数理解析研究所講究録
第 1625 巻 2009 年 67-77

オイラーの変分法　1

九州大学大学院数理学府　DC 2　尾崎　文秋 (FUMIAKI Ozaki)
Graduate school of Mathematics,
Kyushu University.

1　はじめに

オイラー全集系列 1 の 24 巻である原題

"Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti. "E65
(極大あるいは極小の性質を備える曲線を発見する方法，あるいは一番広い意味で把握された等周問題の解)

は変分法についての著作であり，これは 1744 年に刊行され，レオンハルト・オイラー (1707-1783) が 37 才のときの作品である．変分法 (Calculus variationum) という言葉が最初に表れたのは 1766 年の論文"Elementa Calculi variationum"E296(変分計算の基礎) であるが，変分法は 1744 年の著作に現れているので，この本を変分法のテキストと呼ばせていただきたい．このテキストが刊行されるまでにオイラーは 4 本の論文 (E9,E27,E42,E56) しか刊行しておらず，1736 年に刊行された "Mechanica, volume 1, volume 2"E15,16(力学 1,2) の時点で変分法の理論は作り上げられていたのかもしれない．上記の 2 冊を読んでいない今はただの思いつきでしかないが，いずれ突き詰めてみたいテーマである．

E9 1732 年	De linea brevissima in superficie quacunque duo quaelibet puncta iungente ある曲面において任意の 2 点を結ぶ最短線について
E27 1738 年	Problematis isoperimetrici in latissimo sensu accepti solutio generalis 一番広い意味で理解された等周問題の解
E42 1740 年	De linea celerrimi descensus in medio quocunque resistente ある抵抗媒体における最速降下線について
E56 1741 年	Curvarum maximi minimive proprietate gaudentium inventio nova et facilis 極大あるいは極小の性質を備える曲線を発見する新しくて簡単な方法

変分法は，ヨハン・ベルヌーイの「最速降下線問題」の考察から始まった．オイラーは変分法のテキストの本文中に

(1-6)[1]「この方法はすでに前世紀に無限解析が見つかってすぐ後に著名なベルヌーイ兄弟によって創始され，大きく進歩した．この種の取り扱われた一番初

[1] 本文第 1 章 6 節

めに取り扱われたこの種の問題は力学に関係していて，その上を物体が最も速く降下するところの曲線が探し求められた．この曲線は最速降下線，またはブラキストクローネ曲線と呼ばれた.」

と書いている．ヨハン・ベルヌーイは1697年の論文(ヨハン・ベルヌーイ全集巻I，pp187-193)において「最速降下線問題」の解答がサイクロイドになることを示したときに，これは幾何的に解いたものだったが，その中でサイクロイドを表す微分方程式 $dy = \sqrt{\dfrac{x}{a-x}}dx$ を書いた．これを知ったオイラーは，これを模範例にし，問題を一般化した．そして積分式 $\int Zdx\left(=\int_l \left(x, y, \dfrac{dy}{dx}\right)\right)$ の極値問題を解くことで変分法の問題が解決することを発見し，続いて次々に Z を複雑にして自身の変分法を発展させて行った．このようにオイラーは力学の問題に無限解析を応用し，一つの学問を作り上げたのである．

このテキストをラグンランジュが読み，「解析力学」を作り上げたことはよく知られている．

2 変分法

オイラー全集はBirkhäuser社から出版されているものを使用した．変分法のテキストが収録されている巻24は，この巻を編纂したドイツ生まれのギリシャ人数学者Constantin Carathéodory(1873-1950)の解説がドイツ語で57ページあり，ラテン語本文は全308ページで構成は6つの章と2つの付録からなる．

＜目次＞

1. De methodo maximorum ac minimorum ad lineas curvas inveniendas applicata in genere
   一般に適用される曲線を見つけるための極大極小法について

2. De methodo maximorum ac minimorum ad lineas curvas inveniendas absoluta
   曲線を見つけるための極大極小の絶対的方法について

3. De inventione curvarum maximi minimive proprietate praeditarum, si in ipsa maximi minimive formula insunt quantitates indeterminatae
   極大極小式の中に不確定量が存在している場合に，極大あるいは極小の性質を備えている曲線を見つけることについて

