

関孝和の円周率の微増と限界

Minute increments and limitations in the π calculation
by Seki Takakazu.

杉本敏夫

Sugimoto Toshio

第 1 節 序

私はすでに論文集[1]の2号論文で、関の「求円周率術」([2]『関全集』p. 344～)の計算過程を詳しく解析し、29号論文では「求弧術」([2]『関全集』p. 352～)を取り上げて、関の円周率計算についての私の解析方法を詳述した。

今回の研究はこれら先行研究を発展させた。論文集を参照せずに本稿の趣旨を述べるため、重複をいとわず説明し、これに加えて新しい発見と展開を解説する。

(甲) 関の求円周率術の過程の256角までの周 A , 弦 a , 勾 c は、三角法による精密な計算とほぼ一致している。しかし512角の周 A は、精密計算の値に比べて僅か超過している。なぜ関の値は《微増》したのか? この原因の追究が第一の主題である。

(乙) 関は有限桁、すなわち仮数 (mantissa) ほぼ17～23桁を用いて計算した(第3節で具体的な数値を用いて説明する)。この方法によれば、或る段階の勾 c から次の段階の勾 c' を求めても、前勾 c の $1/4$ に等しい値しか得られない状態になる。いわゆる《桁落ち》が生じたのであり、これが表題に言う《限界》である。もはや計算を先に進めることはできない。この事実は、具体的な数値によって説明する。

(丙) 関は常に π を下から近似しているが、論理的には π の上からの近似も必要であろう。すでにこの点についての論考があるが、私は新たに、円周率の研究とは別になされた関による研究を引用して、上からの近似を述べたいと思う。

関の円周率計算の筋道は、第2節に述べるように[3]『算俎』の方法を踏襲し、方法そのものは従来の研究に尽くされている。しかし私が今回述べる研究の狙いは、非常に微細な点を問題にしているため、なかなか理解を得にくいと思われる。私の用いる論法の筋道を注意深く辿って頂くようお願いしたい。

数値は[2]『関全集』より引用し、さらにその底本である写本「穴沢本」を参照した。なお、論旨の見通しを良くするため、細かい計算は「補足」に回した。

第 2 節 計算方法

関の「求円周率術」は、円の内接正四角形(正方形)から出発し、次々に八角、十六角を求めて行く。簡単のため(尺、寸の単位を外し)、径=1と仮定する。関は或る正 n 角形の弦 a より一つ前の段階の弦 a の半分を股 b と呼ぶ。計算の途中で、

$$e = \sqrt{0.5^2 - b^2} = \sqrt{0.25 - b^2} \quad \dots\dots \quad \textcircled{1}$$

(e は半離径と呼ばれる)、次に

$$c = 0.5 - e \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

を求め、 c を勾と呼ぶ。そこで弦は

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

となる。〔補足 1 を参照〕

計算の復元のため、《逆向き》の計算を実行する。

つまり、通常は一つ前の弦 ' a から、次の弦 a を求め

る。しかし私はその計算の方向を逆にして、関が計算によって求めた或る弦 a から、逆に辿って一つ前の弦 ' a を計算する。その際、股 b として上述の如く、求めるべき ' a の半分を用いるのは《同義反復》と思われるかもしれない。しかし b は前の段階の ' a を《既知》として、その半分を言う。すなわち b は既定の値である。これに対して《逆向き》の計算によって、《新たに》前段階の弦 ' a^* を求めるのだから、この計算は妥当である。

逆向きの計算の順序とは、関の示した 512 角の弦 a を《既知》の出発値として、股 b (上述のようにこれも《既知》の値) を用いて、

$$c^* = \sqrt{a^2 - b^2} \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

により勾 c^* を求め、

$$e^* = 0.5 - c^* \quad \dots\dots \textcircled{5}$$

により半離径 e^* を求め、

$$a^* = 2\sqrt{0.5^2 - e^{*2}} \quad \dots\dots \textcircled{6}$$

によって《逆向きに》求めた 256 角の弦の推定値 ' a^* を得る。

関に計算間違いがなければ、関自身の 256 角の弦の ' a と、《逆向きに》求めた 256 角の弦の推定値 ' a^* とは一致する筈である。しかし後でお目にかけるように、二つの弦の値は食い違ふのである。計算の中間の式⑤の段階で、得られた e^* は式①の e とはすでに食い違ふ！ こうした具体例は、第 4 節で示す。

第 3 節 桁数と四捨五入

数値を具体的に示そう。関は 256 角の周 $A = 3.14151\ 38011\ 44301\ 07633$ 弱を与えた。

弱は「奇零表現」と呼ばれる。関は、通常の上四捨五入をさらに精密化した

$$0 = \text{整} < \text{微強} \leq 0.1 \leq \text{強} < 0.5 = \text{半} < \text{弱} < 0.9 \leq \text{微弱} < 0 = \text{整} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

