数理解析研究所講究録
第 1623 巻 2009 年 12-21

古典的統計多様体からのいくつかの拡張

– Some generalizations from classical statistical manifolds –

名古屋工業大学・大学院工学研究科　松添 博 (Hiroshi Matsuzoe)
Graduate School of Engineering
Nagoya Institute of Technology

(古典的)統計多様体とは擬リーマン多様体と捩れのないアファイン接続の組で，計量とアファイン接続がある種の適合性を満たすものである(第 1 章参照)．また，統計多様体には互いに双対的なアファイン接続が定義される．これらの幾何学構造は古くから微分幾何学において研究がなされているが，確率密度関数族の幾何学的理論を構築するために，1970 年代に統計学の分野から再発見された (cf. [AN])．この統計多様体や双対接続を用いた幾何学的手法は情報幾何学とよばれ，現在では数理科学の諸分野に応用されている．例えば EM アルゴリズムやブースティング・アルゴリズム，確率誤差伝播法の性能解析などは，双対接続を用いた幾何学で明快に理解することができる．

この確率密度関数族の持つ幾何学構造について，Lauritzen は微分幾何学的な視点から考察を行い，統計多様体の明確な定義を与えた [La]．その後 Kurose はアファイン超曲面論の立場から，この統計多様体の定義を再定式化した [Ku-1]．現在微分幾何学の分野では，主に Kurose の定義が用いられている．

さて，量子情報理論などに現れる量子状態空間の幾何学構造を考えると，量子状態空間に自然に入るアファイン接続が捩れを持つことが知られている．また，アファイン超曲面論には双対的なアファイン接続の構造が現れるが，統計多様体の幾何学で扱われる双対接続よりも，より一般的なものである．

そこで本論文は統計多様体のいくつかの拡張を考え，それらの相互関係の解明を目指す．具体的には

1. Norden によって導入された，一般化した双対接続 [Nor] と，アファイン超曲面論に現れる準 Weyl 多様体の幾何学 [Ma-1]，

2. Ivanov によって導入された，準双対接続の幾何学 [Iv]，

3. Kurose によって導入された，捩れをゆるす統計多様体の幾何学 [Ku-2]

について考察し，相互関係を解明する．その結果，アファイン分布の幾何学という新しい幾何学が重要な役割を果たすことがわかる．

この論文前半の内容は [Ma-2] により詳しく書かれている．また，論文後半の主題となる捩れをゆるす統計多様体とアファイン分布の幾何学については [Ku-2] に解説がある．

1　双対接続と統計多様体

まず始めに双対接続の定義を与える．

M を n 次元多様体，h を M 上の疑リーマン計量，∇ を M 上のアファイン接続とする．このとき，∇ の h に関する**双対接続** ∇^* を次の式で定義する．

$$Xh(Y,Z) = h(\nabla_X Y, Z) + h(Y, \nabla^*_X Z).$$

簡単な計算で $(\nabla^*)^* = \nabla$ が成り立つことがわかる．また ∇, ∇^* の曲率テンソルを，それぞれ R, R^* とすると

$$h(R(X,Y)Z,V) = -h(Z, R^*(X,Y)V)$$

が成り立つ．$\nabla^{(0)} := (\nabla + \nabla^*)/2$ とすると $\nabla^{(0)}h = 0$ となる．ただし，一般に ∇ は捩れを持つので，$\nabla^{(0)}$ は Levi-Civita 接続とは限らないことに注意する．

次ぎに $(0,3)$-テンソル場 C と $(1,2)$-テンソル場 K を

$$\begin{aligned} C(X,Y,Z) &:= (\nabla_X h)(Y,Z), \\ K_X Y &:= \nabla_X Y - \nabla^{(0)}_X Y. \end{aligned}$$

によって定義する．$(0,3)$-テンソル場 C は (M,∇,h) 上の 3 **次形式**とよばれ，$(1,2)$-テンソル場 K は**差テンソル場**とよばれる．