4. De usu Methodi hactenus traditae in resolutione varii generis quaestionum
   様々な種類の問題の解決における，これまでに教示された方法の利用について

5. Methodus inter omnes curvas eadem proprietate praeditas inveniendi eam, quae maximi minimive proprietate gaudeat
   ある一つの同じ性質を備える全ての曲線の間で，極大あるいは極小の性質を備えたものを見つける方法

6. Methodus inter omnes curvas pluribus proprietatibus communibus gaudentes eam determinandi, quae maximi minimive proprietate praedita sit
より多くの共通の性質を備えるすべての曲線の間で，極大あるいは極小の性質を持つものを決定する方法

付録 1. De Curvis elasticis
弾性曲線について

付録 2. De Motu Proiectorum in medio non resistente, per Methodum maximorum ac minimorum detertminando
極大または極小の一般方法によって決定されるべき，抵抗の無い媒体における Proiectus の運動について

各章の内容は 1 章では変分法の基礎理論，2，3 章では絶対的方法，4 章は例題，5，6 章では相対的方法について書かれている．付録は両方とも力学への応用が書いてあるようである．

オイラーは変分法を絶対的方法と相対的方法の 2 つ分けて考えているのである．

1. 絶対的方法
ヨハン・ベルヌーイの最速降下線問題を手がかりに発展させた問題を取り扱う方法であり，ある 2 点間にあるあらゆる曲線を考えそれらについて極値を持つ曲線を見つける方法．$\int Zdx$ の Z を複雑にさせていき，より高次な微分方程式を作り出している．そしてさらに Z の中に不定積分量 (quantitas integralis indeterminata) が入り込んでいる場合を考え，そこから微分方程式が作り出している．

2. 相対的方法
ヤコブ・ベヌルーイの等周問題を手がかりに発展させた問題を取り扱う方法であり，曲線の長さが一定になる閉じた曲線を考え，それらについて極値を持つ曲線を見つける方法．

現在 3 章までが解読できているので，本稿では変分法の絶対的方法について説明する．

2.1 絶対的方法 (1)Z の中に不定積分が存在しない場合

1 章では記号の取り扱いが書かれている．例えば高階微分は以下のように定められている．ここで dx は定量としている．

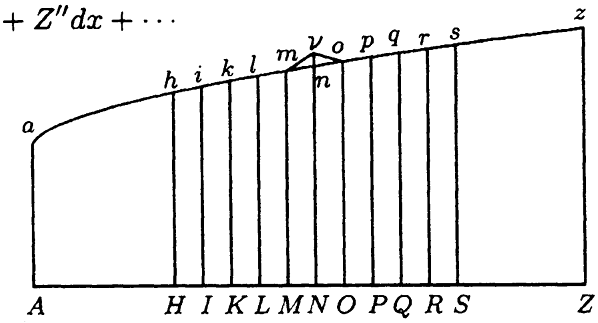
$$\begin{aligned}
dy &= pdx \\
ddy &= dpdx &&= qdx^2 \\
d^3y &= dqdx^2 &&= rdx^3 \\
d^4y &= drdx^3 &&= sdx^4 \\
d^5y &= dsdx^3 &&= tdx^5
\end{aligned}$$

また p,q,r,s,etc. は次のようにも定義されている．このとき y' は切除線 (x 軸) を dx 等分したときの向軸線 (y 軸)y のすぐ後ろの軸である．以下 y'',y''',y^{IV},etc. と続く．

$$\begin{array}{rcl|rcl} p &=& \dfrac{y'-y}{dx} & p &=& \dfrac{y'-y}{dx} \\ p' &=& \dfrac{y''-y'}{dx} & p_{,} &=& \dfrac{y-y_{,}}{dx} \\ &\vdots&&&& \\ q &=& \dfrac{y''-2y'+y}{dx} & q &=& \dfrac{y''-2y'+y}{dx} \\ &\vdots&&&& \end{array}$$

