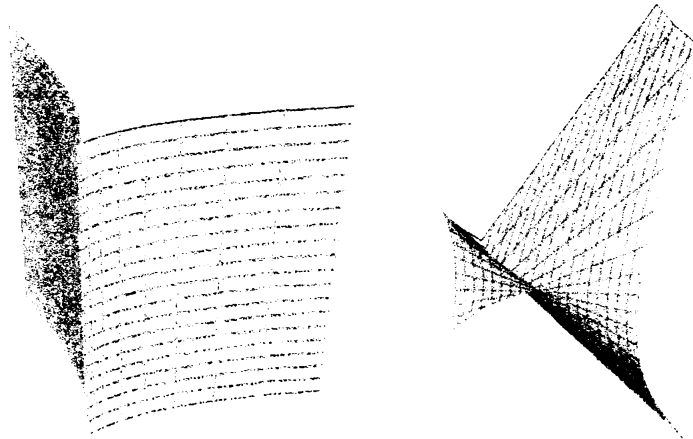


超曲面上の A_k 型の特異点の判定法とその応用

梅原 雅顕 (大阪大学・大学院理学研究科)

数年前 (正確には 2004 年 6 月), 筆者は数理研で, 下図の 2 つの特異点「カスプ辺」と「ツバメの尾」の判定条件 (論文 [KRSUY] に記載) と, その応用について講演をする機会をいただきました.



カスプ辺 (cuspidal edge) とツバメの尾 (swallowtail)

これら 2 つの特異点は 3 次元多様体の中の正則曲面の平行曲面を考えると, 自然に現れる特異点であり, 2 次元の曲面の研究においては, これで充分なのであるが, もしも超曲面にまで特異点を込めた研究を広げようとする, もっと高次の特異点の形状判定が重要課題となってくる. 上記 2 つの特異点はそれぞれ A_2 型, A_3 型の特異点とよばれ, 波面に現れる A_{k+1} ($k = 1, 2, 3, \dots$) 型の特異点の代表例である.

ここでは, 以前の研究の発展として, 最近の佐治氏 (岐阜大) と山田氏 (九州大) との共同研究 ([SUY3]) で与えた \mathbf{R}^n の超曲面に現れる A_{k+1} ($k \geq 1$) 型の特異点の判定法について解説する.

1. 波面と C^∞ -写像の特異点

まず, 特異点を以下のように定義する.

定義 1. n 次元多様体 M^n から $n+1$ 次元数空間 \mathbf{R}^{n+1} への C^∞ -写像 $f: M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ が, 点 p に特異点をもつとは

$$\text{rank}(df)_p < n$$

となることを云う. ここで df は f の微分写像を表す.

特に f が, M^n 上で特異点を持たないことと「 f がはめ込み」であることは同値である. これから紹介する A_{k+1} 型の特異点は, 「波面」に現れる特異点の典型例である. そこで, 次に「波面」の定義を与える.

定義 2. C^∞ -写像 $f: M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ が, 波面 (wave front あるいは front) であるとは, f が以下の 2 つの性質を満たすことである.

- (1) f に沿う単位ベクトル場 $\nu: M \rightarrow T_1\mathbf{R}^{n+1}$ が存在して, 接空間の像 $df(TM)$ と ν とが直交する. (この ν は, f の単位法線ベクトル場と呼ばれる.)

(2) f と ν との対写像

$$L = (f, \nu) : M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1} \times S^n(1)$$

は、はめ込みを与える。ここで $S^n(1)$ は単位球面を表す。

任意の多様体 M^n の余接束 T^*M^n の射影化 $P(T^*M^n)$ には、自然な接触構造が入ることが知られているが、

$$\mathbf{R}^{n+1} \times S^n(1) \cong T_1\mathbf{R}^{n+1} \cong T_1^*\mathbf{R}^{n+1}$$