を用いた(微強と微弱は後述)。上記、弱の付いた 256 角の周 A は、不等式で

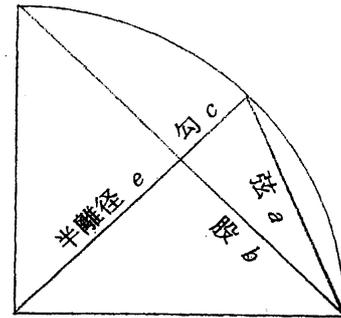
$$3.14151\ 38011\ 44301\ 07632\ \underline{5} < A < \dots 07632\ \underline{9}$$

と表される(44301 の $\underline{4}$ は底本「穴沢本」により補入)。さて関は 256 角の弦 a として

$$0.01227\ 15382\ 85719\ 9261$$
 弱 (「穴沢本」の通り)

を与えた。

ここに注意すべき点がある。関の末位は 9261 弱 となっている(有効数字の桁数で 18 桁)。しかし、関はもっと下の桁まで a の値を知っていた筈である。さもないならば、関の



示した次の周 A の値（有効数字で 22 桁）は彼の示したほど精密には計算できない。 A の値は a の値を 256 倍して得られるからである。つまり『全集』（その元の「穴沢本」）に示された値は、関が計算に実際用いたものに比べて、途中の桁までしか表示されていず、それに続く桁は隠されている。これは《重要な論点》である。

「弱」に隠された a の値を知るには、 A を 256 で割って求めた

$$0.01227\ 15382\ 85719\ 92607\ \underline{93945\ 31\cdots} < a=A/256 < \cdots 92607\ \underline{94101\ 56\cdots}$$

と推定される。これが、隠された値を推定するための、私の《有力な技法》である。

再び《重要な論点》がある。 A を 256 で割って求めた 256 角の弦 a は詳しすぎる。元になる A が 22 桁しかないのに、 a の値は 26 桁もある。すなわち $\cdots 92607\ \underline{939}$ もしくは $\cdots 92607\ \underline{941}$ の辺りまでしか、数値の有効性はない！（これは元になる A の 22 桁に調子を合わせて言う。）そこで最終的に a として推定されるのは

$$0.01227\ 15382\ 85719\ 92607\ \underline{939\cdots} < a=A/256 < \cdots 92607\ \underline{941\cdots}$$

が実際に即した不等式と言うことになる。

《零捨九入》とも言うべき微強と微弱の数値例を挙げよう。関は、四角（正方形）の弦 a および 32 角の弦 a を微強・微弱つきで与えた。不等式では、その次の行になる。

$$a=0.70710\ 67811\ 86547\ 5244\text{微強} \quad [\text{実は } \cdots 52440\ 084\cdots]$$

$$0.70710\ 67811\ 86547\ 5244\text{0} < a < 0.70710\ 67811\ 86547\ 5244\text{1}$$

$$a=0.09801\ 71403\ 29560\ 602\text{微弱} \quad [\text{実は } \cdots 60199\ 419\cdots]$$

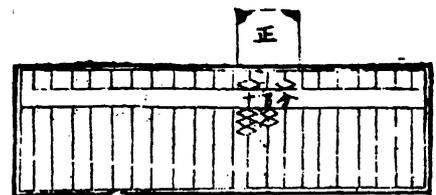
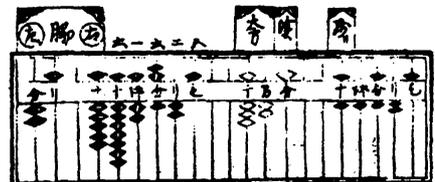
$$0.09801\ 71403\ 29560\ 601\text{9} < a < 0.09801\ 71403\ 29560\ 602\text{0}$$

このように、微強と微弱のついた数値は、次の数字が 1 桁分余計に推定されるので、計算復元のためには有用である。「実は」として書き添えた精密計算の数値を見れば、0084 が微強であり、99419 が微弱であることが分かる。

関の数値の復元において、私が一番気を遣うのは次の論点である。明確に宣言すれば、

「関の計算の追跡には、関が用いたのと同じ桁数による検算を心掛けるべきである。それはおよそ有効数字 22~23 桁である。」

参考までに、[4]『珠算算法の歴史』に出て来るソロバンの図の最大桁は 19 桁であり、また [5]『改算記』（1659）の最大桁は、右図の開立法の 21 桁である。



同じ考え方に立てば、512 角の弧 b の計算には、256 角の弦 a の半分の股 b

$$0.00613\ 57691\ 42859\ 96303\ \underline{9697} < b=a/2 < \cdots 96303\ \underline{9705}$$

を用いるべきである。計算機から出て来る数字を無闇に並べても関には迫れない！

第 4 節 難点の発生

式①から式③までの計算によって〔詳細は補足 2〕 512 角の勾 c を求めれば、

$$0.00003\ 76490\ 80427\ 72953\ \underline{91766\ 86} < c < \cdots 72953\ \underline{91767\ 76}$$

