

オマル・ハイヤームの初期数学思想

神戸大学大学院・国際文化科学研究科 三浦伸夫 (Nobuo MIURA)
Gradual School of Intercultural Studies
Kobe University

オマル・ハイヤームは今日『ルバイヤート』で有名であるが、また数学史上では3次方程式を幾何学的に円錐曲線の交点上に求めたことでも知られている。その手法は一夜にして形成されたのではないことは言うまでもない。古代ギリシャの手法を学び、アラビアの先行者たちの仕事を研究しながら彼は体系的著作『代数学』を完成させた。この主著に先立って代数学を論じた小論『4分円の分割』が存在する。それは急いで綴られた研究ノートのようなものであるが、そこには後に完成される彼の数学思想のエッセンスが散見される。本稿では、その小論をラシェットとヴァハブザデによって刊行された編集本に基づいて紹介し、それと主著『代数学』との関係を明らかにする。

1. 人と著作

オマル・ハイヤームは、アラビア語ではアブル=ファトフ・ウマル・イブン・イブラーヒーム・アル=ニーサーブリー・アル=ハイヤーミーと言ひ、ネイシャールに1048年頃生まれ、同地で1131年頃没したとされるが、不思議なことにこの歴史上著名な人物の生没年に関して異説も多々ある¹。今日彼の名前に結びつけられた著作は19点あるが、ここでは数理学の著作の名前をあげておく（括弧内はティールタによる推定執筆年²）。

数学：

- ・『4分円の分割』(1068) (タイトルはなく、「これはアブー・アル=ファトフ・ウマル・イブン・イブラーヒーム・アル=ハイヤーミーの論攷」と冒頭で書かれているだけだが、内容からそう呼ぶことにする)
- ・『ジャブルとムカーバラに関する諸問題の証明』³ (以下簡潔に『代数学』と言及) (1069-74)
- ・『エウクレイデスの書に関する諸問題の解説』(1077)

科学：

- ・音楽『4度に含まれる類に関する議論』
- ・重さの学『金銀から構成されたものにおいてそれらの量を知る策略』(1122以前)
- ・天文学『天文表』(1078)

消失したもの：

- ・『算術難問集』⁴ (1067)
- ・『自然学概論』
- ・地理学・気象学『場所についての必要な知識』(気象学あるいは天気予報について論じたもの)

最初に『4分円の分割』のテキストについて触れておこう。この写本はテヘラン大学図書館コレクション 1751 に含まれる一点のみ現存する。『代数学』の近代編集本がヴェプケによって刊行

された1851年の時点ではまだその存在は知られていなかった⁵。ムサーヒブはペルシャ語訳(1960)を出版し、それに基づいてアミール＝モエズは英訳(1961)⁶を出したが、そこには誤りが少なくない。アラビア語原典が初めて公刊されたのはラッシュェッドとジェッパルによる(1981)。その後それはラッシュェッドとヴァハブザデの『数学者オマル・ハイヤーム』(1999)⁷に採録され、これには詳細な解説がつけられている。この仏訳に基づいた英訳(2000)⁸もあるが、原典は省かれてしまっている。今日『4分円の分割』はこのラッシュェッドとヴァハブザデによる原典と仏訳に依拠せねばならないと言えるであろう⁹。

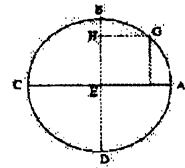
以下では、上記『数学者オマル・ハイヤーム』に基づいて議論を進め、図版もそこに見られるものを採用する¹⁰。まず、主題を数学的に紹介し、次いで歴史的部分に言及し、その後オマル・ハイヤームにおける論証法、代数学の意味、用語などを検証し、本書の数学史上の意味について考える。

2. 『4分円の分割』の数学

標記小論で取り扱われている数学問題は1題で、4分円の分割を扱っている。問題は順を追って説明され、途中でそこで用いられる代数学、3次方程式について簡単な歴史的説明が加えられている。

本稿が扱っている論題は次のもので、冒頭にその記述がなされている。

円ABCDの四分円ABを点Gで二分し、直径BDへ垂線GHを引いて、AE対GHの比がEH対HBの比に等しくなるようにしたい。ただしEを円の中心、AEを直径の半分とする。



すなわち、問題は、 $AE/GH = EH/HB$ となる点GでABの四分円を分割しようというものである¹¹。

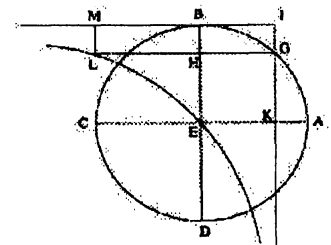
これに引き続いて、アナリュシスとシュンテシスとを用いて次のような手順をとることが述べられている。「それゆえ、このことがすでになされていると仮定し、アナリュシスが何か知られたものに導くようにする。次にこの方法に応じてシュンテシスですすめよう」。

ここでは取り上げられている問題を7つに分けて紹介しておこう。

(1)