なる同一視のもと、自然な射影

$$\cong T_1^*\mathbf{R}^{n+1} \ni v \mapsto [v] \in P(T^*\mathbf{R}^{n+1})$$

を考えると L と射影との合成によって

$$[L] : M^n \rightarrow P(T^*\mathbf{R}^{n+1})$$

なる Legendrian immersion が定まる。(単位余接束 $T_1^*\mathbf{R}^{n+1}$ には大域的に定義された接触1次微分形式 η が定まるが、はめ込み L がルジャンドルであるとは、 L による η の引き戻しが消えるときを云う。) この観点から云うと「波面とは、ルジャンドル部分多様体の射影である。」ということができる。また、このことに関連して、以下のことも比較的容易に証明することができる。

Fact 3. M 上の微分同相写像 $\varphi : M^n \rightarrow M^n$ と \mathbf{R}^{n+1} 上の微分同相写像 $\Phi : \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ が与えられていたとせよ。このとき、 $f : M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ を波面とすと合成写像

$$\Phi \circ f \circ \varphi : M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$$

も波面となる。

つまり「波面」という性質は、外の空間の計量の取り方にはよらず、可微分構造のみに依存する。ここで、波面として2つの具体例を挙げよう。

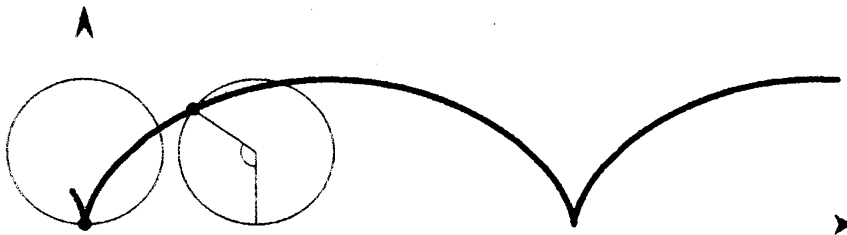


FIGURE 1. サイクロイド

例 1. (サイクロイド) C^∞ -写像

$$\gamma(t) = a(t - \sin t, 1 - \cos t) \quad (a > 0)$$

の像は、サイクロイドと呼ばれ、半径 a の円板を数直線の上に滑ることなく転がしたときの円周上の点の軌跡である。この曲線は $t \in 2\pi\mathbf{Z}$ に特異点 (3/2-カusp点) をもつ。これは波面になっている。実際、単位法線ベクトル場は

$$\nu(t) := \left(\cos \frac{t}{2}, -\sin \frac{t}{2} \right)$$

で与えられる。明らかに $\nu'(t)$ は至る所消えないから $\gamma(t)$ は、平面曲線としての波面の例を与える。

例 2. (平行超曲面) 多様体 M^n からのはめ込み

$$f: M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$$

が与えられたとする. いま M^n は向き付け可能, つまり単位法線ベクトル場 ν が大域的に存在しているとしよう. すると, 与えられた実数 t に対して

$$f_t := f + t\nu$$

で定まる C^∞ -写像 $f_t: M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ は, 波面となることが簡単にチェックできる. 実際 ν は, すべての f_t に共通の単位法線ベクトルになっている. f_t は平行超曲面とよばれるが, これは元の超曲面 f の像を波面と思ったとき, ホイヘンスの原理にしたがって t 時間経過後に生ずる新たな波面を表す. 波面 (wave front, front) という命名は, この現象と関係がある. 元の超曲面 f に特異点があなくても f_t には一般には特異点が現れる可能性がある.

下図は, 楕円の平行曲線である. この場合 4 つのカस्प点が生ずる.