となる。上述のように、512角の周は $A=3.14157\ 29403\ 67091\ 3843$ 弱 すなわち

$$3.14157\ 29403\ 67091\ 38425 < A < \dots 67091\ 38429$$

であったから、512角の弦 a 、512角の勾 c を計算すれば、

$$0.00613\ 58846\ 49154\ 47535\ 98632\ 8125 < a=A/512 < \dots 47535\ 99414\ 0625$$

$$0.00003\ 76490\ 80427\ 72957\ 66468\ 0307 < c^*=\sqrt{a^2-b^2} < \dots 72958\ 81060\ 4171$$

を得る。上記(下からの)勾 $\dots 72953\ 91766\ 86 < c < \dots 72953\ 91767\ 76$

と比べれば、512角の勾 c^* (上からの c^*)のほうが大きい! [詳細は補足2]

私は、この二つの勾 c と c^* との食い違いは見過ごせないと考える。たかが末位のことではないか、と思われるかもしれない。しかし、これは《意味のある》食い違いである。関は有効数字約 20~22 桁を用いて計算しているのに、得られた数値は有効数字 15 桁目に食い違い(微増)が生じている。これが表題に掲げた「微増」の意味である。

第5節 三つの節

関の計算結果は、上述のように[2]『全集』の「求円周率術」に凡て示されている。私は、前節で述べた場合の他、4096角から8192角へ、32768角から65536角へ、の二箇所にも同様な食い違いがあることを確かめた。いわば三つの節がある。関の計算した

$$8192\text{角の周 } 3.14159\ 25765\ 84872\ 66685 < A < \dots 66689 \text{ は、}$$

三角法の周 $3.14159\ 25765\ 84872\ 66568\ 16$ よりも超過している。

$$65536\text{角の周 } 3.14159\ 26523\ 86591\ 35711 < A < \dots 35715 \text{ は、}$$

三角法の周 $3.14159\ 26523\ 86591\ 34850$ よりもかなり超過している。

私は三角法で求めた周との比較を論じている。《塵も積もれば山となる》の諺に言うごとく、各段階で生じた超過は微小であったとしても、後に行くほど大きな超過になり累積する。計算の結果、早く精密な周 $3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 2643\dots$ に近づけば良い、とは言えない。私たちにとっては既知な周の値も、当時の関にとっては[3]『算俎』の前例があるだけで、まさに《未知の数》であり、計算につれて少しずつ増えてはいくが、何処が上限か知りようがなかった。(上限については、第10節で詳述する。)

第6節 開平法

関が計算を間違えないことは、[2]『全集』, p. 367~(またその元である「穴沢本」)に記載された松永良弼と藤田貞資による「訂正」を見ると、かなり上方の桁における数字の脱落と、末位の奇零表現の脱落を指摘しているだけである(これらは写本相伝の際の誤りと推定される)。それに対して、私がいま指摘した末位の数値の誤りについては、松永、藤田が何も述べていないことを見ると、恐らく両者は関の計算を追認したと言えよう。

私は、関が使った《開平法》に問題の鍵が潜む、と考える。和算に限らず、四則演算の次に来る難所は開平法であろう。平方数を2桁ごとに区切って、《普通の割り算》と似たやり方で割っていく(今の学校教育の)方法は関の時代には使われず、むしろソロバンに適した方法が主流であった。それは[4]『珠算算法の歴史』が詳しい。私も別稿[6]で当時

の開立法を詳述し、開平法もそこに述べた。

その原理は、平方数を Q とし、平方根の不足近似値を t とするとき、

$$(Q-t^2)/2t=u \quad \dots\dots \quad \textcircled{8}$$

によって Q の近似値 $t+u$ を求める(一段階法)。しかし $(t+u)^2 > Q$ だから、

$$(Q-t^2)/(2t+u)=v \quad \dots\dots \quad \textcircled{9}$$

によって再び Q の近似値 $t+v$ を求めれば(二段階法)、 $(t+u)^2 > Q > (t+v)^2$ となる。

いま $u-j=v$ と置けば、 $(t+v)^2 = (t+u)^2 - 2j(t+u) + j^2$ となり、 $-2j(t+u) + j^2$ だけ近似が高まったが、まだ $(t+v)^2$ は Q より不足する。そこで $t+u$ を改めて第二の近似値 t と考えて、二回目の計算に取り掛かる云々。具体的な数値例は補足3に示す。

第7節 問題の焦点

当面の問題に戻ろう。256角の弦 a の関の値[補足3]は、

$$3.14151\ 38011\ 44301\ 07632\ \underline{5} < A < \dots 07632\ \underline{9}$$

$$0.01227\ 15382\ 85719\ 92607\ 93945\ \underline{31} < a = A/256 < \dots 92607\ 94101\ \underline{56}$$

$\sin(\pi/256) = 0.01227\ 15382\ 85719\ 92607\ 94082\ \underline{62}$ に極めて近い。すなわち、関の計算は正しく実行された。(A の 44301 の 4 は底本「穴沢本」により補入した。)