命題 1.1 (M,∇,h) 上のテンソル場 C, K に対し，次が成り立つ．

1. $K_X Y = \nabla^{(0)}_X Y - \nabla^*_X Y = (\nabla_X Y - \nabla^*_X Y)/2.$
2. $C(X,Y,Z) = -2h(K_X Y, Z) = -2(Y, K_X Z).$

命題 1.2 C を (M,∇,h) 上の 3 次形式，C^* を (M,∇^*,h) 上の 3 次形式とすると，$C = -C^*$ が成り立つ．

ここまでの議論で，一般には ∇ が捩れを持つことに注意しよう．したがって，3 次形式 C や差テンソル場 K は対称にならない．

次に ∇ が捩れを持たない場合を考える．

命題 1.3 以下の条件のうち 2 つを仮定すると，残り 2 つの条件が成り立つ．
(1)　∇ は捩れを持たない．
(2)　∇^* は捩れを持たない．
(3)　$C = \nabla h$ は対称である．
(4)　$\nabla^{(0)} = (\nabla + \nabla^*)/2$ は h に関する *Levi-Civita* 接続である．

したがって，互いに双対な捩れのないアファイン接続からは，対称な $(0,3)$-テンソル場が自然に定義される．逆に，次の命題も成り立つ．

命題 1.4 (M,h) を疑リーマン多様体とし，$\nabla^{(0)}$ を h に関する *Levi-Civita* 接続とする．また C を対称な $(0,3)$-テンソル場とし，

$$h(\nabla_X Y, Z) = h(\nabla^{(0)}_X Y, Z) - \frac{1}{2}C(X,Y,Z), \tag{1.1}$$
$$h(\nabla^*_X Y, Z) = h(\nabla^{(0)}_X Y, Z) + \frac{1}{2}C(X,Y,Z) \tag{1.2}$$

によって ∇ と ∇^* を定義する．このとき ∇ と ∇^* は h に関して互いに双対なアファイン接続となる．さらに ∇h と $\nabla^* h$ は対称なテンソル場となる．

上記の命題に注意して，統計多様体の定義を述べる．

定義 1 (統計多様体) (M,h) を疑リーマン多様体，∇ を M 上の捩れのないアファイン接続とする．∇h が対称となるとき (M,∇,h) を（古典的）**統計多様体**という [Ku-1].

適当な正則条件を満たす統計モデルが統計多様体の構造を持つことはよく知られている [AN], [La]. 統計多様体という言葉も，統計モデルの幾何学に由来する．なお，もともとの統計多様体は (M,h,C) の組のことである．この定義は Lauritzen [La] によって与えられているが，幾何学以外の分野ではこちらの定義を用いられることも多い．上記の命題により，二つの定義は基本的には同じである．

2　一般化した双対接続と準ワイル多様体

(M,h) を疑リーマン多様体，∇ を M 上のアファイン接続，τ を M 上の 1 次微分形式とする．このとき

$$Xh(Y,Z) = h(\nabla_X Y, Z) + h(Y, \overline{\nabla}^*_X Z) - \tau(X)h(Y,Z)$$

によってアファイン接続 $\overline{\nabla}^*$ が定義できる．この $\overline{\nabla}^*$ を ∇ の τ による h に関する**一般化した双対接続**という．

一般化した双対接続はもともとは A.P. Norden によって導入された [Nor]. 彼は $\overline{\nabla}^*$ を conjugate connection とよんでいる．その後 Nomizu が解説論文 [Nom] において $\overline{\nabla}^*$ を generalized conjugate connection とよんでいる．本論文は Nomizu の論文を参考にし，一般化した双対接続というよび方を用いる．

さて，一般化した双対接続について $\overline{(\overline{\nabla}^*)}^* = \nabla$ が成り立つ．また $\overline{\nabla}^{(0)} = \frac{1}{2}(\nabla + \overline{\nabla}^*)$ とおくと $(\overline{\nabla}^{(0)}_X g)(Y,Z) = -\tau(X)g(Y,Z)$ が成り立つ．したがって，一般化した双対接続は Weyl 幾何学と密接な関係がある.(もともと Norden が一般化した双対接続を導入した動機も，Weyl 幾何学にあるようである.)