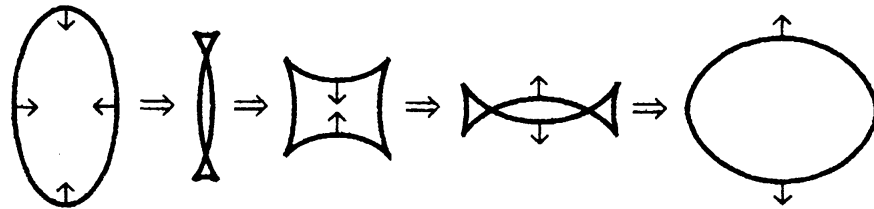


FIGURE 2. 楕円の平行曲線

このように, 波面は「はめ込み」より緩やかな特異点を許容する超曲面のクラスとして自然な概念である.

2. A_{k+1} 型の特異点

A_{k+1} 型の特異点の定義を与える前に, 特異点の間の写像芽としての同値関係を与えておこう.

定義 4. いま $p, q \in \mathbf{R}^n$ の近傍をそれぞれ U, V とし, その上の 2 つの C^∞ -写像

$$f: (U, p) \rightarrow (\mathbf{R}^{n+1}, f(p)), \quad g: (V, q) \rightarrow (\mathbf{R}^{n+1}, f(q))$$

が (写像芽として) 右左同値であるとは, p の近傍から q の近傍への局所微分同相写像 φ と, $f(p)$ から $f(q)$ への局所微分同相写像 Φ が存在し,

$$\Phi \circ f = g \circ \varphi$$

を満たすときを云う. この関係を $f \sim g$ で表す.

§1 で注意したように f が波面で $f \sim g$ ならば g も波面となるので, この写像芽の同値関係は波面のカテゴリーとも相性がよい. この事実注意到して, $k = 1, 2, 3, \dots$ のとき

$$f_k := \left((k+1)t^{k+1} + \sum_{j=2}^k (j-1)t^j x_j, -(k+2)t^{k+1} - \sum_{j=2}^k j t^{j-1} x_j, x_2, \dots, x_n \right)$$

で定まる C^∞ -写像を考える. f_k は原点に特異点をもつ. そこで, この写像の原点における写像芽と右左同値である C^∞ -写像の特異点のことを A_{k+1} 型の特異点とよぶ. まず, この写像 f_k の像は, 多項式

$$F(t) := x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + \dots + x_k t^k + t^{k+2}$$

が多重根をもつような係数の集合と一致する。つまり

$$\text{Im}(f_k) = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^{n+1}; \exists t \in \mathbf{R} \text{ such that } F(t) = F'(t) = 0\}$$

が成り立つ。実際 $F = t^{k+2} + x_0 + tx_1 + \sum_{j=2}^k t^j x_j$ と書き直し、微分すると

$$(1) \quad F' = (k+2)t^{k+1} + x_1 + \sum_{j=2}^k jt^{j-1}x_j$$

なので $F' = 0$ なる式から

$$x_1 = -(k+2)t^{k+1} - \sum_{j=2}^k jt^{j-1}x_j$$

を得る。これを $F = 0$ に代入して

$$\begin{aligned} x_0 &= -t^{k+2} - tx_1 - \sum_{j=2}^k t^j x_j \\ &= -t^{k+2} - t \left(-(k+2)t^{k+1} - \sum_{j=2}^k jt^{j-1}x_j \right) - \sum_{j=2}^k t^j x_j \\ &= (k+1)t^{k+2} + \sum_{j=2}^k (j-1)t^j x_j \end{aligned}$$

となり、写像 f_k の第一成分 $x_0 = (k+1)t^{k+2} + \sum_{j=2}^k (j-1)t^j x_j$ と第二成分 $x_1 = -(k+2)t^{k+1} - \sum_{j=2}^k jt^{j-1}x_j$ が得られる。

(A_1 -特異点, つまり正則点) $k = 0$ のとき

$$f_0 = (t^2, 2t, x_2, \dots, x_n)$$

であるから, f_0 の像は放物線と \mathbf{R}^{n-1} の直積であり, 特に特異点をもたない。つまり A_1 -特異点とは正則点を意味する。

(A_2 -特異点) $k = 1$ のとき

$$f_1 = (2t^3, -3t^2, x_2, \dots, x_n)$$

であるから, f_1 の像は (つまり A_2 型の特異点とは), $3/2$ -cusp と \mathbf{R}^{n-1} の直積である。特に $n = 1$ つまり平面曲線のときは, サイクロイドに現れる特異点 $3/2$ -cusp と右左同値であり, $n = 2$ のときはこの原稿の最初のページの左側の図「cuspidal edge」と右左同値である。