一方で、512角の股 b は 256角の弦 a の半分であり、第4節に示したように、

$$0.00613\ 57691\ 42859\ 96303\ 96972\ \underline{66} < b < \dots 96303\ 97050\ \underline{78}$$

$(1/2)\sin(\pi/256) = 0.00613\ 57691\ 42859\ 96303\ 97041\ \underline{31}$ に極めて近い。すなわち関の計算は、この段階までは《精確に為された》と考えてよい。

以下、関の値のみ使って計算を続ける[補足2]。式①によって中間の値である半離径 e (第2節の図を参照) を求めれば、

$$e = \sqrt{0.25 - b^2}$$

$$= \sqrt{0.24996\ 23523\ 37025\ 52751\ 44707\ \underline{90}} > e > \sqrt{\dots 52751\ 44706\ \underline{95}}$$

を得る。式⑧と式⑨により $e^2 = 0.25 - b^2$ を開平する。その前に目標値の予想のため、 e^2 の両辺のそれぞれ《正しい》平方根

$$(\#) \quad 0.49996\ 23509\ 19572\ 27046\ 12064\ \underline{32} > e > \dots 27046\ 12063\ \underline{37}$$

を求めておこう。これを下からの e と呼ぶことにする。

一方 * を付した上からの e^* は、第3節で求めておいた e^* を 0.5 から引けば、

$$(\ast) \quad 0.49996\ 23509\ 19572\ 27042\ 33530\ \underline{62} > e^* > \dots 27041\ 24304\ \underline{80}$$

が得られる。2704 に続く数字を比較してみよう。下からの e (#) に比べて、上からの e^* (※) が小さいことは明瞭である。私が主題(甲)として問題にするのは、まさにこの点である。私はこの食い違いをこう考えた：

「関は下からの e を開平する際、正しい平方根を知らぬゆえ、開平の逐次近似の計算を途中までで止めたのだと《仮定》する。その結果として不足近似値が得られた。それこそが上記の上からの e^* であったのだ」

と。

第5節で言及した（今の学校教育で教える）開平計算は、1桁ずつ正しい平方根の値が求まっていく。それに対して関の時代に使われた開平計算は、本質において《逐次近似》の方法であった。一回計算するごとに何桁づつかは前の値と一致する。その一致した部分は正しい値であると判断できても、それに続く部分のどこまでが正しいのか判断できない。（補足4を参照）

第8節 開平の途中段階

私は前節末に提出した仮説の確認のため、平方根のごく粗い近似値から出発し、次第に近似の程度を高めた。空論にならぬため、数値例を掲げる。出発の近似根：0.49 から

0.49000 0 0 0	→ 一段階法	0.50006 36248 33699 51787 19088 8	
	→ 二段階法	0.49996 13318 67618 20666 49438 81	
0.49990 0 0 0	→ 一段階法	0.49996 23548 07987 12493 94586 97	
	→ 二段階法	0.49996 23509 19329 79084 28145 3	
0.49996 20000 0 0	→ 一段階法	0.49996 23509 19695 42436 67226 5	
	→ 二段階法	0.49996 23509 19572 27041 76029 4	(*)

この最後の値(*)こそ、不等式に挟まれた

$$0.49996 \ 23509 \ 19572 \ 27042 \ 33531 \ 97 \\ > * * > \dots 19572 \ 27041 \ 18939 \ 58$$

であった！ 関は正しい平方根(前節の#)が何かを知らないから、恐らく《この辺(*)で収束した》と判断した。つまり、開平の《途中段階》で計算を止めたのだ！ この値を用いて第5節で述べた計算を逆に辿れば、関自身の256角の周Aに到達する：

$$3.14151 \ 38011 \ 44301 \ 07632 \ 5 > A > 3.14151 \ 38011 \ 44301 \ 07632 \ 9$$

(末位は…07633弱に相当する。)私の復元は、以上である。

望蜀ながら、関がもう二回、一段階法の計算を進めたならば、

$$0.49996 \ 23500 \ 0 \ 0 \rightarrow \text{一段階法} \ 0.49996 \ 23509 \ 19572 \ 27130 \ 65001 \ 66$$

$$0.49996 \ 23509 \ 0 \ 0 \rightarrow \text{一段階法} \ 0.49996 \ 23509 \ 19572 \ 27046 \ 12064 \ 29$$

を得る。この最後の平方根こそ、第7節で触れた《正しい》平方根(#)であった。つまり、関は正しい平方根に到達する前に、逐次近似法の計算を打ち切ったのだ！

関の計算が、第4節、第5節で指摘したように、《途中から微増した》原因を、私はこのように推測したのである。(第二の節については、補足5を参照)

第9節 関の方法の限界

次には、第1節「序」で提起した(乙)の問題を検討しよう。

256角と512角の検算は第3節で述べた。16384=2¹⁴角から130172=2¹⁷角までの計算結果は、第10節で述べる。(中間の値は補足6を参照)