この問題は円錐曲線(双曲線)を用いて解かれる。すなわち後の『代数学』と同じ方法をとっている。

まず、KIがGを通るようにし、 $BM = AE$ とする。四辺形ILを完成させると、 $AE = BM$ なので、これと条件から、 $BM/GH = EH/HB$ 。よって「BMのHBへの積はGHのEHへの積に等しい」、つまり $BM \cdot HB = GH \cdot EH$ 。 $HB \cdot HG$ を加えて、 $BM \cdot HB + HB \cdot HG = GH \cdot EH + HB \cdot HG$ 。これを図形と対照させると、 $MI \cdot HB = GH \cdot EB$ 。つまり $LG \cdot ML = EK \cdot EB$ 。



IK、IMを漸近線とする、Eを通る双曲線をとると、上の式からLはこの双曲線を通る(『円錐曲線論』I-55, II-4, 5¹²より)。

ここでLが知られるとGも知られるが、これ以上オマル・ハイヤームは進まない。ここではまだ双曲線は具体的には作図できない。

(2) $EG+GH=EI$ をいう

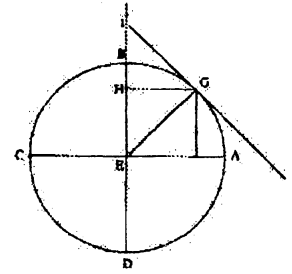
円上のGで接線が引かれるとする。正三角形の相似から、 $EH/HG=HG/HI$ 。よって $HG^2=EH \cdot HI$ 。Gは円上の点なので、 $HG^2=DH \cdot HB$ 。よって $EH \cdot HI=DH \cdot HB (=HG^2)$ から、 $HD/EH=HI/HB$ 。

ここで $HD=DE+EH$, $HI=IB+BH$ なので、 $DE/EH=BI/HB$ 。(*)。

また条件から、 $GH/HB=AE/EH=DE/EH$ なので、 $GH/HB=BI/HB$ 。

よって $GH=BI$ 。よって $EG+GH=EB+BI=EI$ 。(**)。

すなわち、BIが決まればGが決まるが、三角形 EGI において、斜辺 EI は直角を挟む一辺 EG と垂線 GH との和で決まる。それを次のように述べている。



こうしてアナリュシスは、直角の弦[=斜辺 EI]が直角を含む2辺の内の一つ[EG]と、そこからその弦に引かれた垂線[GH]との和に等しくなる条件が付いた直角三角形に導いた。それゆえ、この性質を持つ直角三角形を作図するとき、常に幾何学的な方法でこの命題のシュンテシスによってすすめることができるであろう。この前提、つまりこの性質を持つ三角形は、このような命題においてはきわめて有用である。それは他の性質も持ち、そのいくつかに関しては言及されるであろう。こうして読者はそれらがこのような問題の大部分において有益であるということを理解できるであろう。

(3) 三角形 EGI について(i) (ii)を示す

(i) 三角形 EGI は二等辺三角形ではないことの証明(背理法)

$EG=GI$ とすると、 $EH=HI=HG$ であるが、前述のように $EI=EG+HG$ なので、 $EG=EH$ となり矛盾。 $EG>GI$ とすると、 $HG>HI$ となるが、 $HG=IB$ であったので、 $IB>HI$ 。これも矛盾。よって $EG<GI$ 。

(ii) $EG+EH=GI$ をいう

(*)より、 $ED/EH=IB/BH$ 。よって $DH/HE=IH/HB$ 。ここから $DH/HI=EH/HB$ 。ここで、 $EH/HB=EG/GH$ (はじめの条件)、 $EG/GH=GI/HI$ (三角形 EGHの三角形 GHI) より、3式から $GI/HI=DH/HI$ 。よって $GI=HD$ 。ここで $HD=EG+EH$ 。よって $EG+EH=GI$ 。「これが証明したいことであった。」

これと(**)より、 $EG+GH=EI$, $EG+EH=GI$ が成立する。

次に、 $\triangle EGI \sim \triangle ABC$ なる $\triangle ABC$ で考える。そして $AB+BD=AC$ を満たす B が直角な直角三角形を具体的に作図する。これを代数を用いてすすめる。

(4) 代数を用いた計算

そしてこの種の問題において、代数学者たちの表現を用いて感覚的な手順を容易にした術(シナーア)の修得者たちの中から最も優れた先行者たちによって我々は導かれることができ、我々は彼らの足跡をたどるこ

とにしよう。ただし代数学者たちの表現法を用いなくとも、手順は同じとなりそれは許されるであろう。ただし彼らの表現法を用いると乗除法は容易になるであろう。

AD=10, BD=x とおくと、 $AB^2 = x^2 + 100$.

また、三角形 ABC ≡ 三角形 ADB なので、 $AC/AB = AB/AD$.