(A_3 -特異点) $k = 2$ のとき

$$f_2 = (3t^4 + t^2x_2, -4t^3 - 2tx_2, x_2, \dots, x_n)$$

であるから, f_2 の像は, (つまり A_3 型の特異点とは,) ツバメの尾と \mathbf{R}^{n-2} の直積である。特に $n = 2$ つまり, 空間内の曲面のときは, A_3 型特異点は原稿の最初のページの右側の図「ツバメの尾」と右左同値である。

3. A_{k+1} 型特異点の判定法

特異点の判定は、局所的な話なので U を $(\mathbf{R}^n, u_1, \dots, u_n)$ の領域とし、波面

$$f: U \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$$

を考える。ここで $\nu: U \rightarrow S^n(1)$ を、 f の単位法線ベクトル場とする。いま

$$f_{u_j} := \frac{\partial f}{\partial u_j}$$

を \mathbf{R}^{n+1} の位置ベクトルとみなして、行列式で定まる U 上の実数値関数

$$\lambda := \det(f_{u_1}, \dots, f_{u_n}, \nu)$$

を考える。これは超曲面としての f の体積密度関数であるが、 f の特異点は、ちょうど λ の零点に対応する。

定義 5. 波面 f の特異点 $p \in U$ (つまり $\lambda(p) = 0$) が、**非退化** (non-degenerate) であるとは、外微分 $d\lambda$ が点 p で消えないときを云う。

点 p が非退化であると、陰関数定理により、定義域 U において、 f の特異点の集合 $S(f)$ は、埋め込まれた超曲面となる。これを、**特異超曲面** (singular hypersurface) とよぶ。

いま、必要なら定義域 U を縮小して $S(f)$ 全体が U 内に埋め込まれた超曲面であるとして一般性を失わない。このとき、各 $q \in S(f)$ について、零でない接ベクトル

$$\eta_q \in T_q U$$

が、定数倍を除いて一意的に存在し、

$$df_q(\eta_q) = 0$$

を満たす。このベクトルを、点 q における**退化ベクトル** (null vector) とよび、その方向を**退化方向** (null direction) という。また、各特異点に対して、退化方向を与える滑らかな切断

$$\eta: S(f) \ni q \mapsto \eta_q \in T_q U$$

のことを $(S(f))$ の**退化ベクトル場**という。このようなベクトル場は関数倍を除いて一意的に定まる。我々の得た判定条件は以下のように述べられる。

定理 6. $f: U \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ を波面とし、 $p \in U$ を非退化な特異点とし、 η を退化ベクトル場とし、 $(v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$ を、特異超曲面 $S(f)$ の *tangent frame field* とする。各 v_j を、定義域の空間 \mathbf{R}^n のベクトルとみなして

$$\mu := \det(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, \eta)$$

によって $S(f)$ 上の C^∞ -関数を定義すると、以下の主張が成り立つ。

- (1) p が A_2 型の特異点であるための必要充分条件は $\mu(p) \neq 0$ となること、つまり、退化方向が S に横断的であることである。
- (2) p が A_3 型の特異点であるための必要充分条件は $\mu(p) = 0$ かつ $d\mu_p(\eta) \neq 0$ が成り立つことである¹。

この主張は $n = 2$ のとき、つまり \mathbf{R}^3 の曲面に現れる A_2, A_3 型の特異点に対して与えた判定条件 [KRSUY] の一般化である。さらに、次の主張が成り立つ。

