

特異性の概念は近代数学へ如何に寄与したか (III) - 2

— 20 世紀後半の主題 (1) : 前半から引き継ぐもの (初期概念の系列) —

代表例 : 多次元留数理論 特異点の解消と二つの応用 多変数解析関数の解析接続

阿部剛久 (Takehisa Abe)

芝浦工業大学 (Shibaura Institute of Technology)

この研究は標題に示されたように、‘特異性の概念’が近代数学に遺した、また遺しつつある成果と影響を現代史的な立場から考察し、‘特異性に関わる数学’が近代数学の形成と数理科学に果たしてきた固有の役割と意義について理解し、それが数学史に占める位置を確かめようとするものである。本題 (III) - 1 ([1]) で予め述べられた代表的主題の順序に沿いながら、今回は、20 世紀後半の初期概念につながる主題の確認とその中から選んだ代表例の主要な数学的意義を説明し、これらの小史に触れる。このシリーズ (III) - 2 は、以後何回かにわたって述べられるが、今回 (20 世紀後半の主題 (1)) はその第一回目である。

今回のための復習と準備 ([1] (それ以前は [2], [3] を参照)) 特異性概念の初期のもの : Riemann による複素関数論的特異性、Cayley による代数幾何学的特異性、Hankel による測度論的特異性、Weierstrass による複素関数論的特異性を、まとめて「初期概念の系列」と呼び、そのうちの Hankel によるものは 20 世紀の前半にその特異性が Lebesgue 測度の概念に吸収されることによってその初期の面影を失ったことにより、20 世紀後半においては、この特異性を除いた残る三種類のものについてその後の発展が今回の話題となる。

ここでは、これら三種類の特異性からなる初期概念の系列を簡単に系列 A と先に略称した。系列 A が 20 世紀の前半までに築いた数学 ([3]) の、後半に引き継がれて発展したものの中から主要なものを再び要約するとともに、先の本題 [1] への補足説明を行い、今回の議論の準備を完結する。(ここでも、当初の議論 [2] にしたがって、複素関数論を方法的に異なる二つの特徴に基づいて、それぞれを R 系 : Riemann の系列、W 系 : Weierstrass の系列として、区別する)。

— 前半から引き継ぐ主題 —

1. 複素関数論 (R 系) の場合

1880 年代から 1940 年代にかけて、一変数の複素関数論または複素解析の発展における特異性の問題に関わる主要なものだけでも、「値分布論の一般化」、「有理形関数の逆関数問題」をはじめ、「集積値集合の理論の建設」、「留数理論の開発的発展」が行われた。このうち、特に「集積値集合の理論の建設」と「留数理論の開発的発展」は、20 世紀後半に引き継がれている。前者は、特異点近傍の解析関数の値分布論から発生したものであるが、F. Iversen と W. Gross (1920) 以来、1940 年代にかけて多数の人々の貢献によって著しい成果を得たが、20 世紀後半に入ってからまた新たな問題を提起しつつ研究が続けられている (たとえば [4])。また後者は、比較的長い歴史をもつが、20 世紀前半まで基礎の拡充と結果の多方面への応用を生み、今日もなお新しい実用的応用の開発がなされている (たとえば [5])。他方で、多変数の複素関数論または多変数解析関数論とよく呼ばれるこの分野は、Riemann や Weierstrass の頃から研究が始まったようであるが、本格的な研究は、F. Hartogs のアーベル関数の定義に必要な補助定理としての除去可能な特異点に関する仕事 (1906) を発端に、彼の重要な一連の研究によって出発するようになった。彼の業績のうち、多変数解析関数の解析接続に関する仕事は W 系に属した問題であるから、後ほど取り上げることになる。それ以来、この分野は種々の変遷を経て (途中、1936-50 年代前半の岡 潔による決定的な貢献を含んで)、20 世紀後半は、その理論の解析的多様体から解析空間 (特異点をもつ解析的多様体) への一般化をはじめ、それに伴う理論の再構成、またそれまでの理論と方法の多方面への応用的研究とその開発は特に顕著である (たとえば [6] - [9])。特異性の問題に限れば、一変数の場合に対置するものは、特に多変数の留数理論とその応用である。簡単に「多次元留数理論」と呼ぶことにする。この理論は 20 世紀前半が始まるとともに本格

化し、この世紀の後半に近代化された理論として一新された。後にその歴史とともにやや詳しく述べられる。

2. 代数幾何学の場合

Cayley 以来の特異性は、代数曲線の重複点とその点における接線、その他の特異性 (III) - 1) だけでなく、これらは代数曲面をはじめ高次元の代数多様体へ一般化され、特に特異点は、多様体の生成イデアルの多項式による Jacobi 行列の階数が多様体の次元より小さい点として新たに定義され、このような特異点をめぐって、平面代数曲線に対する M. Noether (1871) 以来の、多様体の次元数 n と標数 p の違いによる「特異点の解消・還元問題」の解決は、主にイタリアの代数幾何学派の貢献の後に 20 世紀前半までは O. Zariski による n が 3 以下、 p が 0 の特別な場合に対する成果に限られていたが、後半に入って、まず S. S. Abhyankar と広中平祐によって一般の n に対して、それぞれ $p \neq 2, 3, 5$ (1956); $p = 0$ (1964) の場合を解決したことによって多くの問題が本質的に解決をみた (たとえば [10])。特に解析学的な問題の解決への貢献は注目すべきであろう (たとえば [11])。次にやや遅れて研究が開始したのは「特異点 (近傍) の位相幾何学的性質・分類」による特異点の特徴づけは、代数曲面に関しては、E. Picard と S. Lefschetz の寄与は大きく、最終的には Zariski (1948) によって解決を得た。曲線の場合は、いくぶん遅れて K. Brauer (1929) に始まって、曲面の場合より早く Zariski (1931) によって解決を得ている ([10], [12], [13])。高次元代数多様体を含む一般の解析的多様体に対して、系列 B (新概念の系列) の特異点 (理) 論にも深く関連していて、現在この新分野は 20 世紀後半の大きな課題に成長して極めて活発に研究されている (たとえば [14])。代数曲線またはリーマン面の理論において一変数の代数関数体の微分形式とその周期 (積分) や留数はよく知られているが、代数曲面上の微分形式の積分 (ここでは簡単に '代数積分' と以前から呼んでいる) に関しては 19 世紀末に近い頃から H. Poincaré, Picard 等によって端緒を得て、特に Picard と Lefschetz によるこの方面への古典的な寄与は著しい ([10], [12], [13])。これらの結果はその後、G. de Rham 等の努力によって引き継がれ、20 世紀後半以降は彼らの結果を踏襲しながら W. V. D. Hodge - M. F. Atiyah ([15]) の近代的手法に基づく結果は高次元代数多様体上の代数積分、すなわち「多変数代数積分」の理論に新しい道を開いた。その含む問題は、高次元代数多様体、もっと一般に解析的多様体上に特異点をもつ有理微分形式の周期や留数に関する定理や公式の確立にあるが、応用問題に関連して、この種の積分の消失は曲面上の積分のサイクルについての位相的性質に関連することから、上記の特異点 (理) 論の分野にも属するが、同時に「多次元留数理論」の問題にも関係する。代数幾何学における特異点問題は、その基礎とともに応用面も重視して、「特異点の解消・還元問題とその応用」、また新しい分野にも関係する位相的研究を重視すると同時に、その応用的見地に立つとき、Picard - Lefschetz の (近代化された) 理論にもおよぶことから、「特異点 (近傍) の位相幾何学的性質・分類とその応用」は 20 世紀後半の代数幾何学における特異性概念の主要テーマとみなされる。