関に代わって計算を続けよう。ただし(問題の焦点を絞るために)以下には各角の勾cのみ示す。

262144=2 ¹⁸ 角の勾	0.00000 00001 43621 64657 52930 15
524288=2 ¹⁹ 角の勾	0.00000 00000 35905 41164 51124 52
1048576=2 ²⁰ 角の勾	0.00000 00000 08976 35291 13586 88
2097152=2 ²¹ 角の勾	0.00000 00000 02244 08822 78447 08
4194304=2 ²² 角の勾	0.00000 00000 00561 02205 69614 918
8388608=2 ²³ 角の勾	0.00000 00000 00140 25551 42403 93
16777216=2 ²⁴ 角の勾	0.00000 00000 00035 06387 85600 995
33554432=2 ²⁵ 角の勾	0.00000 00000 00008 76596 96400 25

数値計算については、第2節に述べた。ここで問題となるのは、 n 角の勾 c からその2倍の $2n$ 角の勾 c' を求める計算である。それは要約すれば、

$$c' = (1 - \sqrt{1-c})/2 \quad \dots\dots\dots \textcircled{10}$$

である。私は関の方法の限界を論じている。ここで問題にするのは微妙な差であって、

$$c' > c/4 \quad \dots\dots\dots \textcircled{11}$$

の如く一般に c' は $c/4$ よりも大きい。これは式⑩を展開してみれば分かるように、

$$c' = (1 - (1 - c/2 - c^2/8 - \dots))/2 = c/4 + c^2/16 + \dots \quad \dots\dots\dots \textcircled{12}$$

と、補正項 $c^2/16 + \dots$ の分だけ大きい。しかし勾 c が《ごく小さい値》の場合には、補正項 $c^2/16 + \dots$ は無視できるほど小さい。従って、勾 c から次矢 c' を計算してみて、

「 c' が c の丁度 $1/4$ に等しくなったとき」

は、も早やそれ以上計算を進められない。これが私の主張する《限界》である。

いま得られた数値によって計算すれば、

$$2^{25}\text{角の勾 } c' \text{ は} \quad 0.00000 \ 00000 \ 00008 \ 76596 \ 96400 \ 25$$

$$2^{24}\text{角の勾 } c \text{ の } 1/4 \quad 0.00000 \ 00000 \ 00008 \ 76596 \ 96400 \ 249$$

と差がない！ 計算はこれ以上進めても無意味である。（勿論、初めから多くの桁を用いたならば、計算は続けられ、その限界は2²⁵角よりも後になって生ずることになる。）

関は第5節で述べたように、三角関数で求めた値に比べて過剰な値を用いているから、もっと早い段階で限界に達したかも知れない。これが、私が表題に掲げた「関の限界」の意味である。

第10節 増約術

いま 2¹⁴角、2¹⁵角、2¹⁶角、2¹⁷角の周を f, g, h, j とし、その差を次のように置く。

$$u = g - f, \quad v = h - g, \quad w = j - h$$

$$f = 3.14159 \ 26343 \ 38562 \ 99082 \ 5$$

$$u = 0.00000 \ 00144 \ 38422 \ 67995 \ 0$$

$$g = 3.14159 \ 26487 \ 76985 \ 67077 \ 5$$

$$v = 0.00000 \ 00036 \ 09605 \ 68635 \ 0$$

$$h = 3.14159 \ 26523 \ 86591 \ 35712 \ 5$$

$$w = 0.00000 \ 00009 \ 02401 \ 41875 \ 0$$

$$j = 3.14159 \ 26532 \ 88992 \ 77587 \ 5$$

簡単のため底本末位の強と弱の代わり、便宜的に 0.25 と 0.75 を付した。比を見ると、

$$v/u=0.25000\ 00011\ 33260\ 90825\ 15$$

$$w/v=0.24999\ 99992\ 13903\ 05574\ 64$$

どちらの比も 0.25 と見做し得る。そこで、この先も同様になると考えて、関は

$$\pi = h + w + 0.25 \cdot w + 0.25^2 \cdot w + \dots = h + w \cdot (1 + 0.25 + 0.25^2 + \dots)$$

と考えると（関は無限級数の概念をもっていたと推測される）、さらに関の『全集』[2]の「諸約之法」の中の「増約」の公式を用いて、（途中で 0.25 を w/v に置き換えて）

$$\pi = h + w \cdot (1/(1-0.25)) = h + w \cdot (1/(1-w/v)) = h + v \cdot w/(v-w) \dots\dots \textcircled{13}$$

なる公式を得た。上記の数値を当てはめれば、

$$\pi = h + 0.00000\ 00012\ 03201\ 89 = 3.14159\ 26535\ 89793\ 25$$

が得られる。関は《3.14159 26535 9弱 を以て定周》と定めた。末位は …89793 2 ままで正しい。関はせつかく小数 16桁まで得ておきながら、計算に自信の持てる桁までを以て《定周》としたのであろう。（この解釈には、別の意見もあり得る。）