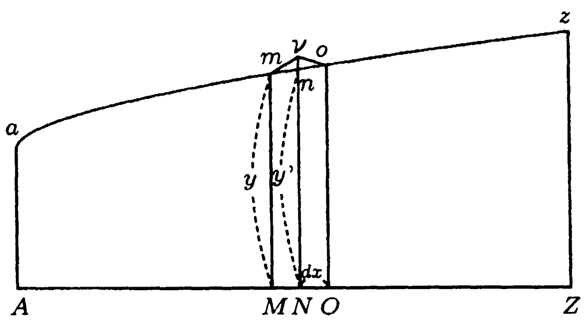
$$r = \frac{y'''-3y''+3y'-y}{dx^3}$$
$$\vdots$$

オイラーは積分式を
$\int Zdx = \cdots + Z_{,}dx + Zdx + Z'dx + Z''dx + \cdots$
$= \sum Zdx$
のように無限小等分して，
話を展開している．(右図)
この曲線 az を変分し，
積分式を微分して
この積分式に極値を与えるような
曲線を求めることを問題にしている．



このような曲線とは無限小変分を受けても積分式の値が変化しない曲線である．よって曲線は方程式 $d \cdot \int Zdx = d \cdot \sum Zdx = \sum dZdx = 0$ から導かれる微分方程式を満たす．
この微分方程式は一般にオイラー方程式と呼ばれている．そしてこの微分方程式を解くことにより曲線を求めている．実際には次のように微分方程式を導いている

$\boxed{\text{問題}}$ Z は，x，y，p の関数とするとき，$\int Zdx$ が極大または極小になるような曲線を見つけよ (下図参照)．



このとき $dZ = Mdx + Ndy + Pdp$ となる．

図の $AM = x$,$Mm = y$,$Nn = y'$ と置く．このとき MN に Zdx が，NO に $Z'dx$ が対応する．

今無限小 $n\nu$ だけ y' を増加させると，
p は，$p = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'-y}{dx}$ だから $\dfrac{\nu}{dx}$ だけ増加し，$p' = \dfrac{y''-y'}{dx}$ だから p' は $\dfrac{n\nu}{dx}$ だけ減少する．よって微分 $dZ = Mdx + Ndy + Pdp$ と $dZ' = M'dx + N'dy' + P'dp'$ がそれぞれ

$$Mdx + Ndy + P\big(dp + \frac{n\nu}{dx}\big)$$

$$M'dx + N'(dy' + n\nu) + P'\big(dp' - \frac{n\nu}{dx}\big)$$

に変わる．今はこの２つだけが曲線の変分によって影響を受ける．
従って，
$d \cdot \int Zdx = \sum dZdx$
$= (Mdx + Ndy + Pdp) + (M'dx + N'dy' + P'dp')$
$- \left(Mdx + Ndy + P\big(dp + \frac{n\nu}{dx}\big)\right) - \left(M'dx + N'(dy' + n\nu) + P'\big(dp' - \frac{n\nu}{dx}\big)\right)$
$= n\nu \cdot (P + N'dx - P')$
となる．ここで微分計算により $P' - P = dP$ であり，そして N' の代わりに N と置いてよいので，

$$\sum dZdx = n\nu \cdot (Ndx - dP)$$

となる．そしてこれを０と置くと求める曲線の方程式が与えられる．すなわち，

$$0 = Ndx - dP \quad \text{または} \quad N - \frac{dP}{dx} = 0$$

これでオイラー方程式を導かれた．

Z に含まれる導関数の次数に応じて微分方程式の階数が増えていくことを利用すると Z が x，y，p，q の関数の場合には

$$dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq$$

と置くとき，オイラー方程式

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} = 0,$$

さらに一般に Z が x，y，p，q，r，s，t，etc. の関数の場合には

$$dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + Sds + Tdt + \text{etc}$$

と置くとき，オイラー方程式

$$0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \frac{d^5T}{dx^5} + \text{etc.}$$

が導かれる．

例 ＜2章38節 VII＞

$\int (x^2+y^2)^n dx\sqrt{1+p^2}$ が極大または極小になるような曲線を見つけよ.