3. 複素関数論 (W 系) の場合

微分可能性に基づく R 系複素関数論に対して、W 系複素関数論は冪級数に基づいて議論されることはよく知られている。ここでは後者の場合における特異性問題を考える。ここにも一変数の場合から多変数のそれにかけて 20 世紀の後半におよぶ問題が存在する。詳しくは [3] を参照して戴く。一変数の場合の解析接続について要約すれば、一定の領域で正則な解析関数がある領域の境界点をすべて特異点として領域の外へ解析接続できないとき、この領域の境界を自然境界と呼んだ。W 系の特異性に関する中心的テーマは解析接続に伴う問題であった。その最初のものとして、Weierstrass と E. I. Fredholm による冪級数の収束円が自然境界となるための条件の研究 (1890) をはじめ、収束円周を自然境界として、その境界内の収束領域内で冪級数で与えられた解析関数の特異性、すなわち冪級数の解析的分枝の有理形半径 (これを越えた範囲では極以外の特異点が見れる) に関する Weierstrass と J. Hadamard による「自然境界に対する空隙理論」の開始 (1892) から、その結果の拡張や G. Pólya による再結果 (1942) に至るまでの多くの数学者たちによる貢献が続いた。次に起った新しい概念は、二つの Laurent 級数の対によって定められる広義の関数要素の直接接続全体を広義の解析近傍として関数要素全体の位相空間から出発する広義の解析接続の概念に基づいて、狭義の場合に類似の拡張された接続に対する特異点の分類をはじめ、上記の位相空間の連結成分として定義される広義の解析関数の通常および真性特異点を定めることができる。これらの研究を総称したものが「広義解析接続に

伴う特異性」である (たとえば [16])。これはそれ以前の上記の一連の研究成果を踏まえて、これらの拡張を目指して行われてきたもので、20世紀の後半の主題の一つであったとみなされる。他方、解析接続に伴う特異現象は多変数の場合は一変数の場合と異なることに注目しなければならない。これに関する研究は、1のR系において触れた Hartogs の仕事に始まる。その要点は、Weierstrass による '任意の領域に対して、その境界を自然境界とする解析関数の存在予想' は、Hartogs によって多変数の場合は否定された。すなわち、多変数正則関数に対して、'任意の領域の境界は必ずしも自然境界ではない' ということから、ある領域で正則で、その境界を自然境界とする領域 (正則領域) の研究が進み、H. Cartan と P. Thullen による正則凸性の概念の導入による正則領域の特徴づけ (1932) は大きな成果をもたらした。正則領域でない単葉な領域で正則な関数はすべてその領域より真に大きい領域へ解析接続されるという、接続可能な拡大領域 (解析的拡大) の存在が見出され、解析的拡大のうちの最大なものは、当初の領域を含む最小の正則領域である。この領域を Thullen は正則包と称した。このより厳密な定義に基づいて、一変数の場合を含めて解析接続の再論が可能であるが、より重要であることは、これらを契機に (大雑把に述べれば) '擬凸領域は正則領域か' (原初的な Levi の問題) の解決へ向けて、20世紀前半40年代から後半50年代前期にかけて岡をはじめ何人かの人々の努力による成功を得て、以後今日まで一般化されたこの問題は種々研究され成果を収めてきた。これは、本来一変数の場合における自然境界、したがって境界上の点を、そこから冪級数は接続不能の意味で特異点と呼んだが、多変数の場合は、この意味で解析関数の実質的な挙動は正則領域または正則包に限られるという、このような解析接続の生み出す特性は、20世紀後半の比較的初期において自然科学や数理工学への応用を見出していたことは注目されよう。ここではこの特性とその応用を解析接続の広い意味の特異性問題と捉えることによって「多変数解析関数の解析接続」をW系の多変数の場合の主題の一つとする。

— 主題の代表例 —

最後に、以上に述べられた20世紀前半から後半に引き継がれた初期概念の系列において、主要テーマ七題をここですべて詳述することは不可能である。よって、純粋のみならず、応用的意義も重視して、興味深い我が国では極めてその方面の記述が少ないものに限って選択すれば、下記の主題が代表例となろうと考える：

1. 多次元留数理論 2. 特異点の解消と二つの応用 3. 多変数解析関数の解析接続

例1は解析学的留数概念の代数的定式化とその周辺、2は広中の定理の特殊だが興味深い二つの解析学的、代数学的問題への応用、3は一変数の場合と異なる解析接続とその物理学への応用を、それぞれ中心とした概略的説明である。これらの問題を通して、特異点の存在やその解消が考察対象に如何に影響し、数学的成果へとつながってきたかを理解し得るであろう。

代表例の展開 言葉や概念の定義から始まって基本的な諸結果、およびこれらの応用等に関する体系的叙述はここでは不可能であるから、問題の核心に関わる事柄を中心的かつ優先的に述べることにして、他の重要事項は「補足」で、全体的な概要や発端から現状までの史的展望は「主題の歩み」で触れられる。

1. 多次元留数理論

(1) 留数 (写像) の代数的定式化 □ 最初に一変数の場合の留数に関する基本事項をふり返っておこう。X を複素平面または一般のリーマン面、有理関数 $f(z)$ による $\omega = f(z)dz$ を X 上の1次有理微分形式、

$S = \{a_j\}_{j \in J}$ を ω の極 a_j の集合、 $\text{res}(\omega, a_j)$ を a_j における ω の留数とする。このとき、 a_j を中心とする正の

向きにとられた円を γ_j 、これを境界とする開円板は a_j を除いて S のどの点とも交わらないとし、S を内部に

含む X 上の単純閉曲線を γ 、領域： $\gamma \cup$ その内部 - S で正則な ω に対して、Cauchy の積分定理から、容易

に留数定理： $\int_{\gamma} \omega = \sum_{j \in J} 2\pi i \text{res}(\omega, a_j)$ ($2\pi i \text{res}(\omega, a_j) = \int_{\gamma_j} \omega = 2\pi i c_{-1, j}$: $f(z)$ のローラン展開の主要部

の第1係数) (1) を得る。ここで、 I の部分集合を $J (\subseteq I)$ 、 $\gamma_{j \in J} \sim \gamma$ ($\gamma_{j \in J}$ は γ にホモログ、すなわち $\gamma_{j \in J}$ と γ は1次元ホモロジー群 $H_1(X \setminus S)$ の同じ1次元ホモロジー類を代表するサイクル) かつ

$\{\gamma_{j \in J}\}$ がこの群の同じホモロジー類の基底であれば、 $\gamma \sim \sum_j \alpha_j \gamma_j$ 、 $\alpha_j : \gamma$ の係数 $\in \mathbb{Z}, \mathbb{R}$, または \mathbb{C} 。よ

って、定理 (1) は、 $\int_{\sum_{j \in J} \alpha_j \gamma_j} \omega = \sum_{j \in J} 2\pi i \alpha_j \text{res}(\omega, a_j)$ (1') と表される。また、 X がリーマン球面また

は一般にコンパクトで連結なりーマン面、 $f(z)$ がせいぜい有限個の特異点を除いて正則であれば、次の公式

$$\text{が成り立つ: } \sum_{j \in J} \text{res}(\omega, a_j) = 0 \quad (2)$$

これまでの話を多変数の場合へ拡張しよう。 X を $\dim_{\mathbb{C}} X = n$ の複素解析的多様体、

$\omega = f(z_1, \dots, z_n) dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$ (f : 有理関数) は解析的集合 $S (\subset X)$ 上に特異点をもつ X 上の n 次有理微分形式、 γ を $X \setminus S$ 内のコンパクトな p 次元サイクル、そのホモロジー類のなすコンパクト特異ホモロジー群を $H_p^{\circ}(X \setminus S)$ で示す。このとき、多次元積分 $\int_{\gamma} \omega$ に関しては、 γ にホモログなサイクルで同一類の基底