¹ただし $\mu(p) = 0$ であることから $\eta_p \in T_p S$ となり $d\mu_p(\eta)$ が定義可能であることに注意。

定理 7. $f: U \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ を波面とし, $p \in U$ を非退化な特異点とする. p が A_{k+1} 型 ($k \geq 3$) の特異点となるための必要充分条件は, $d\mu(T_p S) \neq \{0\}$ かつ

$$\mu(p) = \mu'(p) = \cdots = \mu^{(k-2)}(p) = 0, \quad \mu^{(k-1)}(p) \neq 0$$

を満たし, さらに C^∞ -写像

$$(\Phi_\mu :=)(\mu', \cdots, \mu^{(k-2)}) : S_2(f) \rightarrow \mathbf{R}^{k-2}$$

のヤコビ行列の階数が $k-2$ となることである. (但し $S_2(f)$ は f の特異点 $S(f)$ への制限写像の特異点集合で, $S(f)$ における関数 μ の零点集合に一致する. 直観的には $S_2(f)$ は f の 2 次の特異点集合と解釈される. $d\mu(T_p S) \neq \{0\}$ なる条件から U 内の $n-2$ 次元の部分多様体となる.) $S_2(f)$ 上において,

$$\mu' = d\mu(\eta), \quad \mu'' = d\mu'(\eta), \cdots, \quad \mu^{(k-1)} = d\mu^{(k-2)}(\eta)$$

と定める. ($S(f)$ 上で定義された退化方向を定めるベクトル場 η は $S_2(f)$ に接するので, 上の関数が定義可能となる.)

特に A_4 型の特異点に関しては, Φ_μ の階数が 1 であることと $\mu'' \neq 0$ が同値であることから, A_2, A_3 型と同様に以下のような比較的簡単な判定条件が得られる.

系 8. $f: U \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ を波面とし, $p \in U$ を非退化な特異点とする. p が A_4 -型特異点となるための必要充分条件は, $d\mu(T_p S) \neq \{0\}$ かつ

$$\mu(p) = \mu'(p) = 0, \quad \mu''(p) \neq 0$$

を満たすことである.

これらの主張を示すには, 論文 [KRSUY] で A_2, A_3 型の特異点の判定条件を示す際に用いた特別な座標系 KRSUY-座標を一般化し, 与えられた波面に対応する普遍開折を具体的に構成する作業を行う必要がある. そのため, ある程度複雑な帰納法のステップを要する. 初期の証明法はかなり複雑であったが, 最終的には [KRSUY] よりも簡単かつ具体的な形での普遍開折の構成法を発見することができた. 上の判定条件は, 特異超曲面の局所座標表示の存在を前提としているが, λ のみを用いた幾つかの別の同値な判定法も導くことができる. 詳しくは論文 [SUY3] をご覧いただければと思います.

4. 応用

まず, 特異点集合の射影の形状によって, 特異点を判定する応用を与える. まず

$$\mathbf{n} \in S^n(1)$$

を \mathbf{R}^{n+1} の単位ベクトルとする. このとき

$$\Pi_{\mathbf{n}} : \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}^n$$

を, 単位ベクトル \mathbf{n} に関する直交射影とする. 以下の定理が成り立つ.

定理 9. [SUY3] $f: U \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ を波面とし, p を f の非退化な特異点とする. f_1 を写像 f の特異点集合 $S(f)$ への制限とすると, p が f の A_{k+1} 型特異点であるための必要充分条件は p が

$$\Pi_{\mathbf{n}} \circ f_1 : S(f) \rightarrow \mathbf{R}^n$$

の A_k 型特異点であることである.

下図は、ツバメの尾 (A_3 型特異点) をもつ曲面の特異点部分の射影が $3/2$ -カusp (A_2 型特異点) になっていることを示す図である. このように, 射影によって特異点の型の次数を1つ下げることができる.