この例では $Z=(x^2+y^2)^n\sqrt{1+p^2}$ 全微分を作ると,

$$dZ = 2n(x^2+y^2)^{n-1}(xdx+ydy)\sqrt{1+p^2} + \frac{(x^2+y^2)^n pdp}{\sqrt{1+p^2}}$$

となる. これより $N=2n(x^2+y^2)^{n-1}y\sqrt{1+p^2}$, $P=\dfrac{(x^2+y^2)^n p}{\sqrt{1+p^2}}$ となる.

これらを先ほどのオイラー方程式 $N-\dfrac{dP}{dx}=0$ に代入すると, 求める曲線に対する方程式は,

$$\begin{aligned} 2n(x^2+y^2)^{n-1}dx\sqrt{1+p^2} &= d\frac{(x^2+y^2)^n p}{\sqrt{1+p^2}} \\ &= \frac{2n(x^2+y^2)^{n-1}p(xdx+ydy)}{\sqrt{1+p^2}} + \frac{dp(x^2+y^2)^n}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

となる. これを $(x^2+y^2)^{n-1}$ で割り, $\sqrt{1+p^2}$ を掛けると

$$2nydx = 2nxdy + \frac{(x^2+y^2)dp}{1+p^2} \quad 言い換えると \quad \frac{2n(ydx-xdy)}{x^2+y^2} = \frac{dp}{1+p^2}$$

となる.

この方程式の両辺は三角関数を用いて積分することができる.

$\dfrac{2n(ydx-xdy)}{x^2+y^2}$ において, $\tan\theta=\dfrac{x}{y}$ と置くと,

$x=y\tan\theta$, $dx=dy\tan\theta+\dfrac{yd\theta}{\cos^2\theta}$

$$\begin{aligned} \frac{2n(ydx-xdy)}{x^2+y^2} &= \frac{2n\left(y\left(dy\tan\theta+\frac{yd\theta}{\cos^2\theta}\right)-y\tan\theta dy\right)}{y^2\tan^2\theta+y^2} \\ &= \int\frac{2n\cdot\frac{y^2d\theta}{\cos^2\theta}}{y^2(\tan^2\theta+1)} = \int 2nd\theta = 2nd\theta + C_1 \\ &= 2n\arctan\frac{x}{y}+C_1 \end{aligned}$$

同様に $\dfrac{dp}{1+p^2}$ において $p=\tan\theta$ と置くと,

$$\begin{aligned} \int\frac{dp}{1+p^2} &= \int d\theta \\ &= \theta + C_2 = \arctan p + C_2 \end{aligned}$$