第11節 上下から π を挟む不等式

さいごに（丙）の問題を考察する。関も（和算家も一般に）円の内接多角形で π の近似値を求めた。これでは π の下からの近似値しか得られない、と言う批判が生ずる。

竹之内脩氏は近著 [7]『 π 』と [8]『関孝和の数学』において、定周の根拠として

「 $\pi \sim h + w/(1-0.25)$ が π の下限、 $\pi \sim h + w/(1-0.251)$ が π の上限を与える」と述べた。下限のほうはこれで良い。しかし上限の分母に何故 0.251 を用いるのか、明確に説明を述べておられない。私は上限の式は 0.251 の代わりに 0.2501 でもよいことを確かめ、0.25001 では微妙なことを知った。（もちろん、用いる数値の精度（桁数）によって異なると思われるのであるが。）私は、その代わりに

「 π を上下から挟むならば、関の [2]『全集』の「角術」を利用すべきである」と主張する。関の角術から、彼が求めた正十六角についての、

「円の内接辺が 1 のときの半径 2.5629 と、外接辺が 1 のときの半径 2.5137」

（関の言葉では平中径および角中径）を用いればよい。これらの数の逆数を求め、半径を直径に直すため 16 ではなく 16/2 を掛けて、

$$(16/2) \cdot (1/2.5629) = 3.1215 < \pi < (16/2) \cdot (1/2.5137) = 3.1826$$

と計算する。こうして簡単に 3.1215 と 3.1826 で π を挟む不等式が得られた！

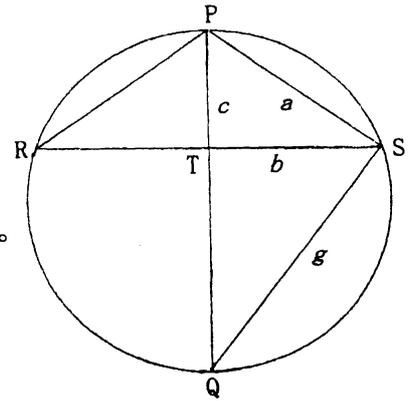
関は「角術」において、正弦と正接のそれぞれ半角公式に相当する式を用いているから、三十二角の値を求めることも出来た筈であり、より狭い不等式

$$3.1365 < \pi < 3.1517$$

も得ようとすれば得られた。角数を増しさえすれば、上下から挟むもつと狭い限界が得られるが、論理上はともかく π を挟む不等式が得られさえすればよい。実は、円の内・外接の正方形の周でも、論理的な不等式 ($2.828\dots < \pi < 4$) が得られる。

補足 1

直径 $PQ=1$ の円に補助線 $SQ=g$ を引く。 $\triangle PSQ \sim \triangle STQ \sim \triangle PTS$ から、 $1 : a = g : b = a : c$, よって
 $a^2 = c, \quad a = \sqrt{c}$ ⑭
 が成立する。彼は気付かず、迂遠な式 ①, ②, ③ を用いた。



補足 2

256角から 512角への移行 (下からの計算とも呼ぶ)

3. 14151 38011 44301 07632 5	<	A	<	...07632 9
0. 00613 57691 42859 96303 96972 66	<	$b = A/512$	<	...96303 97050 78
0. 00003 76476 62974 47248 55292 09536	<	b^2	<	...47248 55293 05412
0. 24996 23523 37025 52751 44707 90464	>	$e^2 = 0.25 - b^2$	>	...52751 44706 94588
0. 49996 23509 19572 27046 12064 32487	>	e	>	...27046 12063 36595
0. 00003 76490 80427 72953 87935 67513	<	$\#c = 0.5 - e$	<	...72953 87936 63405
0. 00000 00014 17453 25705 36474 31756 8	<	c^2	<	...25705 36474 31764 0
0. 00003 76490 80427 72953 91766 41293	<	$a^2 = b^2 + c^2$	<	...72953 91767 37176
0. 00613 58846 49154 47535 96310 1760	<	a	<	...47535 96388 3090
0. 00613 58846 49154 47535 <u>98632 8125</u>	<	$a^* = A/512$	<	...47535 <u>99414 0625</u>

512角の周 A から求めた弦 a^* よりも不足している。これが第 4 節の重要な論点となる。

次に 512角の周 A から求めた弦 $a^* = A/512$ を出発して《逆に遡って》計算する。これを「上からの計算」と呼ぶことにする。以下では区別のために、* を付ける。

0. 00003 76490 80427 72953 91794 91582	<	a^{*2}	<	...72953 91804 50308
0. 00003 76476 62974 47248 55292 09536	<	b^{*2}	<	...47248 55293 05412
0. 00000 00014 17453 25705 36502 82046	<	$c^{*2} = a^{*2} - b^{*2}$	<	...25705 36511 44096
0. 00003 76490 80427 72957 66469 38109	<	$\ast c^* = \sqrt{a^{*2} - b^{*2}}$	<	...72958 75695 19626