次に $(0,3)$-テンソル場 $\bar{C}$ を $\bar{C}(X,Y,Z) := (\nabla_X h)(Y,Z) + \omega(X)h(Y,Z)$ によって定義し，**一般化した 3 次形式**とよぶことにする．通常の双対接続の場合と同様に，$\bar{\nabla}^*$ を ∇ の一般化した双対接続とすると，

$$\bar{C}(X,Y,Z) \;=\; h(Y, \bar{\nabla}^*_X Z - \nabla_X Z)$$

が成り立つ．

ここまでの議論では，∇ の捩率については何も仮定していない．∇ が捩れを持たない条件を考えると，双対接続の場合と類似の命題が成り立つ．

命題 2.1 (M,h) を疑リーマン多様体，∇ を M 上のアファイン接続，ω を M 上の 1-次微分形式とする．さらに $\bar{\nabla}^*$ を ∇ の ω による h に関する一般化した双対接続とする．このとき以下の条件のうち 2 つを仮定すると残りが成り立つ．

1. ∇ は捩れを持たない．

2. $\bar{\nabla}^*$ が捩れを持たない．

3. $\bar{C}(X,Y,Z) = (\nabla_X h)(Y,Z) + \omega(X)h(Y,Z)$ は対称である．

4. $\bar{\nabla}^{(0)} = (\nabla + \bar{\nabla}^*)/2$ は *Weyl* 接続である．すなわち $(M, \bar{\nabla}^0, h)$ は *Weyl* 多様体となる．

上述の命題を考慮し，統計多様体と Weyl 多様体の双方を拡張した幾何構造を次のように定義する．

定義 2 (準 Weyl 多様体) (M,h) を疑リーマン多様体，∇ を M 上の捩れのないアファイン接続，τ を M 上の 1 次微分形式とする．

$$(\nabla_X h)(Y,Z) + \tau(X)h(Y,Z) = (\nabla_Y h)(X,Z) + \tau(Y)h(X,Z)$$

が成り立つとき (M,∇,h,τ) を**準 Weyl 多様体**という [Ma-1].

すぐにわかることであるが，(M,∇,h,τ) が準 Weyl 多様体とすると

1. $(\nabla_X h)(Y,Z) + \tau(X) = 0$ ならば (M,∇,h) は Weyl 多様体となる．

2. $\tau = 0$ ならば (M,∇,h) は統計多様体となる．

第 5 章以降でも議論するが，準 Weyl 多様体の構造はアファイン超曲面論でも自然に現れる．[Ma-1] も参照されたい．

3 準双対接続

この章では双対接続の別の一般化である準双対接続について考える．(M, h) を疑リーマン多様体，∇ を M 上のアファイン接続，τ を M 上の 1 次微分形式とする．このとき

$$Xh(Y, Z) = h(\nabla_X Y, Z) + h(Y, \hat{\nabla}^*_X Z) + \tau(Y)h(X, Z)$$

によってアファイン接続 $\hat{\nabla}^*$ が定義できる．この $\hat{\nabla}^*$ を ∇ の τ による h に関する**準双対接続**という．この準双対接続も，アファイン超曲面論に自然に現れる幾何学構造である．また，準双対接続は双対測地線の幾何学でも有用である [Iv].