よって微分方程式 $\dfrac{2n(ydx-xdy)}{x^2+y^2}=\dfrac{dp}{1+p^2}$ を積分すると，

$$2n\arctan\frac{x}{y}+C_1=\arctan p+C_2$$

となる．ここで定数 C_2-C_1 を $\arctan k$ と置くと tan の加法定理により

$$2n\arctan\frac{x}{y}=\arctan p+\arctan k=\arctan\frac{p+k}{1-pk}$$

となる．よって

$$\frac{x}{y}=\tan\left(\frac{1}{2n}\arctan\frac{k+p}{1-kp}\right)=T$$

となる． ここでもし $2n$ が有理数ならば，T は p の代数関数になる．

$x=Ty$ もしくは $y=\dfrac{x}{T}$ だから，$dy=pdx=\dfrac{dx}{T}-\dfrac{xdT}{T^2}$ すなわち

$$xdT=Tdx-pT^2dx$$

となる．よって，

$$\frac{dx}{x}=\frac{dT}{T-pT^2}+\frac{Tdp}{1-pT}-\frac{Tdp}{1-pT}$$

となる．これを積分すると，

$$\log x=\log\frac{T}{1-pT}-\int\frac{Tdp}{1-pT}$$

が生じる．

ここで指数 n の種々の値に応じて生じる曲線の性質を知るためにいくつかの場合を考察する．

I. $n=\dfrac{1}{2}$ すなわち $2n=1$ のとき $\arctan\dfrac{x}{y}=\arctan\dfrac{k+p}{1-kp}$ となる，そして

$$\frac{1}{2}=\frac{k+p}{1+kp}=\frac{kdx+dy}{dx-kdy}$$

となる．言い換えると，

$$xdx-kxdy=kydx+ydy$$

となる．これを積分すると

$$x^2-y^2=2kxy+C$$

が生じる．これは等辺双曲線の方程式である．

II. $n=1$ つまり $2n=2$ のとき $2\arctan\dfrac{x}{y}=\arctan\dfrac{k+p}{1-kp}$ すなわち

$$\arctan\frac{2xy}{y^2-x^2}=\arctan\frac{k+p}{1-kp}$$

となる．$p=\dfrac{dy}{dx}$ により $\dfrac{2xy}{y^2-x^2}=\dfrac{kdx+dy}{dx-kdy}$．すなわち

$$2xydx-2kxydy=ky^2dx-kx^2dx+y^2dy-yxdy$$

となる．これを積分すると

$$yx^2=ky^2x-\frac{1}{3}kx^3+\frac{1}{3}y^3+C \quad \text{もしくは} \quad y^3+3ky^2-3yx^3-kx^3=C$$

となる．

III. $n=\dfrac{3}{2}$　すなわち　$2n=3$ のとき

$$3\arctan\frac{x}{y}=\arctan\frac{3y^2x-x^3}{y^3-3yx^2}=\arctan\frac{kdx+dy}{dx-kdy}$$

これより，

$$3y^2xdx-3ky^2dy-x^3dx+kx^3dy=ky^3dx+y^3dy-3kyx^2dx-3yx^2dy$$

となる．これを積分すると

$$\frac{3}{2}y^2x^2-ky^3-\frac{1}{4}x^4+kyx^3-\frac{1}{4}y^4=C$$

すなわち

$$y^4+4ky^3x-6y^2x^2-4kyx^3+x^4=C$$

が与えられる．

このようにして任意の n の値に対して曲線の方程式を手に入れることができる．すなわち一般に，

$$2n\arctan\frac{x}{y}=\arctan\frac{2ny^{2n-1}x-\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}y^{2n-3}x^3+\text{etc.}}{y^{2n}-\frac{2n(2n-1)}{1\cdot 2}y^{2n-2}x^2+\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}y^{2n-4}x^4-\text{etc.}} \tag{1}$$

$$=\arctan\frac{(y+x\sqrt{-1})^{2n}-(y-x\sqrt{-1})^{2n}}{(y+x\sqrt{-1})^{2n}\sqrt{-1}+(y-x\sqrt{-1})^{2n}\sqrt{-1}} \tag{2}$$

式 (1) と (2) について，
(1) は $\tan\theta$ の $2n$ 倍角の公式を用いて変形したものである．
(2) はオイラーの公式を用いている．以下オイラーの方法を推測してみる．
$\arctan\dfrac{x}{y}=\theta$ と置くと，$\dfrac{x}{y}=\tan\theta$ となる．
$\tan 2n\theta=\dfrac{\sin 2n\theta}{\cos 2n\theta}$ に

$$e^{2n\theta\sqrt{-1}}=\cos 2n\theta+\sqrt{-1}\sin 2n\theta \quad \text{と} \quad e^{-2n\theta\sqrt{-1}}=\cos 2n\theta-\sqrt{-1}\sin 2n\theta$$