これが第 4 節で引用した c^* に相当し、第 7 節の $e^* = 0.5 - c^*$ も直ちに得られる。

0. 49996 23509 19572 27042 33530 61891	>	$e^* = 0.5 - c^*$	>	...27041 24304 80374
--	---	-------------------	---	----------------------

b^{*2} は上記の b^2 と同じとした。 $\ast c^*$ が上記の $\#c$ よりも大きいことが分かる。

補足 3

八角を例に取る。股 b は四角の弦 $a = \sqrt{0.5} = 0.70710 6781$ の半分 $b = 0.35355 3391$ で、八角の勾 c は、 $c = 0.5 - b = 0.1464 46609$ 。八角の弦 a は平方根 \sqrt{c} を求める。

一回目

仮の根 0.3 から $(a - 0.3^2)/0.6 = 0.09407 7682$ 、一段階法の根 $\sqrt{c} = 0.39407 7682$ を得るが、自乗は 0.15529 7220 で、根としては不十分。二段階法は $0.6 + 0.09407 7862 = 0.69407 7682$ で $(a - 0.3^2)/0.69407 7682 = 0.08132 6068$ を得て、根 0.38132 6068 となる。その自乗は 0.14540 9570 で、2桁しか合わず、まだ目標から遠い。

二回目

仮の根を 0.38 とする。 $(a-0.38^2)/0.76=0.00269\ 2907$, そこで一段階法の根 $\sqrt{c}=0.38269\ 2907$ を得る。その自乗は 0.14645 3861 で、まだ不足する。二段階法は $0.76+0.00269\ 2907=0.76269\ 2907$ で $(a-0.38^2)$ を割って、0.00268 3399, 0.38 に足して、0.38268 3399. その自乗は 0.14644 6584 で、目標 0.14644 6609 に近づいた。

三回目

仮の根を 0.3826 とする。 $(a-0.3826^2)/0.7652=0.00008\ 3441$, そこで一段階法の根 $\sqrt{c}=0.38268\ 3441$ を得る。その自乗は 0.14644 6616, 目標に近い。二段階法は

$(a-0.3826^2)/0.76528\ 3441=0.00008\ 34318$, $0.38268\ 342318^2=0.14644\ 6609$, これで目標に達した。この補足3の例題の数値例は桁数が短いから、すぐに平方根に達した。

本文の問題はもっと桁数が長く、どこまで計算すれば収束するのか判断しにくい。これが第7節の末尾で述べた難点であった。

なお一般に、一段階法は過剰な近似値を与え、二段階法は不足の近似値を与える。

補足4

第8節の値を先取りし、そのことを説明する。収束の遅い一段階法の値のみを用いる。

(1)	0.49900 0 0 0	→ 一段階法	0.49996 32788 94815 15783 01310
(2)	0.49990 0 0 0	→ 一段階法	0.49996 23548 07987 12493 94587
(3)	0.49996 0 0 0	→ 一段階法	0.49996 23509 25099 53547 73090
(4)	0.49996 20000 0 0	→ 一段階法	0.49996 23509 19695 42436 67227
(5)	0.49996 23000 0 0	→ 一段階法	0.49996 23509 19674 86345 91756
(6)	0.49996 23500 0 0	→ 一段階法	0.49996 23509 19572 27130 65002
(7)	0.49996 23509 0 0	→ 一段階法	0.49996 23509 19572 27046 12064
(8)	0.49996 23509 10000 0	→ 一段階法	0.49996 23509 19572 27046 09149
(9)	0.49996 23509 19000 0	→ 一段階法	0.49996 23509 19572 27046 08237
(10)	0.49996 23509 19500 0	→ 一段階法	0.49996 23509 19572 27046 08234
(11)	0.49996 23509 19570 0	→ 一段階法	0.49996 23509 19572 27046 08233
(12)	0.49996 23509 19572 0	→ 一段階法	0.49996 23509 19572 27046 08233

このように(12)で収束したが、《前の根との一致部分を用いる》という原則に立てば、(1), (3), (6), (9), (12)という《飛び飛び》の近似値を辿って、収束値に到達する。二段階法では余りに早く収束するので、一段階法によって例示した。

本文に述べた、前の根との一致部分がどのくらいの速さで出現するかは、経験によって分かる。恐らく関は或る程度の経験は有したが、この円周率計算の場合は先を急ぐため、《この辺で収束しただろう》と判断して、開平計算を打ち切ったのであろう。考えても見よ。関が使用できた武器は《ソロバン》である。同じような計算を繰り返して行く途中では、何処で《収束》したのか判断しにくい。

《計算を打ち切った》と私が判断できるのは、多桁の数値処理を自作して搭載したプロ

グラム電卓を使ったからである。もちろん普通の計算機には、ここで述べたような《開平の算法》は存在せず、内部処理は《対数計算》（長桁の数値を一旦対数に直し、2で割り、再び真数に戻す）を実行するから、殆ど関の計算を検算したことにはならない。

補足 5

第5節で述べた《第二の節》すなわち4096角から8192角への移行の際、第7節で述べたのと同様な状況が見られる。すなわち、下から計算した半離径 e に比べて、上から計算した半離径 e^* が不足している。その原因を第8節で述べた「開平の途中段階で近似計算を止めた」ことに起因する、と考えた。私は甚だ微妙な点を問題にしている。局面を率直に提示するに止めたい。