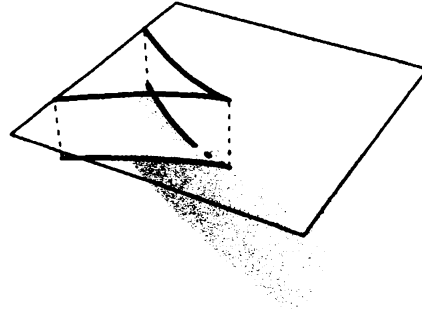


FIGURE 3. ツバメの尾の射影

我々が A_k 型の特異点の判定条件を作りたいと思ったのは, 特異点の廻りの曲面の断面曲率の振る舞い等, 微分幾何学的な形状解析を行うことが動機であったのだが, この方向に関しては現段階では以下の定理が得られている.

定理 10. [SUY1] $f: U \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ を波面とし, p を f の A_2 -型の特異点とする. この場合, f を特異点集合に制限すると $f(S(f))$ は \mathbf{R}^{n+1} の余次元2の部分多様体となるが, $f(U)$ の誘導計量に関する断面曲率が点 p の近傍で正ならば (余次元2の部分多様体として) $f(S(f))$ の断面曲率も正になる.

最後に, 波面の法曲率写像についての応用を述べる. いま M^n を n -次元多様体とし,

$$f: M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$$

を波面とし ν をその単位法線ベクトル場とせよ. さらに

$$\gamma: S^1 \rightarrow M^n$$

を多様体 M^n 上の正則閉曲線とする. もしも曲線 γ が f の特異点集合 $S(f)$ と交わらなければ

$$\kappa_\gamma: S^1 \ni t \mapsto -\frac{\hat{\gamma}'(t) \cdot \hat{\nu}'(t)}{\hat{\gamma}'(t) \cdot \hat{\gamma}'(t)} \in \mathbf{R}$$

によって曲線に沿って, 法曲率関数が定義できる, 但し

$$\hat{\gamma}(t) := f \circ \gamma(t)$$

とする.

定理 11. [SUY3] $f: M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ を波面とし, A_k 型の特異点のみを許容するとせよ. いま γ を M の正則閉曲線で

$$\hat{\gamma}'(t) = 0 \quad (\text{if } \gamma(t) \in S(f))$$

なる性質を満たすと仮定する. この性質を満たす γ を *null loop* とよぶ. このとき, 実射影直線 P^1 への C^∞ -写像として曲率写像

$$\hat{\kappa}_\gamma: S^1 \ni t \mapsto [-\hat{\gamma}'(t) \cdot \hat{\nu}'(t) : \hat{\gamma}'(t) \cdot \hat{\gamma}'(t)] \in P^1$$

が, 特異点までこめて S^1 -全体に C^∞ -写像として定義可能となる.

写像 $\hat{\kappa}_\gamma$ の回転数を m_γ で表し, γ の **ジグザグ数**とよぶ. M^n の基本群の各元から, null loop を代表元として選び出すことができ, 基本群の表現

$$\rho_f : \pi_1(M^n) \rightarrow \mathbf{Z}$$

が誘導される. これを**ジグザグ表現**とよぶことにすると, この表現は, A_k 型の特異点のみを許容する波面の変形で不変である. 下図は, 回転数 m でジグザグ数 ℓ の平面曲線の例である.



FIGURE 4. ジグザグ数が零でない平面曲線

REFERENCES

- [KRSUY] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of flat fronts in hyperbolic 3-space*, Pacific J. of Math. **221** (2005), 303–351.
- [SUY1] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *The geometry of fronts*, to appear in Ann. of Math., math.DG/0503236.
- [SUY2] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Behavior of corank one singular points on wave fronts*, Kyushu J. of Math. **62** (2008), 259–280.
- [SUY3] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *A_k singularities of wave fronts*, to appear in Math. Proc. Camb. Phil. Soc, arXiv:0804.0701.
- [Z] V. M. Zakalyukin, *Reconstructions of fronts and caustics depending on a parameter and versality of mappings*. J. Sov. Math., **27** (1984), 2713–2735.