準双対接続と一般化した双対接続の定義より，次が導かれる．

命題 3.1 $\overline{\nabla}^*$, $\hat{\nabla}^*$ をそれぞれ ∇ の τ による h に関する一般化した双対接続と準双対接続とする．このとき $\overline{\nabla}^*$ と $\hat{\nabla}^*$ は射影的に同値である．

したがって，次の系も直ちに成り立つ．

系 3.2 $\overline{\nabla}^*$ が射影的に平坦であることの必要十分条件は，$\hat{\nabla}^*$ が射影的に平坦であることである．

4 捩れをゆるす統計多様体

量子推定理論に現れる密度行列の幾何構造を考えると，アファイン接続が捩れを持つ．そこで，次の幾何構造を考える．

定義 3 (捩れをゆるす統計多様体) (M, h) を疑リーマン多様体，∇ を M 上のアファイン接続とし，T^∇ を ∇ の捩率テンソル場とする．

$$(\nabla_X h)(Y, Z) - (\nabla_Y h)(X, Z) = -h(T^\nabla(X, Y), Z)$$

が成り立つとき，(M, ∇, h) を**捩れをゆるす統計多様体**という [Ku-2].

簡単な計算で ∇ の双対接続 ∇^* は捩れを持たないことがわかる．したがって，捩れをゆるす統計多様体は以下のように理解することもできる．

命題 4.1 (M, h) を疑リーマン多様体，∇^* を M 上の捩れのないアファイン接続とする．また ∇ を ∇^* の h に関する双対接続とする．このとき (M, ∇, h) は捩れをゆるす統計多様体となる．

一方，捩れをゆるす統計多様体と準 Weyl 多様体の関連について，次の命題が成り立つ．

命題 4.2 (M, ∇, h, τ) を準 *Weyl* 多様体，$\overline{\nabla}^*$ を ∇ の一般化した双対接続とする．また $\nabla'_X Y = \nabla_X Y - \tau(X)Y$ とおく．このとき
(1) $\overline{\nabla}^*$ は ∇' の h に関する双対接続である．
(2) (M, ∇', h) は捩れをゆるす統計多様体である．

上記の命題から，準 Weyl 多様体を与えると自然に捩れをゆるす統計多様体が構成できることがわかる．そこで (M, ∇', h) を準 Weyl 多様体 (M, ∇, h, ω) に付随する捩れをゆする統計多様体とよぶことにする．

5 アファインはめ込み

ここでアファインはめ込みの定義などを簡単にまとめる．アファインはめ込みに関する一般的な内容は [NS]，本論文に関連する結果については [Iv]，[Ku-1], [Ma-1] などを参照されたい．

M を n 次元多様体，f を M から $\boldsymbol{R}^{n+1}$ へのはめ込み，ξ を f に沿ったベクトル場とする．M の各点 p において，

$$T_{f(p)}\boldsymbol{R}^{n+1} = f_*(T_pM) \oplus \boldsymbol{R}\{\xi_p\}$$

という分解が成り立つとき，$\{f, \xi\}$ を M から $\boldsymbol{R}^{n+1}$ への**アファインはめ込み**という．また ξ を**横断的ベクトル場**という．

D を $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の標準アファイン接続とすると，接空間の分解に応じて

$$\begin{aligned} D_X f_* Y &= f_*(\nabla_X Y) + h(X, Y)\xi, & (5.1)\\ D_X \xi &= -f_*(SX) + \tau(X)\xi & (5.2) \end{aligned}$$

と表示され，M に ∇, h などの諸量が誘導される．∇ を**誘導接続**，h を**アファイン基本形式**，S を**アファイン型作用素**，τ を**横断的接続形式**という．h が非退化であるという性質は，ξ の取り方に依らない．そこで，h が非退化のとき f を**非退化**という．また $\tau = 0$ のとき，$\{f, \xi\}$ を**等積**とよぶことにする．

アファインはめ込みの基本方程式は次のようになる．

Gauss 方程式： $R(X,Y)Z = h(Y,Z)SX - h(X,Z)SY$

Codazzi 方程式： $(\nabla_X h)(Y,Z) + \tau(X)h(Y,Z) = (\nabla_Y h)(X,Z) + \tau(Y)h(X,Z)$

