ係数を具体的に得る手段である. この問題に対し Sweldens [2] はリフティングスキームの利用を提案し, 第二世代ウェーブレットを実用的手法に大きく近づけた. このリフティングも通常のものと同様, 既知の双直交フィルタ $h, g, \tilde{h}, \tilde{g}$ から別の新しい双直交フィルタを作る方法であり, (39) (40) とほぼ同様の手続きで与えられる.

$$g_{j,k,l}^L = g_{j,k,l} - \sum_{m \in K(j)} s_{j,k,m} h_{j,k,l} \quad (61)$$

$$\tilde{h}_{j,k,l}^L = \tilde{h}_{j,k,l} + \sum_{m \in M(j)} s_{j,k,m} \tilde{g}_{j,m,l} \quad (62)$$

このとき $h, g^L, \tilde{h}^L, \tilde{g}$ が新しい双直交フィルタとなる. この方法を主リフティング (primary lifting) ⁶ とすると, 双対リフティング (dual lifting) は新しいフィルタが $h^L, g, \tilde{h}, \tilde{g}^L$ となるものとして次のように与えられる.

$$h_{j,k,l}^L = h_{j,k,l} + \sum_{m \in M(j)} \tilde{s}_{j,k,m} g_{j,m,l} \quad (63)$$

$$\tilde{g}_{j,k,l}^L = \tilde{g}_{j,k,l} - \sum_{k \in K(j)} \tilde{s}_{j,k,m} \tilde{h}_{j,k,l} \quad (64)$$

第一世代の場合と同じくこれらのリフティングでは s, \tilde{s} は (制約条件はあるものの) 自由に選べるフィルタなので手法の柔軟性は高い.

ところで主および双対のリフティングにはそれぞれ特徴がある. 例えば主リフティングでは新旧のスケーリング関数とウェーブレットは次の関係にある.

$$\phi_{j,k}^L = \phi_{j,k} \quad (65)$$

⁶ 2つのフィルタのどちらを主リフティングとよぶかは文献による.

$$\tilde{\phi}_{j,k}^L = \sum_{l \in K(j+1)} \tilde{h}_{j,k,l} \tilde{\phi}_{j+1,l}^L + \sum_{m \in M(j)} s_{j,k,m} \tilde{\psi}_{j,m}^L \quad (66)$$

$$\psi_{j,m}^L = \psi_{j,m} - \sum_{k \in K(j)} s_{j,k,m} \phi_{j,k} \quad (67)$$

$$\tilde{\psi}_{j,m}^L = \sum_{l \in K(j+1)} \tilde{g}_{j,k,m} \tilde{\phi}_{j+1,l}^L \quad (68)$$

この特徴は (67) に見られるように、新しいウェーブレット ψ^L が古いウェーブレット ψ と古いスケーリング関数 ϕ の和となる点にある。これは新しいウェーブレットが何か特定の性質を満たすようにリフティングフィルタ s を調整する際に便利な性質である。例えば新しいウェーブレットに消失モーメントを与えたいときには、フィルタ s に対する条件が容易に導かれる。これと対照的に双対リフティングでは新しいスケーリング関数に対する条件を扱いやすく、従って、主リフティングと双対リフティングを使えば、ウェーブレットとスケーリング関数双方の性質を改良することができる。

フーリエ解析と比較してウェーブレット解析の特徴は、前者では基本関数が三角関数に限定されるのに対し、後者では基本関数の選択に幅があることである。これはウェーブレット解析においては目的に応じた基本関数（フィルタ）を用いることが可能であることを意味する。リフティング手法はそのような選択を実際に可能にする広い一般性のある枠組みであり、この意味で、リフティング手法はウェーブレットの理工学への応用にとって不可欠の手法である。

4.5 初期フィルタ

リフティング手法を用いる場合は出発点となる初期フィルタを設定しなければならない。複雑な領域の場合、フィルタの選択も容易でないが、幸い初期フィルタは trivial なフィルタでも良いことが知られている。そこで初期フィルタとして、一般化された Haar フィルタや Lazy フィルタが用いられるが後者の方がより単純である。