となる $\{\gamma_j\}$ によって一変数の場合と同様に、ストークスの公式によって定理 (1') が成り立つ。一変数の場

合は積分 $\int_{\gamma} \omega$ の計算は定理 (1) から直接的に可能、かつ容易であるが、多変数の場合は定理 (または公式としての) (1') によることが一般的に正しいから、この定理の示すことは、積分の計算は、必然的にホモロジー群 $H_p^{\circ}(X \setminus S)$ における基底 $\{\gamma_j\}$ を見出し、サイクル γ の係数 $\{\alpha_j\}$ を決定する問題に帰着することがわかる。

これらの問題をはじめ、留数の一般的理論と積分の計算は多様体の次元 n が大きくなるにつれて困難となり、特異点集合が複雑な構造をもつほどに上述の問題は複雑化することは避けられない。しかしながら、これらの問題を含む留数理論とその応用のために具体的な研究の最初のパイオニアは、J. Leray [17]、F. Norguet [18] であった。まず彼らの方法に基づいた留数の基本概念の定式化に注目する:

任意の有限次元の複素解析的多様体を X 、その余次元1の部分多様体を S 、 S の外で C^{∞} 級の X 上の p 次の閉微分形式を ω 、このとき ω は、すべての点 $x \in S$ は X 内に近傍 U があって、その上で特異性が $S \cap U = \{x \in U; s(x) = 0\}$ かつ $\omega|_U = \alpha/s^k$ 、 $\alpha: U$ 上の C^{∞} 形式、 $k \in \mathbb{N}$ であるように複素局所座標関

数 s が定義されているとする。 $(X$ 上の有理形式 ω で、先の U 上の制限における s^k を正則関数で置き換える

ことによって S 上の特異性を一般化できる。(このとき $\omega = \alpha/f$ 、 f : 正則関数、このような ω を半有理形式と呼ぶ。) 次に留数の定式化に当って一般的な位相幾何学的状況を設定する。 X を位相空間、 S を X の閉部分集合とすれば、下記のコンパクトな台をもつ複素係数コホモロジーの完全系列を得る。

$$\dots \rightarrow H_c^p(X) \rightarrow H_c^p(S) \xrightarrow{\delta} H_c^{p+1}(X \setminus S) \rightarrow H_c^{p+1}(X) \rightarrow \dots (3)$$

いま $S, X \setminus S$ がそれぞれ次元 m, n の向きづけ可能な位相多様体であれば、ポアンカレの双対 (同型) 写像は、完全系列 (3) の δ^* から次の準同型 $\delta: H_{m-p}^c(S) \rightarrow H_{2n-p-1}^c(X \setminus S)$ を定める。よって普遍係数定理から、下記の結果を得る:

$$\text{準同型 } \delta: H_{2n-p-1}^c(X \setminus S) \rightarrow H_{m-p}^c(S) \text{ と公式 } \langle \delta h, c \rangle = \langle h, \delta c \rangle \quad (4)$$

ここで、 $h \in H_{m-p}^c(S), c \in H_{2n-p-1}^c(X \setminus S)$ 。式 (4) の写像 δ を留数準同型、公式を留数公式と呼ぶ。上記の留数公式を一変数の場合に適用すれば、 $\sum_{j \in J} \alpha_j \gamma_j$ のホモロジー類は、 S のホモロジー類 $h = \sum_{j \in J} \alpha_j a_j$ の写像 $\delta: H_0^c(S) \rightarrow H_1^c(X \setminus S)$ による像である。また、 $a_j \rightarrow 2\pi i \operatorname{res}(\omega; a_j)$ は、 $\omega|_{X \setminus S}$ の 1 次コホモロジー類の写像 $\delta: H^1(X \setminus S) \rightarrow H^0(S)$ によるコホモロジー類の像である。よって、公式 (1') は公式 (4) の特殊な場合であることがわかる。他方、 X が連結でコンパクト、 $n=1$ に対して、コホモロジーの完全系列 $H^1(X \setminus S) \xrightarrow{r} H^0(S) \xrightarrow{j} H^2(X)$ ($r = \delta$) から公式 (2) を得ることも示されるが省略する。また、これを一般化したコホモロジーの完全系列

$$\cdots \rightarrow H^{2n-p-1}(X \setminus S) \xrightarrow{r} H^{2n-p-2}(S) \xrightarrow{j} H^{2n-p}(X) \rightarrow \cdots$$

において、 j の核 $= r$ の像から、 $c \in H^{2n-p-2}(S)$ が $c \in r$ の像 $\Leftrightarrow jc = 0$ 。これは明らかに公式 (2) のコホモロジー的定式化による一般化であり、公式 (2) が成立する場合の逆は、複素解析的多様体 X とその余次元 1 の部分多様体 S において、 $X \setminus S$ のコホモロジー類はすべて、 S を重複度 1 の極集合とする半有理閉形式の $X \setminus S$ への制限を含む (定理) の特殊な場合である。

(2) 補足 上の初等的な基本概念の一般化をはじめ、応用関係に少し触れておく。余次元 1 の特異点集合をもつ n 変数の場合のポアンカレ留数 (写像、一般に r) は 1 変数の場合の留数 (写像) の拡張と考えられる。 S の余次元 > 1 の場合の留数定理も Leray の結果の拡張として Norguet によって得られた。Leray の留数理論の動機は双曲型偏微分方程式の解の構成のためであった

([19])。その他の一般化として、 $\{0\} \in \mathbb{C}^n$ を n 個の正則関数 $f_i (i=1, \dots, n)$ の共通零点として、これらの積を分母、他に

0 の近傍で正則な関数を分子にもつ n 次有理形式 ω とするとき、 0 における ω の点留数 (Grothendieck 留数 [20]) $\operatorname{res}(\omega; 0)$

$$= (1/2\pi i)^n \int_{\Gamma} \omega, \Gamma = \{z \mid |f_i| = \delta, \delta: \text{十分小さい正数は、一般に局所的留数と呼ばれ、P.A. Griffiths-J. Harris [21]}$$

やロシア学派等による一般化と対数的留数への応用をはじめ、代数学、代数幾何学固有の問題への応用等顕著な成果が得られている。またパラメーター依存の Feynman 積分等の解析的特異性、積分の分岐問題における特異点のホモロジー論的研究等、実用上の問題の考察が行われてきた。(これらの一部は今後に触れられる予定である。) 一変数の場合の Cauchy の積分表示式に類似の多変数の場合への一般化は多くの積分公式として得られている (たとえば [22])。

留数理論とその応用は、今日もなお研究が続行中であるが、これらの拡張は空間的土台として複素解析的多様体よりもさらに一般的な空間 (たとえば解析空間) を出発点にとって、任意の特異性をもつ極集合を伴った半有理形微分形式への一般化したがる留数写像の定義の一般化、これらに基づく Leray 理論のさらなる一般化とその解析的応用は確立の途上にある。これらに供される基本的方法は、解析的集合の諸性質、(コ) ホモロジーの手法、解析空間に対する広中の特異点除去定理等であり、近年の多彩な成果による。最後にコホモロジーの完全系列が (3) をはじめ、その他に 2, 3 現れたが、やや唐突な感があるから、その成り立ちに触れておく。一般に種々の多様体に対して、その上のコホモロジーの完全系列は、これら多様体上の微分形式の層の完全系列ま