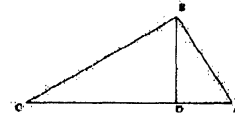
よって $AB^2 = AC \cdot AD$. 代入すると、 $x^2 + 100 = 10 \cdot AC$.

また条件から $AB + BD = AC$ としたので、(3) の $EG + EH = GI$ より、 $x^2/10 + 10 = AC = AB + BD = AB + x$.

よって $AB^2 = (x^2/10 + 10 - x)^2$. よって $x^2 + 100 = (x^2/10 + 10 - x)^2$.

これを計算して $x^3 + 200x = 20x^2 + 2000$.

この3次方程式を解くことが求められる。この後オマル・ハイヤームは3次方程式の分類や歴史を少し詳しく述べる。(後述)



(5) 半円と双曲線との交点を用いて解を求める

次のようにする。AB=20, EG=200, EH=1, AH=√200, AD=10=2000/200. 半円の端点Dが双曲線上にもどり、EH、AHを漸近線とする。この双曲線はまたKでも半円と交わり、するとALが求められるものになることを言う。

ところでK, Dは双曲線上にあるので $IK \cdot KM = ED \cdot DA$.

共通部分であるEH・HMを除いて $IK \cdot IE = AD \cdot AM$.

これをKL・LDに加えると $IL \cdot LD = KL \cdot AL$.

よって $AL^2/LI^2 = LD^2/KL^2$. また、円の性質より、 $DL/LK = LK/LB$ なので $LD^2/KL^2 = (DL/LK) \cdot (LK/LB) = DL/LB$.

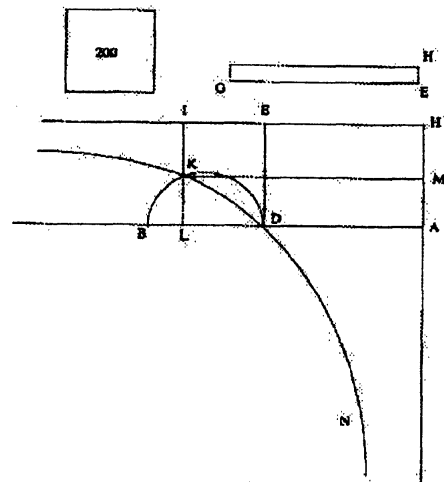
よって $AL^2/LI^2 = DL/LB$. つまり $AL^2 \cdot LB = LI^2 \cdot DL$.

$LI^2 \cdot AD$ を加えて、 $AL^2 \cdot LB + LI^2 \cdot AD = LI^2 \cdot DL + LI^2 \cdot AD$.

よって $DL + AD = AL$ なので、 $AL^2 \cdot LB + 200 \cdot 10 = LI^2 \cdot AD$.

$AL = 200 \cdot AL$. ここで AL^3 を加えると、 $AL^3 + AL^2 \cdot LB + 2000 = AL^3 + 200 \cdot AL$.

よって $AL^2 \cdot (AL + LB) + 2000 = AL^3 + 200 \cdot AL$. $AL = x, AB = 20$ なので、 $20x^2 + 2000 = x^3 + 200x$. 「これが証明したいことであった。」
こうして先の方程式の解は $AL (=MK)$ となる。



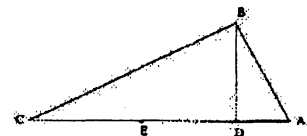
(6) △EGI の代わりに△ABD で考えればよい。以下それでうまくいくことが確かめられる。

ところで、 $AB + BD = AC$ を満たしBが直角な直角三角形を見いだす。そこで次のような三角形を考える。 $AD = 10, BD = AL, \angle ABC = \angle R$ とする。

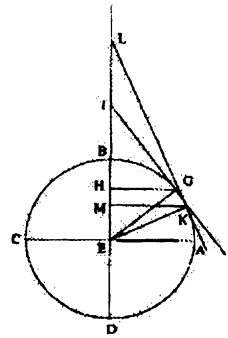
すると $AB + BD = AC, AB + AD = BC$ ((3) (ii) より) .

次に、この三角形と元の図形とを対照させる。中心をEとする円

ABCDを描き、 $HE/HB = AD/DE$. となるHをBE上にとる。すると、三角形ABC(上図)と三角形EGI(下図)とは相似¹³。



よって $EG/BA = GH/BD = EI/AC$. よって $(EG+GH)/(BA+BD) = EI/AC$.
 ここで $AB+BD=AC$ なので、 $EG+GH=EI$. $EG=BE$ なので、 $GH=EI-EG=EI-BE=BI$.
 よって $GH=BI$. ここで $HG^2=DH \cdot HB$, また $HG^2=EH \cdot HB$. よって $DH \cdot HB$
 $=EH \cdot HI$. ここから $DH/EH=IH/HB$. よって $(AE+EH)/EH = (IB+BH)/HB$.
 よって $GH=IB$ から、 $AE/EH=GH/HB$. したがって $AE/GH = EH/HB$.
 「これが証明したいことであつた。」