を代入すると，

$$\tan 2n\theta = \frac{\dfrac{e^{2n\theta\sqrt{-1}} - e^{-2n\theta\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}}{\dfrac{e^{2n\theta\sqrt{-1}} + e^{-2n\theta\sqrt{-1}}}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)^{2n} - (\cos\theta - \sqrt{-1}\sin\theta)^{2n}}{(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)^{2n} + (\cos\theta - \sqrt{-1}\sin\theta)^{2n}}$$

分母分子を $(\cos\theta)^{2n}$ で割り，$\tan\theta = \dfrac{x}{y}$ を代入して計算をすると

$$\tan 2n\theta = \frac{(y + x\sqrt{-1})^{2n} - (y - x\sqrt{-1})^{2n}}{(y + x\sqrt{-1})^{2n}\sqrt{-1} + (y - x\sqrt{-1})^{2n}\sqrt{-1}}$$

よって

$$2n\arctan\frac{x}{y} = \arctan\frac{(y + x\sqrt{-1})^{2n} - (y - x\sqrt{-1})^{2n}}{(y + x\sqrt{-1})^{2n}\sqrt{-1} + (y - x\sqrt{-1})^{2n}\sqrt{-1}} \tag{2}$$

となる．だから，

$$\frac{kdx + dy}{dx - kdy} = \frac{(y + x\sqrt{-1})^{2n} - (y - x\sqrt{-1})^{2n}}{(y + x\sqrt{-1})^{2n}\sqrt{-1} + (y - x\sqrt{-1})^{2n}\sqrt{-1}}$$

となる．これを展開すると，

$$\begin{aligned} &kdx(y + x\sqrt{-1})^{2n}\sqrt{-1} + kdx(y - x\sqrt{-1})^{2n}\sqrt{-1} \\ &+kdy(y + x\sqrt{-1})^{2n} - kdy(y - x\sqrt{-1})^{2n} \\ &= -dy(y + x\sqrt{-1})^{2n}\sqrt{-1} - dy(y - x\sqrt{-1})^{2n}\sqrt{-1} \\ &+dx(y + x\sqrt{-1})^{2n} - dx(y - x\sqrt{-1})^{2n} \end{aligned}$$

が生じる．この微分方程式の積分は

$$k(y + x\sqrt{-1})^{2n+1} - k(y - x\sqrt{-1})^{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{-1}}(y + x\sqrt{-1})^{2n+1}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{-1}}(y - x\sqrt{-1})^{2n+1} + C \quad \text{すなわち} \quad C = (y + x\sqrt{-1})^{2n+1}(k\sqrt{-1} + 1)$$

$$+(y - x\sqrt{-1})^{2n+1}(1 - k\sqrt{-1})$$

ところが一般に

$$\begin{aligned} &(y + x\sqrt{-1})^{2n+1} + (y - x\sqrt{-1})^{2n+1} \\ &\qquad = 2(y^2 + x^2)^{\frac{2n+1}{2}}\cos(2n+1)\arctan\frac{x}{y} \end{aligned}$$

だから，この値の代入によって虚量の無い形の微分方程式の解が生じる．

$$2k(y^2 + x^2)^{\frac{2n+1}{2}}\sin(2n+1)\arctan\frac{x}{y}$$

$$= 2(y^2+x^2)^{\frac{2n+1}{2}}\cos(2n+1)\arctan\frac{x}{y} - C$$

または任意定量 k と C があるから，

$$-\frac{1}{2}C = (y^2+x^2)^{\frac{2n+1}{2}}\left(k\sin(2n+1)\arctan\frac{x}{y} - \cos(2n+1)\arctan\frac{x}{y}\right)$$