たは G. de Rham 複体から誘導される。ここで留数写像を含むコホモロジー群の完全系列の存在をやや厳密に再論すれば、たとえば X 上の n 次正則、 S 上に 1 位の極だけしかもたない n 次有理形式、 S 上の $n-1$ 次正則形式のそれぞれの芽の層を Ω_X^n 、

$\Omega_X^n(S)$ 、 Ω_S^{n-1} とする de Rham 分解 $\Omega^* : 0 \rightarrow \Omega_X^n \rightarrow \Omega_X^n(S) \rightarrow \Omega_S^{n-1} \rightarrow 0$ が完全系列であれば、下記系列

$0 \rightarrow H^0(X, \Omega_X^n) \rightarrow H^0(X, \Omega_X^n(S)) \xrightarrow{pr} H^0(S, \Omega_S^{n-1}) \xrightarrow{j} H^1(X, \Omega_X^n) \rightarrow \dots$: 完全であることが

したがう (pr : ポアンカレ 留数写像)。また $H^1(S, \Omega_S^{n-1}) \cong H^1(S, \mathbb{C})$ (他のコホモロジーも $H^1(X, \Omega^*) \cong H^1(X, \mathbb{C})$)

は、先に現れたコホモロジーの係数を複素数としたことを裏づけている。

(3) 主題の歩み □ 今日まで膨大化したこの研究の歴史を概観するだけでも決して容易ではないが、筆者が目を通すことができた文献、資料を基に少し触れておきたい (一変数の場合: [3] 参照)。□ 前半から引き継いだ主題—の (2) 代数幾何学の場合において、大筋をすでに述べたが、この方面の端緒については、最初に現れたのは 1887 年、Poincaré による 2 複素変数 ξ, η の多項式の比で与えられた有理形関数の 2 重積分

の留数の研究であった ([23])。2 次元複素空間でこれらの積分の値を、まず一変数の場合の拡張としての (局所的) 留数をやや複雑な (古典的) 手法で定義して、その値を最初の積分領域の境界上でもう一度積分して求める手法を導いた。またこの種の積分をアーベル関数やアーベル積分の周期の問題に応用している。多変数留数関係ではそれ以後の顕著な結果は見られず (周期を含む代数曲面上の積分の一般論は、Picard によって 1885 年から議論されてきたが)、20 世紀に入って Picard の 1901 年 ([24]) に始まる留数関係の一連の研究は Lefschetz らによる特異点近傍と積分のサイクルの位相幾何学的研究を触発して、それまでの多くの古典的成果を単純化して、新しい成果を注いだ (文献: 先に記載)。その後は de Rham による 1932 年 ([25])、1936 年 ([26]) に続いて、A. Weil による 1947 年 ([27]) と de Rham の 1955 年 ([28]) の多様体上の微分形式の近代論において、(2) の終わりに触れたド・ラム複体 (各種層の分解) の確立は留数理論にも決定的な要素の一つとなった。後半に入ってから Hodge-Atiyah ([15]) の意義についてはすでに述べたが、その数学的な主張は代数的な留数の定義で、2 変数有理形式 R の 2 重積分 J が既約な有限個の代数曲線を特異因子 D_i として、 J が (これまで何度か言葉に出た) 周期とは、どの D_i とも交わらないサイク

ル (0 にホモログでない) Γ 上の積分の値で、もし $\Gamma \sim 0 \Rightarrow J$: 留数とするが、(Γ が D_i と交わっても、 D_i が R の 1 位の特異因子であれば、 Γ 上の積分 J は収束する。) その留数の値が 0 であるような有理形式の積分を第 2 種といい、この第 2 種 (2 重) 積分の留数を次元 m の非特異な代数多様体 V とその非特異な次元 $n-1$ の閉部分多様体 W (いずれも複素解析的多様体の特殊な場合である) に対して、留数の概念を一般化する際に、第 2 種の代数的有理形式の層のド・ラム複体 Ω_V^*, Ω_W^* に対して、コホモロジーの完全系列

$$\dots \rightarrow H^i(V, \Omega_V^*) \rightarrow H^i(V \setminus W, \Omega_V^*) \xrightarrow{r} H^{i-1}(W, \Omega_W^*) \rightarrow H^{i+1}(V, \Omega_V^*) \rightarrow \dots$$

によって留数を代数的微分写像 r によって定義する。特に $V-W$ が \mathbb{C} に関してアフィンの、有理形式 ω が $V-W$ 上の正則な i 次閉形式 $\Rightarrow \omega$ の留数 $\in H^{i-1}(W, \Omega_W^*) \cong H^{i-1}(W, \mathbb{C})$ 。ここで、 ω の留数 =

$0 \Leftrightarrow \omega : \exists \omega' \in H^i(V, \Omega_V^*)$ の像であるが、このホモロジー的説明は (応用に関連して) 興味深い問題である。

留数の定義の他に、留数の層 $R^p(W)$ は彼らの論文で主要な役割を演じている。そしてこれらの複素解析的な一般化が先に述べた Leray-Norguet の理論となって具体化する。1950 年代後半から複素解析的多様

体のコホモロジー研究から出発した P. Dolbeault ([29]) は、60年代末から80年代にかけてそれまでの留数理論を整理・統一するとともに簡明にして、de Rham によって最初に導入された超関数係数の微分形式としてのカレント (current) ([28]) の M. Herrera 等による複素解析空間への拡張を通して、その主値 (principal value)、主値を介した留数カレント等の理論 ([30]、[31]) への一連の寄与は顕著である (たとえば [32]、[33])。また L. A. Aizenberg、A. K. Tsikh、A. P. Yuzhakov 等によるロシア学派の、これまで触れた基礎理論から多方面にわたる応用への貢献とこれらの厳密な構成は注目にすべきであろう ([33]、[34])。なお、以上の話題に関連した諸公式等の議論 (たとえば [35]) は興味深い。今世紀に入ってから研究が留数理論の多方面の具体的な問題への応用や積分の計算技術の開発へ向かう傾向が現れ始めているかのようにある。今後、たとえば Mathematical Reviews 等に注目するのも一興かもしれない。

2. 特異点の解消と二つの応用

代数幾何学の重要な基礎の一つ、広中の特異点解消 (または還元) 定理 ([36]) を超関数の割り算問題へ応用した 1970年の Atiyah の仕事 ([11])、および Atiyah-Hodge と Grothendieck の非特異代数多様体上のコホモロジー群に関する定理 ([15]、[37]) の Atiyah-(R.) Bott-(L.) Gårding による 1970-73年にかけての線形双曲型偏微分方程式のラキユナ (Lacuna) (または空隙領域) の理論への応用 ([38]) をとりあげる。前者は極めて特殊な問題であるが、偏微分方程式等の解に関連して提起された問題で、最終的に超関数の構成や存在を問題とする、特異点の解消定理の初の解析学的応用となる画期的な成果であるが、今後は種々の解析学的方面等への応用がもっと現れてもよいのではなかろうか。後者は、双曲型作用素に関する多項式の生む代数学と幾何学、その基本解の構成という解析学、複素代数多様体上の有理形式のコホモロジーとホモロジー (積分領域の位相幾何学) 等、古典的な概念から発してその近代的な再構成のなす数学が三位一体となって総合的に形作られる様は壯観であり、いわゆる代数解析学の典型とみなされる。両者に共通するものは、その根底に特異点の解消があり、前者はその実解析的多様体の場合のヴァージョンの直接的応用、後者は射影的代数多様体上の有理形式に関する Atiyah-Hodge の結果を広中の定理を用いてアフィン空間へ拡張した Grothendieck の定理の適用がここでの主題の基本をなす。Atiyah-Hodge の研究 [15] は、代数的留数理論のみならず、ラキユナの理論へも本質的に寄与したと言えよう。また Atiyah 自身はほとんど同時期にここにとりあげた二つの主題に対する新しい観点からの開拓者となった。