(7) 近似解

計算によってそれを知りたくて、精確な値に到着しようとしても、そうすることはできないであろう。という
 のも、円錐曲線で決まることは計算に還元できないからである。しかし概算で満足するなら、『アルマゲスト』
 にある弦（アウトール）の表（ジャダーウィル）と、熟考された¹⁴天文暦（ジージュ）の正弦（アル＝ジュユー
 プ）の表と正矢（シハーム）の表とを用いなさい。

こうして近似解を求める。まず半径 $R=60$ の円弧を考える。 $\angle GEB = \alpha$ とする。 $AE/GH = EH/HB$
 より、 $60/60 \sin \alpha = 60 \cos \alpha / (60 - 60 \cos \alpha)$. よって $\sin \alpha = (1 - \cos \alpha) \cos \alpha$. 表を用いて $\alpha \approx$
 57 を試行錯誤で見いだす（さらに、 $\sin \alpha = 50/60$, $\text{versin} \alpha = (27 + 1/3) \cdot (1/60)$, $\cos \alpha = (32 + 2/3) \cdot (1/60)$
 も行う）。「そして差が知覚不能に導かれるまで、精確さを増すことができるであろう」と付け加
 え、この値が最終的なものではないことを断っている。ここで彼の関心は代数的近似解ではない
 ことは明らかである。

以上で数学内容の紹介が終わる。次に論じられている原理について述べておこう。

3. 代数思想

まず方程式の分類を見ておこう。3次方程式は単純と複合とに分類される。

単純 (3種)

$$x^3 = x^2, \quad x^3 = x, \quad x^3 = N$$

複合

3項

・円錐曲線で解けるもの (6種)

$$x^3 + x^2 = N, \quad x^3 + N = x^2, \quad x^3 + x = N, \quad x^3 + N = x, \quad x^2 + N = x^3, \quad x + N = x^3$$

・『原論』第二巻で解けるもの (2次方程式に還元できるもの) (3種)

$$x^3 + x^2 = x, \quad x^3 + x = x^2, \quad x^2 + x = x^3$$

4項 (すべて円錐曲線で解ける) (7種)

$$x^3 = x^2 + x + N, \quad x^3 + x + N = x^2, \quad x^3 + x^2 + N = x, \quad x^3 + x^2 + x = N, \quad x^3 + x^2 = x + N, \quad x^3 + x = x^2 + N, \\ x^3 + N = x^2 + x$$

これらはすべて網羅し、こうして13種のみが円錐曲線で解けるとするが、その論拠は示してい
 ない。この分類は『代数学』に継承される。

次に、用いられている「代数」という用語を見よう。それはまず al-jabr という単語で代表させている。また「代数学者 (アフル・アル=ジャブル) の用語では」という用法もある。さらに代数学から派生させた代数学者 (アル=ジャブリーユーン) もしばしば用いられる。このことは当時、代数学がすでによく知られており、その専門家がいたことを示している。他方彼は、「ジャブルとムカーバラ」を次のように定義する。「ジャブルとムカーバラは、幾何学的なものであり、『原論』第2巻命題5と6の中で証明されている」。これは代数学が『原論』第2巻命題5, 6に基づくものであることを明言し、幾何学と代数との対応関係があることを示すものである。他方で、「代数学は未知数を決定する方法である」とも言う。上の2つの用語には1カ所カーダという語が付け加えられている。 $100 + 3x^2 + 1/10 \cdot 1/10 \cdot x^4 - 20x - 1/5 \cdot x^3 = 100 + x^2$ を $2x^2 + 1/10 \cdot 1/10 \cdot x^4 = 20x + 1/5 \cdot x^3$ に変形する際、「負項除去 (ジャブル) を行い、同類項簡約 (ムカーバラ) を行い、そしてカーダを行う」と言う。これは本来「粉碎する」を意味するが、彼の著作全体を含め他の数学者にも使用例はなく、またこの使用例から見て特段の技術的意味は認められないように思われる¹⁵。

ところでオマル・ハイヤームは3次までの方程式を解くが、それ以上の高次方程式はどうだろうか。彼はそれに関して次のように述べている。

代数学者たちによれば、平方がそれ自身に乗ぜられて生ずる平方の平方に関して、それは連続量¹⁶において意味をなさない。というのも平方は平面であるので、どのようにしてそれがそれ自身に乗ぜられることがあり得ようか？ 平面は二次元¹⁷で、二次元が二次元に乗ぜられると四次元となるが、立体は三次元を超えることはない。それゆえ代数学者たちの方法で出てくるものはすべてこれら四種からのみ生まれるのである。

すなわち、考察対象は幾何学上では(数、)線、平面、立体の4種のみである。よって平方×平方は計算上では理解できるが、実際には考える必要はないという。『代数学』ではさらに次のように繰り返している。