いま2つのフィルタ E, D を考えよう。

$$E : l^2(K(j+1)) \longrightarrow l^2(K(j)) \quad (69)$$

$$F : l^2(K(j+1)) \longrightarrow l^2(M(j)) \quad (70)$$

ここで E, F はそれぞれ $K(j) \subset K(j+1)$ 上および $M(j) \subset K(j+1)$ 上において恒等写像となるものとする (subsampling フィルタ)。Lazy フィルタはこれらを用いて

$$H_j^{Lazy} = \tilde{H}_j^{Lazy} = E \quad (71)$$

$$G_j^{Lazy} = \tilde{G}_j^{Lazy} = F \quad (72)$$

と定義される。

Lazy フィルタの場合、与えられた分割集合 $S_{j,k}$ の定義関数 $\chi_{S_{j,k}}$ から作られるスケーリング関数は $\phi_{j,k}(x) = 1(x = x_k), 0(x \neq 0)$ となるが、これは一点のみで値を持つため $L^2(D)$ の意味では $\phi_{j,k}(x) \equiv 0$ に等しい。また双対スケーリング関数は、 $\tilde{\phi}_{j,k}(x) = \delta(x - x_k)$ のよ

うにデルタ関数で与えられ、 $L^2(D)$ には入らない。このように、Lazy フィルタに伴うスケーリング関数とウェーブレットは L^2 の枠組みをはみ出している。しかしそれにも関わらず Lazy フィルタをリフティングすることで L^2 の枠内の双直交ウェーブレットを構成できることが知られている。

4.6 第二世代ウェーブレットの応用

従来、1次元有限区間におけるウェーブレットを構成するさまざまな方法が提案されていた。これらと比較して第二世代ウェーブレットの構成法は有界領域の特定の形にしない一般的かつ透明な手法を与えている。また第二世代ウェーブレットの枠組みは、信号処理用のフィルタとして特定信号の抽出用フィルタの設計にも用いることができる。リフティングスキームの柔軟性を利用して特定信号に強く応答するようリフティングフィルタを調整することが試みられており、カスタムメイドのウェーブレットが設計されている [5, 6]。

第二世代ウェーブレットの大きな用途の一つは、平面以外の図形（多様体）の上の双直交ウェーブレットを構成することである。応用上も重要なものの一つは地球科学とも関連する球面である。球面上には一様な格子が存在しないことが知られている。そこで球面に接する正二十面体から出発して、次々と各面の三角形の辺の中点を新しい格子点に選び、次第に密になる三角格子を構成することが行われる（正二十面体格子）。このようなウェーブレットはコンピュータグラフィックスや適合格子を用いた数値計算などに試用されている。数値計算の場合は、なめらかな関数の表現に適したウェーブレットの構成が求められるため、消失モーメントを持つようリフティングを行う。また球面上のラプラシアン、grad、ヤコビアンなど幾何学的な微分作用素については、球面に適した近似表現が用いられ、拡散方程式や移流方程式などの微分方程式の解法が試みられている [4]。このような数値手法、特に適合格子を使用した計算が、従来の球面調和関数によるスペクトル法などの手法に比べてどの程度優劣があるのか大変興味深い。

参考文献

- [1] A.N.Kolmogorov and S.V.Fomin: *Elements of the theory of functions and functional analysis*, Dover, 1999.
- [2] W.Sweldens: *SIAM J. Math. Anal.*, vol.29, No.2, pp.511-546, 1998.
- [3] S.Mallat: *A wavelet tour of signal processing*, Academic Press, 1998.
- [4] M.Mehra, N.K.-R.Kevlahan: *J.Comput.Phys.*, vol.227, ppp.5610-5632, 2008.
- [5] K.Niijima, S.Takeno and R.Ikeura: *Circuits and Systems, MWSCAS'04*, vol.2, p.417-420.
- [6] 白川龍生, 川村彰, 後藤謙太, 近藤智史: 平成 15 年度土木学会北海道支部論文報告集 第 60 号, pp.728-731, 2004.