もし n が有理数ならば，この方程式は代数的である．$-\frac{1}{2}C = C'$ と置き，任意円弧 $= g$ と置くと，求める曲線の方程式は，

$$C' = (y^2+x^2)^{\frac{2n+1}{2}}\sin\left(g + (2n+1)\arctan\frac{x}{y}\right)$$

という形になる．

2.2　絶対的方法　(2) Z の中に不定積分が存在する場合

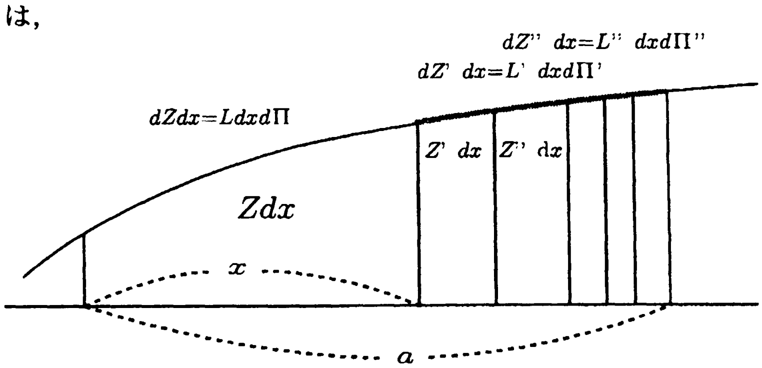
$\int Zdx$ の Z に不定積分量 $\int [Z]dx$ が入っているときのオイラー方程式を作り出している．続いてオイラーは，

$$\int_l \left\{\int [Zdx]\right\}dx$$

はじめに不定積分量 $\int [Z]dx = \Pi$ と置き，$dZ = Ld\Pi$ という形になる場合を考察する．変分の原理は今までと同じで，ある一点だけを変分させて $d[Z] = [M]dx + [N]dy + [P]dp + [Q]dq + \mathrm{etc.}$ への影響を考えているのだが，この場合 $dZ = Ld\Pi$ なので

$$\begin{aligned}
d\cdot Zdx &= Ldx\cdot d\Pi\\
d\cdot Z'dx &= L'dx\cdot d\Pi'\\
d\cdot Z''dx &= L''dx\cdot d\Pi''\\
d\cdot Z'''dx &= L'''dx\cdot d\Pi'''\\
d\cdot Z^{IV}dx &= L^{IV}dx\cdot d\Pi^{IV}\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

となる，これだと全ての点に影響が現れてしまうように見える．オイラーはここで，どこからどこまで変分の影響があるかに注意し，定積分のような考えを導入している．実際には，



全体 (本文では H) から定量 Zdx を引いた部分にのみ $Ld\Pi$ の影響が現れ．そしてオイラー方程式

$$0 = n\nu \cdot \left([N](H - \int Ldx) - \frac{d[P](H - \int Ldx)}{dx} + \frac{dd[Q](H - \int Ldx)}{dx^2} \right. \\ \left. - \frac{d^3[R](H - \int Ldx)}{dx^3} + \frac{d^4[S](H - \int Ldx)}{dx^4} - \frac{d^5[T](H - \int Ldx)}{dx^5} \right)$$

が与えられている．

3 研究課題

ここでは触れることができなかったが，オイラーはオイラー方程式が出てくるたびに数々の計算例を与えてくれている．それらは無限解析を用いて複雑な計算が展開されていて計算の達人と呼ばれた足跡がよく見て取れる．では変分法が生まれたときから複雑な数学が必要だったのだろうか？ここで私は，この巻 24 ではオイラーが独自に変分法を発展させていって必要となった数学が書かれているのではないか，と考える．

オイラーが一番始めに書いた論文 E1 は変分法についての論文である．この論文は全集の力学の分野である第 II 系列に収録されている．

彼の変分法への興味は最初から旺盛で，変分法を発展させて数学が必要になり，時には数学が発展した結果，変分法が発展したことがあったかもしれない．これは 3 章の終わりにあるのだが，$\int \frac{dx\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{v}}dx$ の v が明示的に与えられず，$dv = gdx = hv^n dx\sqrt{1+p^2}$ のような微分方程式を通して与えられている問題がある．この道理から行けば積分式の中をもっと複雑な式に変形させれば，元の問題も複雑になる．このようなことを念頭に置きつつ，続く 4 章以降の等周問題から生まれた変分法の相対的方法に挑みたいと思う．

文献

[1] L.Euler , "Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti. " , Birkhäuser,opera omnia I-24,1952.