代数学者が幾何学において平方の平方[と言う言葉]を用いるとき、それは大きさ(マカーディール)の一部をなすことは不可能なので、それは比喩的に述べられているのであり、厳密に述べられているのではない。…それゆえ、平方の平方は大きさの一部となることは本質的にも付帯的にもありえないのだ。

ただし特殊な4次方程式は2次に還元して解ける。たとえば、 $x^4+3x^2=28$ の場合、 x^2 を求めたのち、もう一度繰り返し、「第2のジャブルとムカーバラ」を用いて求める。この方法は「そこから他のことを明らかにする秘訣(シッル)である」と言う。

彼は、3種の単位(線、面、立体)を基準にして方程式を組み立てる。次元の斉一性を保つため、代数学上では彼は常に線の単位を掛け合わせて調整する。それは幾何学上では明らかである。「数が立体に等しいと言われるとき、その数は、単位の正方形に等しい底辺と、与えられた数に等しい高さをもつ直角平行六面体を意味する」。すなわち、 $N=x^3$ という単純な3次方程式のとき、右辺は立体すなわち現代的には3次元である。よって左辺もそれに等しくせねば大きさの斉一性が

保たれないので、左辺は底辺が 1^2 、高さが N の立体 ($1^2 \times N$) と解釈せよ、という。ただしそこでは数が幾何学的大きさに結びつけられ、いまだギリシャの数概念の延長上にあったと言うことができる。こうして代数と幾何学とが密接に結びつく。そこでは大きさ、次元、連続量の概念が基礎をなす。ただし『4分円の分割』では、幾何学の問題に代数学が適用される程度にとどまり、その関係が体系化されるのは『代数学』においてである。

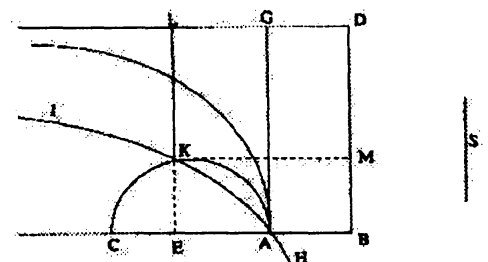
論証法に関して、証明はきちんと定型化されている。まず、「私は次のことを言う」と述べ、命題を提示し、「証明」(プルハーン)という語で実際に証明が行われる。最後は、「これが証明すべきことであった」が添えられ、エウクレイデスのように論証が終わる。証明に用いられる古代の著作(エウクレイデス『原論』やアポロニオス『円錐曲線論』など)も多くは命題番号が指示されている。また証明には背理法が用いられることもあり、「これは矛盾する」「これは不可能である」と導かれる。

しばしば言及されるのがアナリシス(タフリール)とシュンテシス(タルキープ)である。アナリシスは「何か知られたものに導く」と述べられているだけでなく、明白に「方程式に導く」と言及され、オマル・ハイヤームにとってアナリシスはすでに代数学を含意していたと言うことができる。他方シュンテシスは用いられる頻度が少なく、それでも幾何学的証明の冒頭に置かれたり、「幾何学的にシュンテシスで行う」などと幾何学的証明を指す際に用いられる。両者の関係は冒頭の句、「このことがすでになされていると仮定し、アナリシスが何か知られたものに導くようにする。次にこの方法に応じてシュンテシスですすめよう」、に明白に示されている。こうして、オマル・ハイヤームにとって両者の理解は、ギリシャの伝統(エウクレイデスやアポロニオスの方法)に言及しながらも、アナリシスを代数学と同一視するという点でアラビア代数学における新しい指標を与えている。この同一視がオマル・ハイヤームの独創かどうかはわからない。しかし代数学をアナリシスとすることはサマウアル(1130年頃-1180年頃)で明確にされたと通常言われてきたが、すでにそれ以前のオマル・ハイヤームの時代にも認められていたことが指摘できるのである。

4. 『代数学』へ至る道

『4分円の分割』と『代数学』との相違は上記(5)の $x^3+200x=20x^2+2000$ の解法に見て取れる。『4分円の分割』では半円と双曲線との交点を用いて解を求め、『代数学』でも本質的には同じである。しかし後者では、場合分けを行っていること、具体例ではなく一般的に示していることで、そこには連続的發展がある。このことを見るため、『代数学』における $x^3+bx=ax^2+c$ のタイプの解法を述べておこう。

問題は、「BC を平方の与えられた数 $[a]$, BD を、BC に垂直で、辺の数 $[b]$ に等しい平方の辺 $[\sqrt{b}]$ とする。与えられた数に等しく、底辺が BD の平方である立体を作図する。そしてその高さを S とする。すると線分 S は BC より短いか、等しいか、長いかのどれかになるであろう。」