A 特異点の解消と超関数の割り算：定数係数線形偏微分方程式の基本解 (超関数) の存在問題

(1) 実解析的多様体の場合と割り算問題 (Atiyah の結果)

特異点の解消とは、主要な条件の一つ、複素 (実) 解析空間 A に対して、 B が複素 (実) 解析的多様体 (非特異解析空間) であるような写像 $\varphi: B \rightarrow A$ の存在することをいう。(他に φ に関する二つの条件があるが、省略。) また超関数の割り算問題は特殊ではあるが、従来の議論では深遠で難しい問題の印象が強かった。ここでは二番目の話題に紙数を減らすために詳細を避けて結果を中心に述べておく。

実解析関数の冪に関する定理 (Atiyah の定理 ([11]) の主定理) の要約: 実解析的多様体上の非負実解析関数 f の冪 $f^s \Gamma$ (Γ はこの多様体上の有限個の非負実解析関数の定める集合上の特性関数) は、 s の実部 > 0

から全複素平面へ s の有理関数として実解析的多様体上の超関数へ解析接続できる。このときの $f^s \Gamma$ の極は、

$-n/N (n: 1, 2, 3, \dots, N: \exists \text{ 正の整数 } (f \text{ の次数, 他に依存}))$ の点にある。

この定理は極めて一般的であり、そこから帰結できる結果は超関数の割り算問題の解 (超関数) の存在、定数係数線形偏微分方程式の基本解としての緩増加超関数の存在をはじめ、既知の事実等が連なる。すなわち従来の長い議論を要した割り算問題等の既存の結果は新しい (証明に基づく) 結果によって直ちに得られることになった ([11] の系 1-3)。この定理の証明には、実解析的な場合に対応する下記の結果が援用される。

特異点に関する定理 (広中の定理 ([36] の定理 Π_2^N) の局所的改変): $0 \in \mathbb{R}^n$ の近傍で定義された実解

析関数を $F \Rightarrow \varphi: Y - V \rightarrow X - U$ が同型写像で ($U = F^{-1}(0)$, $V = \varphi^{-1}(U) = (F \circ \varphi)^{-1}(0)$) として、かつ Y の各点を中心とする局所解析的座標 (y_1, \dots, y_n) があって、 $F \circ \varphi = \varepsilon \cdot \prod_{i=1}^n y_i^{k_i}$ (ε : 可逆な解析関数、 $k_i \geq 0$) であるような \mathbb{R}^n の開集合 X 、実解析多様体 Y 、解析的写像 $\varphi: Y \rightarrow X$ が存在する。

この定理によって Atiyah の上記の定理を直ちに証明することは決して容易ではないが、その定理が確立されて後、超関数の割り算問題に関連する諸結果が一般的な見地から正当化されることになった。

(2) 補足 証明の大略を述べる。そのためには多様体上の超関数について2, 3の注意、特に双有理変換によって起きがちな多様体の向きづけ不可能性を考慮すること。 X の標準的向きづけ α に対応する $Y - V$ の向きづけを $\tilde{\alpha} \Rightarrow s$ の実部 > 0 に対して、 $\tilde{f}^* \tilde{\Gamma} \tilde{\alpha} (\in \Omega(Y - V))$: コンパクトな台をもつ $Y - V$ 上の $C^\infty n$ 次形式) は Y 上の局所可積分形式へ拡張される

($\tilde{\Gamma} = \Gamma \circ \varphi$: 有限個の非負実解析関数で定められる集合上の特性関数)。次に $\varphi^*: \Omega(Y) \rightarrow \Omega(X)$ を φ による誘導写像 \Rightarrow その順像準同型は双対的に準同型 $\varphi_*: \Omega'(Y) \rightarrow \Omega'(X)$ を誘導し、 $\varphi_*(\tilde{f}^* \tilde{\Gamma} \tilde{\alpha})$ は s の有理関数として定理にあるような極をもつ X 上の超関数。また X 上の向き α は同型写像: $\Omega'(X) \cong D'(X)$ ($D'(X)$: X 上の超関数) を誘導するから、 $\varphi_*(\tilde{f}^* \tilde{\Gamma} \tilde{\alpha}) = T(s)\alpha$, $T(s) \in D'(X)$ 。よって、 s の正の実部に対して、 $T(s) = f^* \Gamma$ であることを確かめ、最終的に φ の同型性 ($Y - V \cong X - U$) から、 $\varphi_*(\tilde{f}^* \tilde{\Gamma} \tilde{\alpha}) = f^* \Gamma \alpha$ であることを得る。

(3) 主題の歩み 超関数の割り算問題は、1950年の L. Schwartz の著書 ([39]) の第7章 (最終章)、10節の末尾の例として提起されて以来、58年の L. Hörmander ([40])、59年の S. Łojasiewicz ([41]) による研究がなされて、64年の L. M. Gelfand らの著書 ([42]) に至る。その歴史は比較的浅く、文献類も極めて少ないが、上記の結果によってこの問題は一応の決着を見た。今後は他の解析学上の問題へも特異点解消の定理の応用が期待され、その意味でも Atiyah の仕事は優れたモデルとして提供し得ると思われる。

B ドラムのコホモロジーとラキュナの理論: 代数積分の消失問題

(1) 双曲型作用素の基本解とラキュナ (Atiyah-Bott-Gårding の仕事)

波動作用素 $a(D) = D_1^2 - \sum_{i=2}^n D_i^2$, $D = (D_1, \dots, D_n)$, $D_i = \partial / \partial x_i$, $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} = \mathbb{R}^n$ (時空間)

に対する波動方程式 $a(D)E = \delta(x)$ (δ 関数: 原点での単位衝撃) の Cauchy 問題の基本解 E は超関数であり、

$\text{supp}(E) \subset \{x; x_1^2 - \sum_{i=2}^n x_i^2 \geq 0\}$ (射線錐)。錐内での波動の拡散の有無は次元数 n の値によることはよく知られ、初期値の微小変化に対する錐の頂点での解の値に変化がないときの錐の内部領域をラキュナという。次に波動作用素を一般化したものが双曲型作用素であり、中でも定数係数同次双曲型作用素に対する基本解のラキュナの理論が基本的である。上記の D_i を ξ_i で置き換えた次数 m の多項式 $a(\xi) = a(\xi_1, \dots, \xi_n)$ において、

$\xi \rightarrow \xi + t\vartheta = \eta$ とした t に関する方程式 $a(\eta) = 0$ の実ベクトル ϑ に関する m 個の実数解のありようによつて $a(\xi)$ を双曲的、または強双曲的 (簡単にいえば、前者は m 個の実数解をもち、後者はそれらがすべて異なる) に分けて、それぞれに対応して $a(D)$ が (m 階の同次定数係数) 双曲型、または強双曲型作用素とする (こ