$(\nabla_X S)(Y) - \tau(X)SY = (\nabla_Y S)(X) - \tau(Y)SX$

Ricci 方程式：
$$\begin{aligned} h(X,SY) - h(Y,SX) &= (\nabla_X \tau)(Y) - (\nabla_Y \tau)(X)\\ &= d\tau(X,Y) \end{aligned}$$

Codazzi 方程式から，次の命題が成り立つことがわかる．

命題 5.1 アファインはめ込み f が非退化であるとき，(M, ∇, h, τ) は準 *Weyl* 多様体となる．さらに $\{f, \xi\}$ が等積であれば，(M, ∇, h) は統計多様体である．

逆に統計多様体 (M,∇,h)(または準 Weyl 多様体 (M,∇,h,τ)) が単連結であれば，双対接続 ∇^* (または 準双対接続 $\hat{\nabla}^*$) が射影的に平坦であるとき，与えられた統計多様体 (M,∇,h) (または準 Weyl 多様体 (M,∇,h,τ)) を誘導するようなアファインはめ込み $\{f,\xi\}$ が構成できる [DNV], [Iv].

次に，アファインはめ込みと双対接続の関係についてまとめる．

$\{f,\xi\}$ を M から $\boldsymbol{R}^{n+1}$ へのアファインはめ込みとし，$\boldsymbol{R}_{n+1}$ を $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の双対空間とする．ここで $\{f,\xi\}$ の**余法線写像** $v: M\to\boldsymbol{R}_{n+1}$ を，M の各点 p に対し

$$\langle v(p),\xi_p\rangle=1,\quad \langle v(p),f_*X_p\rangle=0 \tag{5.3}$$

で定義する．この式を微分すると

$$\langle v_*X_p,\xi_p\rangle=-\tau(X),\quad \langle v_*X_p,f_*Y_p\rangle=-h(X,Y) \tag{5.4}$$

となる．したがって h が非退化であれば v は M から $\boldsymbol{R}_{n+1}$ へのはめ込みであり，v は v 自身に横断的である．よって，$\{v,-v\}$ は M から $\boldsymbol{R}_{n+1}$ へのアファインはめ込み(中心アファインはめ込み) である．

$$D_X v_*Y \;=\; v_*(\hat{\nabla}^*_X Y)-h^*(X,Y)v$$

によって $\{v,-v\}$ に関する誘導接続を定義すると，次が成り立つ

$$Xh(Y,Z)=h(\nabla_X Y,Z)+h(Y,\hat{\nabla}^*_X Z)+\tau(Y)h(X,Z).$$

すなわち

命題 5.2 $\{f,\xi\}$ を非退化アファインはめ込み，v を $\{f,\xi\}$ の余法線写像とする．$\nabla,\hat{\nabla}^*$ をそれぞれ $\{f,\xi\},\{v,-v\}$ に関する誘導接続とすると，$\{f,\xi\}$ のアファイン基本形式 h に関し，互いに準双対接続である．

この章の最後に，幾何学的ダイバージェンスを定義しよう．

$\{f,\xi\}$ を非退化等積アファインはめ込み，v を $\{f,\xi\}$ の余法線写像とする．$M\times M$ 上の関数 ρ を

$$\rho(p,q)=\langle v(p),f(p)-f(q)\rangle$$

によって定義し，ρ を M の**幾何学的ダイバージェンス**とよぶ [Ku-1]．幾何学的ダイバージェンスはコントラスト関数とよばれるものの一種であり，ρ から M 上に統計構造 (∇,h) が誘導される [Eg].