さて、以上から、 $BC=a$, $BD=\sqrt{b}$, $AB=S$, $BD^2 \cdot S=c$ とする。

ここで $S < BC$, すなわち $(c/b) < a$ のときを考えよう。半円は A, K, C を通り、放物線は A, K, I を通るとし、漸近線を BD, DL とする。 A, K は放物線上にあるので $AD=KD$ 。よって共通部分 $MD \cdot GD$ を除き、 AK を加えると、 $BK=AL$ 。すると $EK/EA=EL/EB$ 。よって $EK^2/EA^2=EL^2/EB^2$ 。ここで $EK^2=EA \cdot EC$ から $EK^2/EA^2=EC/EA$ 。よって $EL=BD$ から、 $BD^2/BE^2=EC/EA$ 。したがって $BD^2 \cdot EA=BE^2 \cdot EC$ 。 BE^3 を加えて、 $BE^3+BD^2 \cdot EA=(EC+EB)EB^2=BC \cdot EB^2=a \cdot BE^2$ 。 $BD^2 \cdot AB$ を加えて、 $BE^3+BD^2 \cdot (EA+AB)=a \cdot BE^2+BD^2 \cdot AB$ 。よって $BE^3+b \cdot BE=a \cdot BE^2+c$ 。

これは解くべき方程式の形をなすので、 BE が解となる。 $S > BC$, $S=BC$ の場合も同様である。以上のように、方法は『4分円の分割』と同じであるが、ここではもはや具体的数値は与えられず、すべて図形上で一般的に解かれる。

5. 歴史的記述

『4分円の分割』には数々の数学者が登場する。まず、古代の数学者とその引用著作を見よう。

エウクレイデス『原論』(VI-16, III-16, VI-8, VI-16, V-9, I-47, XIII-17, II-5, II-6, II-14, VI-14, VI-5, V-14, VI-16)。『デドメナ (ムアティヤート)』。アポロニオス『円錐曲線論』(I-59, II-5, II-6, II-3, I-59, II-8)。アルキメデス『球と円柱』(II-4)。プトレマイオス『アルマゲスト』。また「第一哲学の著者」(サーヒブ・アル=イルム・アル=アウラー)という言葉も見られる。その学問はここでは哲学を指し¹⁸、その著者はアリストテレスである。『代数学』ではさらにアリストテレス『範疇論』の音訳書名カティグリヤスにも言及される。

以上のうち、エウクレイデスとアポロニオスに関しては、『代数学』で次のようにその重要性を指摘している。

本論攷は、アポロニオスの『円錐曲線論』2巻、エウクレイデスの『原論』と『デドメナ』を習得した者を除いては理解されないであろう、ということを知るべきである。これら3巻の内のどの一つにも精通しないのなら、本書は決して理解できないであろう。そして私は、本書ではこれらの3巻のみに言及することにした。

当時すでに『原論』のアラビア語訳は数々存在した¹⁹。アルキメデス『球と円柱について』2巻は、バヌー・ムーサー、サービト・イブン・クッラ、フナイン・イブン・イスハーク、クスター・イブン・ルーカーの4人の学者によって別個に訳された。『円錐曲線論』は1-7巻のアラビア語訳が存在する。ヒラール・イブン・アビー・ヒラール・アッ=ヒムシーは最初の4巻、そして続く3巻はサービト・イブン・クッラが他の版を用いて訳し、全体をバヌー・ムーサーが訂正した。ただし第8巻はアラビア語でもギリシャ語でも現存しない。『デドメナ』は9世紀にイスハーク・イブン・フナインが翻訳し、のちにサービトが改訂した²⁰。この『デドメナ』は、アナリュシスの議論に用いられる基本命題を集めたものである。代数すなわちアナリュシスを多用する問題において『デドメナ』が参照すべき著作である所以である。ただしオマル・ハイヤームは具体的にどの命題を使用するかに関しては述べてはいない。

さらにオマル・ハイヤームは同時代の数学者にも言及する。以下のうち最初の4人は『代数学』にも登場する。

- ・マーハーニー
- ・アブー・ジャファル・ハーズィン (3次方程式を円錐曲線を用いて解く)
- ・アブー・サフル・クーヒー
- ・アブル・ジュード
- ・アブル・ワファー・ブーズジャーニー
- ・アブー・ハーミド・サガーニー
- ・アブー・ナスル・イブン・イラーク (フワーリズム出身の解放奴隷で、 $x^3+x^2=N$ を円錐曲線を用いて解く)

『4分円の分割』では、簡単であるが、以下のように方程式に関するたいへん歴史的に重要な記述が見られる。

マーハーニーはアルキメデスが前提とした問題を代数的記法を用いて解こうとしたが、解けずに「それは不可能である」と述べるにとどまった。その問題とはアルキメデス『球と円柱』第2巻命題4の問題で次のようなものである。

2線分AB, BCが大きさにおいて知られ²¹、結びつけられて1直線になっている。そしてBC対CEの比が知られている。すると『デドメナ』で証明されているように、CEは知られるであろう。ここで、CD対CEの比は、ABの平方対ADの平方の比に等しいとする。