れらと以下に現れる言葉や概念の詳細については、たとえば[43]、[44]を参照)。複素超曲面 $\{\xi; a(\xi) = 0\}$
 $= A$ 、 $\text{Re } A = \mathbb{R}^n \cap A$ として、双曲型作用素 $a(D)$ は初期値問題の一意的な基本解 E_a ($a(D)E_a(x) = \delta(x)$)
をもち、 $\text{supp}(E_a) \subset K : \mathcal{G}$ に関する波動の伝播錐であること、および $\text{sing supp}(E_a)$ ($E_a(x)$ が C^∞ ク
ラスとなる最大の開集合($\subset \mathbb{R}^n$)の余集合) : W (実超平面 $\{\xi; x \cdot \xi = 0, x, \xi \in \mathbb{R}^n\}$ で $\text{Re } A$ の接平面となる
ものの全体)に含まれる(、すなわち基本解の特異性は W によって起る)ことが知られている。(後者は、 $E_a(x)$
が W の余集合で解析的であることから)。そこで、基本解が $\mathbb{R}^n - W$ の各成分で解析的であることから、基本
解 $\equiv 0$ か、そうでないかである。 $\mathbb{R}^n - W$ のある成分で基本解 $\equiv 0 \Rightarrow$ この領域：強ラキユナと定める(後向
き斜線錐の底面領域($t=0$ の超平面)内のある成分上での初期値の微小変化に対して錐の頂点での基本解が
変化しない領域のこと)。これに対して、 $\mathbb{R}^n - W$ のある成分で基本解：多項式 \Rightarrow この領域：弱ラキユナと定
める。次に作用素が強双曲型でない一般の双曲型の場合、これまでの実超平面を基に定めた W に代って、多項
式 $a(\eta)$ に対して各実ベクトル ξ を固定して \mathcal{G} に関して同次双曲型となる多項式を定め、それによって \mathcal{G} 方向
の伝播錐 K_ξ を定めることによって、 $W = \bigcup_{\xi} K_\xi (\xi \neq 0)$: 波曲面へ一般化される。空間に関しては、 $\mathbb{C}^n = \mathbb{Z}$
として、 $n-1$ 次元複素射影空間 $P^{n-1}(\dot{\mathbb{C}}) = \dot{\mathbb{Z}} / \dot{\mathbb{C}} = \mathbb{Z}^*$ とする(\cdot は原点を除いていることを示す)。また $A^* =$
 $\{\xi \in \mathbb{Z}^*; a(\xi) = 0\}$ (すなわち、 \mathbb{Z} の部分集合 A (複素超曲面)に対して、 A の \mathbb{Z}^* における像)、同様に $X^* =$
 $\{\xi \in \mathbb{Z}^*; x \cdot \xi = 0\}$ とする。これらの集合はすぐ後の \mathbb{Z}^* での基本解の構成や積分路のホモロジー類の議論
に必要である。詳細は彼らの論文[38]に譲る。双曲型作用素 $a(D)E_a = \delta(x)$ の基本解 $E_a = E_a(x)$ は、
 $x \in W$ に対して $\alpha^* = \alpha(A, X, \mathcal{G})^* \in H_{n-1}(\mathbb{Z}^* - A^*, X^*)$ 、およびその境界を
 $\partial\alpha^* \in H_{n-2}(X^* - X^* \cap A^*)$ とする、チューブ演算 $t_x : X^* - X^* \cap A^* \rightarrow \mathbb{Z}^* - A^* \cup X^*$ による像
 $t_x \partial\alpha^* \in H_{n-1}(\mathbb{Z}^* - A^* \cup X^*)$ の上の $n-1$ 次有理形式の積分として次の公式で与えられる：

$$D^\nu E_a(x) = (2\pi)^{1-n} \int_{\alpha^*} (x \cdot \xi)^{m-n-|\nu|} \xi^\nu a(\xi)^{-1} \omega(\xi), \quad m-n-|\nu| \geq 0 \quad (1)$$

$$D^\nu E_a(x) = (2\pi)^{-n} \int_{t_x \partial\alpha^*} (x \cdot \xi)^{m-n-|\nu|} \xi^\nu a(\xi)^{-1} \omega(\xi), \quad m-n-|\nu| < 0 \quad (2)$$

ただし、 $\omega(\xi) = \sum_{k=1}^n (-1)^k \xi_k d\xi_1 \wedge \cdots \wedge d\xi_{k-1} \wedge d\xi_{k+1} \wedge \cdots \wedge d\xi_n$ 。公式(1)と(2)から、 $m-n \geq 0$
 \Rightarrow 基本解は同次多項式で与えられるから、一般に領域成分は弱ラキユナ、 $m-n < 0 \Rightarrow$ 基本解(多項式) $\equiv 0$
より、弱ラキユナである領域成分は強ラキユナとなる(両ラキユナの一致)。

最後にここの主題目標であるラキユナの存在、安定性に関する条件をみる。そのための基本となるものは次

の1966年に Grothendieck によって得られた Atiyah-Hodge-Grothendieck の定理である ([37]) :

定理 V を非特異アフィン代数多様体とすると、複素コホモロジー群 $H^*(V, \mathbb{C})$ は V 上の有理微分形式の代数的ド・ラム複体のコホモロジー群と同一視できる。

この定理をこの場合に適用すれば、射影空間において $H^{n-1}(Z^* - A^* \cup X^*)$ は $A^* \cup X^*$ 上に極をもつ $n-1$ 次有理形式全体によって張られることを示す。よって、以下の主要な結果がしたがう :

結果1 x が $a(D)$ のすべての冪 $a(D)^k$ ($k=1, 2, \dots$) の弱ラキュナに属する $\Leftrightarrow t_x \partial \alpha^* = 0$.。

右が十分条件であることは見やすいが、問題は必要の場合である。 $a(D)^k$ を基本解の公式 (2) に適用したときに現れる微分形式は、 $A^* \cup X^*$ 上に極をもつ Z^* における $n-1$ 次有理形式全体の一つの基底であることに注意すれば、公式 (2) の右辺 $= 0 \Rightarrow t_x \partial \alpha^* = 0$ 。他に $a(D)$ が強双曲型の場合に x が安定な (多項式が $a(\xi)$ と同次数で、同次双曲型作用素 $a(D)$ の微小な擾動的変化による同次双曲型作用素 $b(D)$ に対しても保たれる) 弱ラキュナに属する $\Leftrightarrow t_x \partial \alpha^* = 0$: Petrovsky の結果の再現。公式 (1) に関しては、 $m \geq n$ に注意して、

結果2 $m \geq 2$ のとき、 x が $a(D)$ のすべての冪 $a(D)^k$ の強ラキュナに属する $\Leftrightarrow \alpha^* = 0$ 。

結果1より、 $\partial \alpha^* = 0$ 。よって、 $\alpha^* \in H_{n-1}(Z^* - A^*)$ 。 $V = Z^* - A^*$ として定理を適用し、結果1と同様の議論をすればよい。また $m \geq n$ のとき、すべての冪 $a(D)^k$ の強ラキュナはツリヴィアル・ラキュナ (伝播錐の外部領域) のみであることも示される。これらの結果はまた、代数積分の消失例でもある。

(2) 補足 書及すべきことは多いが、ここでは詳細は不可能であるから、项目的に示そう : 1) 双曲型作用素の基本解の公式 ((1) & (2)) の原形である表示式 (その逆作用素のフーリエラプラス変換) 2) 複素射影空間上の積分のチェーンやサイクルの位相幾何学 3) 従来の、特に Petrovsky の解公式と公式 (1) & (2) の関係 (留数の観点から) 4) 同次項だけでない一般の双曲型作用素の基本解とラキュナの理論、および変数係数の場合等。これらはもちろん、原論文 ([38]) に詳しい。