6 アファイン分布

M を n 次元多様体，ω を $\boldsymbol{R}^{n+1}$ に値をとる M 上の 1 次微分形式，ξ を $\boldsymbol{R}^{n+1}$ に値をとる M 上の関数とする．M の各点 p において

$$(1) \qquad \boldsymbol{R}^{n+1} = \mathrm{Image}\ \omega_p \oplus \boldsymbol{R}\{\xi_x\},$$
$$(2) \qquad \mathrm{Image}\ (d\omega)_p \subset \mathrm{Image}\ \omega_p$$

が成り立つとき，$\{\omega, \xi\}$ を**アファイン分布**とよぶ．$\{f, \xi\}$ が M から $\boldsymbol{R}^{n+1}$ へのアファインはめ込みであれば，$\{df, \xi\}$ はアファイン分布である．

$$\begin{aligned} X\omega(Y) &= \omega(\nabla_X Y) + h(X,Y)\xi, \\ X\xi &= -\omega(SX) + \tau(X)\xi \end{aligned}$$

によって，M に ∇, h などの諸量が誘導できる．アファインはめ込みの場合と同じように，∇ を**誘導接続**，h を**アファイン基本形式**とよぶことにする．アファイン分布の定義の条件式 (2) より，h は対称な $(0,2)$-テンソル場となる．

h が非退化であるとき ω を**非退化**という．また，$\tau = 0$ であるとき $\{\omega, \xi\}$ を**等積**という．$\{\omega, \xi\}$ が等積であるための必要十分条件は

$$(3) \quad \mathrm{Image}\ (d\xi)_p \subset \mathrm{Image}\ \omega_p$$

となることである．[Ku-2] の定義には始めからこの条件が含まれている．

アファインはめ込みの場合と同様に，アファイン分布に関しても Gauss 方程式や Codazzi 方程式などの基本方程式が成り立ち，次の命題が成り立つ．

命題 6.1 $\{\omega, \xi\}$ が非退化等積アファイン分布であるとき，誘導接続 ∇ とアファイン基本形式 h に関して (M, ∇, h) は捩れをゆるす統計多様体となる．

例 6.2 ([Ku-2]) $\mathrm{Herm}(d)$ を d-次エルミート行列の全体とし，$\mathcal{S}$ を次で定まる量子状態の集合とする：

$$\mathcal{S} = \{P \in \mathrm{Herm}(d) \mid P > 0,\ \mathrm{tr}P = 1\}.$$

各 $P \in \mathcal{S}$ に対し，接空間 $T_P\mathcal{S}$ をトレースが 0 となるエルミート行列の全体 $\mathcal{A}_0$

$$\mathcal{A}_0 = \{X \in \mathrm{Herm}(d) \mid \mathrm{tr}X = 0\}$$

と同一視をする．各ベクトル $X \in \mathcal{A}_0$ に対し，対応するベクトル場を $\widetilde{X}$ と表記する．

各 $P \in \mathcal{S}$ とベクトル $X \in \mathcal{A}_0$ に対し，$\omega_P(\widetilde{X}) \in \mathrm{Herm}(d)$ と ξ を次式で定義する．

$$X = \frac{1}{2}(P\omega_P(\widetilde{X}) + \omega_P(\widetilde{X})P), \quad \xi = -I_d.$$

このとき，$\{\omega, \xi\}$ は等積アファイン分布になる．

誘導接続とアファイン基本形式は，それぞれ

$$
\begin{aligned}
h_P(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(P(\omega_P(\widetilde{X})\omega_P(\widetilde{Y}) + \omega_P(\widetilde{Y})\omega_P(\widetilde{X}))\right), \\
\left(\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}\right)_P &= \left(h_P(\widetilde{X}, \widetilde{Y})P - \frac{1}{2}(X\omega_P(\widetilde{Y}) + \omega_P(\widetilde{Y})X)\right)^{\sim}
\end{aligned}
$$

となる．h は量子情報理論において SLD Fisher 計量とよばれているものである（ SLD: 対称対数微分 (symmetric logarithmic derivative)）．また ∇ が捩れを持つこともすぐに確かめられる．