それを解いたのがハーズィンである。さらにアブー・ナスル・イブン・イラークは、アルキメデスが円に内接する正7角形を求める際に用いた前提を円錐曲線を用いて解いた。これは $x^3+x^2=N$ に帰結する問題である。それゆえオマル・ハイヤームは彼を「私の人生における第1級の数学者」と絶賛する。

その後、バグダードのアドウドゥ・ダウラに仕えた、アブル・サフル・クーヒー、アブル・ワハー・ブーズジャーニー、アブー・ハーミド・サガーニーの3人は連立方程式($x+y=10$ ($y>x$)かつ $x^2+y^2+y/x=72$)に取り組んだ。これは $x^2=x^3+x+N$ に帰結するが、これを最終的に解いたのがアブル・ジュードである。しかしながらその結果はサーマーン朝(873-999, イラン系の王朝で首都はブハーラ)の王の図書館に埋もれたままになっていたと付け加えている。それがどの王を指すのかは不明であるが、当時の学問状況が垣間見られる。

3次方程式は19種の内、2次に還元できるものを除くと14種ある。ただしそのうち、 $x^3=N$ は連比ですでに解かれ、また $x^3+x^2=N$ はイラークによって、 $x^2=x^3+x+N$ はアブル・ジュードによって解決されている。いずれにせよこの14種を体系的に解く方法を見いだすことが望まれる。こうしてオマル・ハイヤームは次のように言う。

こうして十分な時間が私に与えられ、成功が私の友であるなら、私はこの術の原理に関してきわめて役立つ諸前提を含む論攷で、これら14種とそれから派生するものや下位区分を並べあげ、可能なものを不可能なものから区別しよう。ただしいくつかに関しては有効であるためには条件が必要である。アッラーに守られた

成功の綱を堅く握りしめ、アッラーに頼りながらではあるが、いかなることにも頼るべきは実にアッラーの御方である。能力と力とはアッラーのもとにある。その無比なる偉大さは賞賛されるべきである。

後の『代数学』においてこれが最終的に完成されることは言うまでもない²²。

6. おわりに

本論放でオマル・ハイヤームは、すでにフワーリズミー以来のアラビア代数学の伝統に繋がる専門用語を用いている。彼らは代数的解法をめざし、さらに多項式の演算などの領域に発展させた。他方で10世紀になるとクーヒーなどによってギリシャ幾何学研究が復興し、アルキメデスやアポロニオスの発展が試みられた。オマル・ハイヤームが登場したのはまさにこの時期である。彼は先行者の2次方程式論を超え、3次方程式論に向かうが、それはギリシャ幾何学とアラビア代数学との融合であった。彼は3次方程式の分類を行い、ある種の方程式については円錐曲線を用いて幾何学的に解いた。またそれにかかわる先行者たちの仕事に言及し、我々に貴重な歴史的資料を示してくれる。この幾何学に代数学を適用するという路線はその後すぐ書かれた『代数学』にも継承され、そこではさらに場合分けや一般的解法など、精緻化されて論じられている。こうして『4分円の分割』は、のちに『代数学』で体系化されるオマル・ハイヤームの数学研究計画を初めて露呈した重要な作品なのである。

ところで本書には数学書にしては珍しく、アッラーへの賛美がしばしば長々と続く。そのうちのひとつを引用しておこう。

その僕の幾人かに捧げられた恵み深さゆえに至高なるアッラーを讃えよ。というのも、恵み深さについて語ることは実に恩恵を施す御方への偉大なる賛辞だからである。「そしてアッラーの恵み深さについて語れ」(『クルアーン』93節11)。この言明は自慢したいがためにこの場所に引き合いに出したと考えるべきではない。というのも、自慢とはうぬぼれ厚顔ほら吹き習慣なのであるから。うぬぼれは卑小な人間にふさわしいものである。というのも彼らの精神は学問の些事なる部分を理解するだけだからである。ところがそれをひとたびつかむや、この全体は諸学問を包含し、まとめあげるものであると彼らは理解する。そして我々を道に迷わし、実在に到達するのを妨げ、救済を授かるのを妨げる誘惑から、アッラーは我々を救いたまう。

セルジューク朝の東方イスラーム地域で活躍したオマル・ハイヤームは、幸運にもサマルカンドではアブー・ターヒル、ネイシャープールではマリク・シャーなどのパトロンに恵まれ著作を完成させることができた。しかしそれは束の間のもので、研究を継続するには政治的にも社会的にもきわめて困難な時代であったことが著作の至る所に伺える²³。その意味で、代数学に関する体系的著作の完成はもはやあり得ないと案じ、この『4分円の分割』で暫定的に自らの代数学研究計画のエッセンスを書き綴ったのかもしれない。

¹ オマル・ハイヤームの人物と著作に関しては次を参照。三浦伸夫「オマル・ハイヤームから見るペルシャ科学の位置づけ」、『比較文明』24号、2008年10月刊行予定。

² Swāmi Govinda Tīrtha, *The Nectar of Grace: 'Omar Khayyām's Life and Works*, Allahabad: Kitabistan, 1941.