(3) 主題の歩み ここでの公式は、(G.)Herglotz-(I. G.)Petrovsky-(J.)Leray-(M. F.)Atiyah-(R.)Bott-(L.)Gårding の公式と呼ばれるが、Atiyah, Bott, Gårding を除く Leray 以前は、1926-1928年の Herglotz ([46])、続いて1945年の Petrovsky ([47])、そして留数理論でも知られ、その応用とされた1962年の Leray ([19]) がある (偶然であろうが、各人の仕事は17年目に更新されている!)。ここに現れた6人はいずれも巨匠たちで知る人々も多いであろう。Herglotz は本来物理学者で多分野で活躍した。Gårding は1950年の一般的な定数係数の偏微分作用素の代数的理論、量子場で著名、Petrovsky は基本解を構成したとき、ラキュナの理論を創始したが、当時は多様体のトポロジーとして Lefschetz たちの古典的結果を用いている。Bott は位相幾何学、関数解析で傑出した数学者である。その後のラキュナ理論の進歩は1995年の Vassiliev の書 ([49]) に詳しく、またその位相幾何学的基礎に関しては特異点理論からの最近の説明がある ([50])。

3. 多変数解析関数の解析接続

この問題に関する理論面は今日まで極めて高度にかつ一般的に議論されてきたから、今後はその応用面の開発が期待される。多変数複素関数論の端緒ともなった Hartogs による数学固有の初等的例 (: 完全でないラインハルト領域では、そこで正則な関数はそれより真に大きい完全ラインハルト領域にまで接続されて、最初のラインハルト領域の境界を自然境界とする正則関数は存在しない) はよく知られた事実であろう。今日では複

素解析空間上でグローバルな意味で正則関数の一意接続性定理が議論され、その代表例の一つが Hartogs の接続定理であろうが、ここではこれらの理論的成果の説明とは異なり、解析接続の応用面を重視して物理学における場の量子論または素粒子論から次の例をとり挙げる。

(1) **ローレンツ共変関数の解析接続** 相対論的な物理法則を得るために、ローレンツ群で生成されるスピノールやテンソルで表される物理量の間共変関係(一つの座標系で表された物理法則の関係式 F が任意の座標変換に関しても同様の形 F' で成立するとき、これらの関係式は共変的(関係)であるという)を表す関数、すなわちローレンツ共変関数の一意的な解析接続に関する結果を示す。そのために必要な2, 3の言葉を簡潔に述べておこう。

i. **前方(後方)管状領域**: ローレンツ共変関数の変数域 $T^{+(-)} = \{z_j\}$: 複素四元ベクトル z_j の空間を指す。

ここで、複素四元ベクトルとは、複素時空間成分からなるベクトル $z_j = x_j (\in R_4) + iy_j (y_j \in V^{+(-)})$, R_4 :

実時空間変域、 $V^{+(-)} = R^+(R^-)$: 正(負)の実数全体 ($j = 1, \dots, n$) ii. **ローレンツ共変関数**: 変数を複数個

の複素四元ベクトルとするテンソル関数。iii. **拡大管状領域**: 複素ローレンツ変換 $\Lambda (\in L_+$: 複素ローレン

ツ群) を前方(後方)管状領域に作用して得られる領域全体の和集合 $T_n = \bigcup_{\Lambda \in L_+} \Lambda T^{+(-)}$ (T^+ と T^- は反転に

関して等しいことによつて、それぞれの場合の右辺は等しいから一つにまとめたものである。) このとき、次の結果が知られている ([50])。

定理 (Bargmann-Hall-Wightman の結果) 前方(後方)管状領域で解析的なローレンツ共変関数は拡大管状領域に一意的に解析接続され、これらの管状領域はどれも正則領域である。ただし、共変関数 f_α は n 個の複

素四元ベクトル z_j のテンソル関数で、複素ローレンツ変換による変数の変換で次の形で表されるものとする:

$$f_\alpha(\Lambda z_1, \dots, \Lambda z_n) = \sum_{\beta} R(\Lambda)_{\alpha\beta} f_\beta(z_1, \dots, z_n), R(\Lambda): \text{複素ローレンツ群 } L_+ \text{ の有限次元表現} \quad (*)$$

証明の手順は、拡大管状領域への解析接続の一意性、続いて複素ローレンツ群の単位元近傍における局所的性質から共変関数の解析性を示してから、任意のローレンツ変換に対して関係式(*)の成立を示すことによつて行われる。(証明の詳細は Hall-Wightman の上記の論文を参照のこと。)

(2) **補足** 上記の定理は、現在ではさらに一般的な解析的領域に拡張されている。また、管状領域で解析的でローレンツ変換に

対して不変な関数 ($f(\Lambda z_1, \dots, \Lambda z_n) = f(z_1, \dots, z_n)$) の一般形は、スカラー積 $z_i z_j = z_{ij}$ のみの関数で、かつ各ベク

トルが前方(後方)管状領域を動くにしたがい、スカラー積の変化がなす多様体 M 上で解析的であることが知られ、

$M(T^{+(-)}) = M(T_n)$ 。さらに、2次元以上の対称管状領域は非正則領域、その正則包が一般次元 (≥ 5 次元) に対して得ら

れたという情報を筆者は知らない。正則包を求める数学的技術の開発的研究の進歩が望まれよう。その他、素粒子論の問題として、運動量移行のある場合の素粒子の分散式の解析接続とその正則包の決定や ([51])、三体のワイトマン (Wightman) 関数の解析接続とその正則包の決定などがある ([52])。

(3) **主題の歩み** 多変数複素関数の解析接続の応用は、それまでの理論が解析的多様体の枠をこえて広がりを見せる頃の前世紀の後半以降の、1950年代半ばから60年代にかけて理論物理学分野で実用化され始めた。特にその開拓者たちには当時ソ連邦出身の物理学者たちが多く、ここに要約された結果はほとんど彼らの見出した成果に基づいている。当時のこの方面に関する主要な進歩と文献に関しては書 [53] が詳しい。

以後、1960年代後半からはS行列理論の解析的問題からファインマン積分の特異性問題、また近年以降は宇宙論におけるブラックホールの特異性問題など、解析接続を離れた新しい主題の展開時代を迎える。