さて，命題 4.2 で示したように，準 Weyl 多様体からは自然に捩れをゆるす統計多様体が構成できる．このことから次の定理が成り立つ．

定理 6.3 準 *Weyl* 多様体 (M, ∇, h, τ) がアファインはめ込みによって $\boldsymbol{R}^{n+1}$ に実現されるとすると，(M, ∇, h, τ) に付随する捩れをゆるす統計多様体 (M, ∇', h) はアファイン分布によって実現される．

最後にアファイン分布から定まる幾何学的前ダイバージェンスを定義しよう．

$\{\omega, \xi\}$ を $\boldsymbol{R}^{n+1}$ への等積アファイン分布とし，$\boldsymbol{R}_{n+1}$ を $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の双対空間とする．ここで M の各点 p に対し $v : M \to \boldsymbol{R}_{n+1}$ を次の式で定義する．

$$
\langle v(p), \xi_p \rangle = 1, \quad \langle v(p), \omega_p(X) \rangle = 0. \tag{6.1}
$$

v を $\{\omega, \xi\}$ の**余法線写像**とよぶ．もともと余法線写像は接平面の動き方を記述する写像であるから，アファイン分布の場合でもこれが定義できる．

等積アファイン分布 $\{\omega, \xi\}$ とその余法線写像 v に対し，$M \times \Gamma(TM)$ 上の関数 ρ を

$$
\rho(X, q) = \langle v(p), \omega_p(X) \rangle
$$

によって定義する．ρ を M の**幾何学的前ダイバージェンス**とよぶ．

前ダイバージェンスに対しても，3 垂線の定理などダイバージェンスに対して成り立つ性質が同様に成り立つ [Ku-2]．しかしながら，情報幾何学におけるアファイン分布の幾何学の役割は，今のところわかっていない．尤度関数の存在しない不可積分系の推定理論などへの応用が考えられる．

本研究は科学研究費補助金（ 若手研究 (B)）No.19740033 の援助により行なわれている．

参考文献

[AN] S. Amari and H. Nagaoka, *Method of information geometry*, Amer. Math. Soc., Providence, Oxford University Press, Oxford, 2000.

[DNV] F. Dillen, K. Nomizu and L. Vranken, *Conjugate connections and Radon's theorem in affine differential geometry*, Monatsh. Math., **109**(1990), 221–235.

[Eg] S. Eguchi, *Geometry of minimum contrast*, Hiroshima Math. J., **22**(1992), 631–647.

[Iv] S. Ivanov, *On dual-projectively flat affine connections*, J. Geom., **53**(1995), 89–99.

[Ku-1] T. Kurose, *On the divergences of 1-conformally flat statistical manifolds*, Tôhoku Math. J., **46**(1994), 427–433.

[Ku-2] 黒瀬 俊, *Statistical manifolds admitting torsion*, 2007 年度福岡大学微分幾何研究会講演録, 2007.

[La] S. L. Lauritzen, *Statistical manifolds*, Differential Geometry in Statistical Inferences, IMS Lecture Notes Monograph Series 10, Institute of Mathematical Statistics, Hayward California, (1987), 96–163.

[Ma-1] H. Matsuzoe, *Geometry of semi-Weyl manifolds and Weyl manifolds*, Kyushu J. Math., **55**(2001), 107–117.

[Ma-2] H. Matsuzoe, *Geometry of statistical manifolds and its generalization*, Proceedings of the 8th International Workshop on Complex Structures and Vector Fields, World Scientific, (2007), 244–251.

[Nom] K. Nomizu, *Affine connectoins and their use*, Geometry and Topology of Submanifolds VII, ed. F. Dillen, World Scientific, (1995), 197–203.

[NS] K. Nomizu and T. Sasaki, *Affine differential geometry – Geometry of Affine Immersions –*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[Nor] A.P. Norden, *Affinely connected spaces* (in Russian), Moskva-Leningrad, 1950.