3 ジャブルとムカーバラとは計算上の操作の名称で、今日の方程式解法における負項除去と同類項簡約に対応する。前者に定冠詞（アル）がついたものが今日の代数学（algebra）の語源となる。

4 ライデン大学の写本の表紙に記載されているが、内容は不明。おそらく「4, 5, 6次以上の根を開く方法を見いだした」（『代数学』で言及）ことを主張している著作、「インド人たちの開平法、開立法を証明するために私は著作した」（『エウクレイデスの書に関する諸問題の解説』で言及）と言われた著作であろうと推測できる。

5 Woepcke, F., *L'Algèbre d'Omar al-Khayyami*, Paris, 1851.

6 A. R. Amir-Moez, "A Paper of Omar Khayyam," *Scripta Mathematica*, 26(1963), pp.323-337.

7 Rashed, Roshdi et Vahabzadeh, B., *Al-Khayyām mathematician*, Paris : Albert Blanchard, 1999.

8 Rashed, Roshdi and Vahabzadeh, B., *Omar Khayyam. The Mathematician* (Persian Heritage Series, 40), New York: Bibliotheca Persica Press, 2000.

9 ローゼンフェルトとユシュケーヴィッチはオマル・ハイヤーム科学著作集（原典ファクシミリとロシア語訳）を刊行したが、それには『4分円の分割』は収録されていない。

10 ラシェッドとヴェハブザーデの書物は次の点で問題がないとは言えない。（1）序文の解説がデカルトを扱っており、オマル・ハイヤームを主題としていないこと、（2）テキストも解説も執年代順ではなく『4分円の分割』を『代数学』の後におき、前者が後者にどのように発展されたかが必ずしも明確には示していないこと、（3）英訳には原典が掲載されておらず、英訳だけでは十分な研究ができないこと。

11 現代的に解くなら次のようにもなる。 $A(1,0)$, $G(x,y)$, $B(0,1)$, $E(0,0)$ とおき、条件 $1/x=y/(1-y)$, $x^2+y^2=1$ より、 $y^4-2y+1=0$, $y^2=t$ とおくと、 $t^2-2y+1=0$ より、両者を加えて、 $y^2-2y+t^2-t+1=0$ 。よって、 $(y-1)^2+(t-1/2)^2=1/4$ 。この円と放物線 $y^2=t$ との交点 ($t<1$) が求めるものである。

12 本文では II-5, 6 となっているが、これは誤りと思えるので正した。

13 証明略。図の K, M はこの略した箇所で使用。

14 ムタアンシド。「熟考された」という意味であるが、固有名詞かもしれない。

15 ラシェッドは *separons les parties*, モエズは *do simplification* と訳しているが、両者とも具体的にどのような操作を指すのかは示していない。

16 連続量については『代数学』で次のように述べている。「大きさは連続量であるが、『範疇論』では一般的に、『第一哲学』では詳細に述べられているように、連続量には線、面、立体、時間の4種ある。ある人々は場所を連続体の類の下で面を再分割する様態と考える。しかしながら研究すれば彼らにもかかわらずこの意見は無効である。そして我々は次のように正す。場所はある状態の面であると。しかしながらこれの研究は我々がかかわることには関係しない。代数的問題の主題で時間に言及するのは慣習ではないが、それが言及されても許されるであろう。」

17 次元はウブド（複数形はアブアード）。これは本来「離れている」を意味し、「距離」を指す。

18 『代数学』では、「アル=ヒクマ・アル=アツフリー」（第一の叡智の意）という別の語が用いられている。

19 オマル・ハイヤームの用いている『原論』はいわゆるハイベア版とは異なる。「ものとそれ自体との積の結果のものとの積、…その作図はすでにエウクレイデスによって説明され、彼の諸原理についての著作の第13巻17[命題]で証明されている」という。これは立方体の作図であり、これはハイベア版では第15命題であるが、オマル・ハイヤームの使用した『原論』では17命題になっている。

20 詳細は次を参照。三浦伸夫「アラビア数学における幾何学的発想の起源と展開——クーヒーの幾何学的著作から——」、『国際文化学研究』26号、2006、pp.65-106。

21 「大きさにおいて知られる」と「量において知られる」とは『4分円の分割』においては次のように区別されている。「…両者には相違がある。他方、大きさにおいて知られていると言うとき、それはエウクレイデスが『デドメナ』で意味したように、「等しい大きさが、それに対して見いだされるもの」を私は意味するのである。」

22 『代数学』では次のように述べている。「私はこれらの種[1-3次方程式]すべてを研究し、それぞれに関して[解が]不可能なものと可能なものとを証明を用い区別したいとずっと熟望してきたし、今もその思いは変わりません。」

23 政治的にはモンゴルの進入による混乱、社会的には数学を含む科学研究への社会全体の低い評価があげられる。後者はまたアシュアリー派などの台頭とも絡んでいる。