参 考 文 献

- [1] 阿部調久, 特異性の概念は近代数学へ如何に寄与したか (III) — 1—20 世紀後半から現代に至る主題の展望, および未知の課題をめぐって—, 数理解析研究所講究録 1546 「数学史の研究」, pp. 88—103, 京都大学数理解析研究所 (2007).
- [2] 阿部調久, 特異性の概念は近代数学へ如何に寄与したか (I) — 初期の概念とその背景—, 数理解析研究所講究録 1317, pp. 39—49, 京都大学数理解析研究所 (2003).
- [3] 阿部調久, 特異性の概念は近代数学へ如何に寄与したか (II) — 特異性問題に関する近代数学の発展・形成: 1880—1940s —, 数理解析研究所講究録 1392 「数学史の研究」, pp. 149—162, 京都大学数理解析研究所 (2004).
- [4] K. Noshiro, *Cluster sets*, Springer, 1960.
- [5] D. S. Mitrinović & J. D. Kečkić, *The Cauchy Method of Residues—Theory and Applications—*, Reidel, 1983.
- [6] 日本数学会 (編), 解析の多様体特集号, 数学 第 1 1 巻, 第 1 号, 1960.
- [7] 一松 信, 多変数解析関数論, 培風館, 1960.
- [8] R. C. Gunning & H. Rossi, *Analytic functions of several complex variables*, Prentice—Hall, 1965.
- [9] G. Fischer, *Complex analytic geometry*, Lect. Notes Math. 538, Springer, 1976.
- [10] O. Zarisky, *Algebraic surfaces*, 2nd supplemented ed., Springer, 1970.
- [11] M. F. Atiyah, *Resolution of Singularities and Division of Distributions*, Comm. Pure and Appl. Math., vol. xiii, pp. 145—150 (1970).
- [12] S. Lefschetz, *L'Analyse Situs et la Geometrie Algébrique*, Paris, 1924.
- [13] E. Picard & G. Simart, *Théorie des Fonctions Algébrique de Deux Variables*, 2vols, Paris, 1897.
- [14] 福田拓生, 泉屋周一, 石川剛朗 (監修), 特異点の数理, 1—4 巻, 共立出版, 2001.
- [15] W. V. D. Hodge & M. F. Atiyah, *Integrals of the second kind on an algebraic variety*, Ann. Math., Vol. 62, No. 1, pp. 56—91 (1955).
- [16] S. Lang, *Complex Analysis*, 4th ed., Springer, 1999. (1st ed., Addison—Wesley, 1977.)
- [17] J. Leray, *Le calcul différentiel et integral sur une variété analytique complexe*, Bull. Soc. Math. France 87, pp. 81—180 (1959).
- [18] F. Norguet, *Sur la théorie des résidus*, C. R. Acad. Sci., Paris, 248, pp. 2057—2059 (1959).
- [19] J. Leray, *Problème de Cauchy IV. Un prolongement de la transformation de Laplace qui transforme la solution unitaire d'un opérateur hyperbolique en sa solution élémentaire*, Bull. Soc. Math. France 90, pp. 39—156 (1962).
- [20] R. Hartshorne, *Residues and Duality*, Lect. Notes Math. 20, Springer, 1966.
- [21] P. A. Griffiths & J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley, 1978.
- [22] G. M. Khenkin, *The Method of Integral Representations in Complex Analysis*, pp. 19—116 in *Encyclopaedia of Math. Sc. 7 (Several Complex Variables I)*, Springer, 1990.
- [23] H. Poincaré, *Sur les résidus des intégrals doubles*, Acta Math. 9, pp. 321—380 (1887).
- [24] E. Picard, *Sur les intégrals des différentielles totales de troisième espèce dans la théorie des surfaces algébriques*, Ann. Ec. Norm. Supér, 1901.
- [25] G. de Rham, *Sur la notion d'homologie et les résidus d'intégrales multiples*, Ver. Int. Math. Kongress Zurich, 1932.
- [26] G. de Rham, *Relations entre la topologie et la théorie des intégrals multiples*, Enseign. Math. 35, pp. 213—228 (1936).
- [27] A. Weil, *Sur la théorie des formes différentielles attachées à une variété analytique complexe*, Comment. Math. Helv. 20, pp. 110—116 (1947).
- [28] G. de Rham, *Variétés différentiables, formes, courants, formes harmoniques*, Hermann, Paris, 1955.
- [29] P. Dolbeault, *Formes différentielles et cohomologie sur une variété analytique complexe*, Ann. Math., II, Ser. 64, pp. 83—130 (1956).
- [30] M. Herrera & D. Lieberman, *Residues and principal values on complex spaces*, Math. Ann. 194, 259—294 (1971).
- [31] N. R. Coleff & M. Herrera, *Les courants résiduels associés à une forme méromorphe*, Lect. Notes Math. 633, Springer,

- 1978.
- [3 2] P. Dolbeault, *General Theory of Multidimensional Residues*, pp. 215--2421 in *Encyclopaedia of Math. Sc. 7 (Several Complex Variables I)*, Springer, 1990
- [3 3] L. A. Aizenberg, A. K. Tsikh, A. P. Yuzhakov, *Multidimensional Residues and Applications*, pp. 1--58 in *Encyclopaedia of Math. Sc. 8 (Several Complex Variables II)*, Springer, 1994.
- [3 4] A. K. Tsikh, *Multidimensional Residues and Their Applications*, Math. Monographs vol. 103, A.M.S., 1992.
- [3 5] C. A. Berenstein, R. Gay, A. Vidras, A. Yger, *Residue Currents and Bezout Identities*, *Progress in Math.* 114, Birkhauser, 1993.
- [3 6] H. Hironaka, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero*, *Ann. Math.*, vol. 79, pp. 109--326 (1964).
- [3 7] A. Grothendieck, *On the de Rham cohomology of algebraic varieties*, *Publ. Math., Inst. Hautes Etud. Sci.* 29, pp. 95--103 (1966) ..
- [3 8] M. F. Atiyah, R. Bott, L. Gårding, *Lacunae for hyperbolic differential operators with constant coefficients I*, *Acta Math.*, 124, pp. 109--189 (1970) ; II, *Acta Math.*, 131, pp. 145--206 (1973) .
- [3 9] L. Schwartz, *Théorie des Distributions*, Hermann, Paris, 1950. (日本語版: 岩村 聯 (訳), *超関数の理論*, 岩波, 1953.)
- [4 0] L. Hörmander, *On the division of distributions by polynomials*, *Ark. Mat.*, Vol. 3, pp. 555--568 (1958) .
- [4 1] S. Lojasiewicz, *Sur le problème de division*, *Studia Math.*, Vol. 18, pp. 87--136 (1959) .
- [4 2] I. M. Gelfand & G. E. Shilov, *Generalized Functions*, Vol. 1, Academic Press, 1964.
- [4 3] 溝畑 茂, *偏微分方程式論*, *現代数学* 9, 岩波, 1965.
- [4 4] L. Gårding, *Singularities in Linear Wave Propagation*, *Lect. Notes Math.* 1241, Springer, 1987.
- [4 5] 柏原正樹, 河合隆裕, 木村達雄, *代数解析学の基礎*, *紀伊国屋数学叢書* 18, 紀伊国屋, 1980.
- [4 6] G. Herglotz, *Über die Integration Linearer, Partieller Differentialgleichungen mit Konstanten Koeffizienten, I (Anwendung Abelscher integrale), II & III (Anwendung Fourierscher integrale)*, *Leipzig. Ber. Sach. Akad. Wiss. Math. Phys. Kl.* 78, pp. 93--126 (1926) ; 80, pp. 6--114 (1928) .
- [4 7] I. G. Petrovsky, *On the Diffusion of the Waves and Lacunas for Hyperbolic Equations*, *Mat. Sbornik (Rec. Math.)*, N. S. 17, pp. 289--368 (1945) .
- [4 8] V. A. Vassiliev, *Ramified Integrals, Singularities and Lacunas*, Kluwer, 1995.
- [4 9] W. Ebeling, *Functions of Several Complex Variables and Their Singularities*, *Graduate Studies in Math.*, Vol. 83, 2007.
- [5 0] D. Hall & A. S. Wightman, *A Theorem on Invariant Analytic Functions with Applications to Relativistic Quantum Field Theory*, *Dan. Mat. Fys. Medd.* 31, No. 5 (1957) .
- [5 1] H. J. Bremermann, R. Oehme, J. G. Taylor, *A Proof of the Dispersion Relation with Momentum Transfer*, *Phys. Rev.*, 109, p. 2178 (1958) .
- [5 2] G. Källén & A. S. Wightman, *The Analytic Properties of the Vacuum Expectation Value of A Product of Three Scalar Local Fields*, *Mat. Fys. Skr. Kgl. Danske Vid. Selskab.* 1, No. 6 (1958) .
- [5 3] N. N. Bogoliubov, A. A. Logunov, I. T. Todorov, *場の量子論の数学的方法* (ロシア語版原著 1969 の日本語版), 東京図書, 1972.