上からの e^* は

$$0.4999\ 98529\ 31441\ 10925.58925\ 77 > e^* > 10925.58925\ 68$$

であり、下からの e は

$$0.4999\ 98529\ 31441\ 10958.01141\ 0 > e > 10958.01140\ 9$$

であり、上からの e^* は下からの e よりも不足している。

二段階法によれば、近似値

$$0.49999\ 90000\ 0\ 0 \rightarrow 0.49999\ 98529\ 31441\ 10895.96113\ 0$$

$$0.49999\ 98000\ 0\ 0 \rightarrow 0.49999\ 98529\ 31441\ 10957.99657\ 9$$

であって、この中間で上からの e^* がほぼ再現される。即ち、「関が計算の途中段階で計算をやめたことに起因する」という私の仮説は辛うじて成立する。

一段階法のみで真の値に近づくためには、さらに計算を続けて行なう。近似値は

$$0.49999\ 98520\ 0\ 0 \rightarrow 0.49999\ 98529\ 31441\ 11044.77$$

$$0.49999\ 98529\ 0\ 0 \rightarrow 0.49999\ 98529\ 31441\ 10958.11$$

となって、一段階法のみでも上からの e^* がほぼ再現される。

しかし、私は《第三の節》すなわち32768角から65536角への移行の際に期待される、これと同様な現象を説明する計算に成功していない。その解決は他日に期す。

補足 6

十六角から 130172角まで、私の復元値を示す。股 b は前角の弦 a の半分ゆえ、省略。
[2]『全集』の数値と比べてみよ。関が末位を「奇零表現」で覆った所を私は復元した。
比較のため、三角法で求めた周を《三》の欄に示した。

十六角	勾	0.03806	02337	44356	62193	6	周	3.12144	51522	58052	28556	8
	弦	0.19509	03220	16128	26784	8	三	3.12144	51522	58052	28557	3
三十二角	勾	0.00960	73597	98384	77543	7	周	3.13654	84905	45939	26384	0
	弦	0.09801	71403	29560	60199	5	三	3.13654	84905	45939	26381	4
六十四角	矢	0.00960	73597	98384	77543	7	周	3.14033	11569	54752	91232	0
	弦	0.04906	76743	27418	01425	5	三	3.14033	11569	54752	91231	7

百二十八角	勾	0.00060	22718	97413	80364	262	周	3.14127	72509	32772	86807	<u>68</u>
	弦	0.02454	12285	22912	28803	185	三	3.14127	72509	32772	86806	20
2 5 6 角	勾	0.00015	05906	51897	88994	211	周	3.14151	38011	44301	07632	<u>64</u>
	弦	0.01227	15382	85719	92607	942	三	3.14151	38011	44301	07632	85
5 1 2 角	勾	0.00003	76490	80427	72953	918	周	3.14157	29403	67091	38426	<u>88</u>
	弦	0.00613	58846	49154	47535	99	三	3.14157	29403	67091	38413	58
1 0 2 4 角	勾	0.00000	94123	58699	42867	1506	周	3.14158	77252	77159	70076	<u>67</u>
	弦	0.00306	79567	62965	97627	0280	三	3.14158	77252	77159	70062	89
2 0 4 8 角	勾	0.00000	23530	95211	91424	421	周	3.14159	14215	11199	97414	<u>00</u>
	弦	0.00153	39801	86284	76561	2373	三	3.14159	14215	11199	97399	80
4 0 9 6 角	勾	0.00000	05882	74149	04503	54872	周	3.14159	23455	70117	74248	<u>75</u>
	弦	0.00076	69903	18742	70452	6974	三	3.14159	23455	70117	74234	07
8 1 9 2 角	勾	0.00000	01470	68558	89041	9886	周	3.14159	25765	84872	66684	<u>11</u>
	弦	0.00038	34951	87571	39558	9214	三	3.14159	25765	84872	66568	16
1 6 3 8 4 角	勾	0.00000	00367	67141	07422	76343	周	3.14159	26343	38562	99081	<u>73</u>
	弦	0.00019	17457	97310	70330	7545	三	3.14159	26343	38562	98909	55
3 2 7 6 8 角	勾	0.00000	00091	91785	35309	58266	周	3.14159	26487	76985	67077	<u>89</u>
	弦	0.00009	58737	99095	97734	591	三	3.14159	26487	76985	66948	53
6 5 5 3 6 角	勾	0.00000	00022	97946	34355	4514	周	3.14159	26523	86591	35714	<u>99</u>
	弦	0.00004	79368	99603	06688	4722	三	3.14159	26523	86591	34580	36
1 3 0 1 7 2 角	勾	0.00000	00005	74486	58621	86633	周	3.14159	26532	88992	77592	<u>99</u>
	角弦	0.00002	39684	49808	41821	88105	三	3.14159	26532	88992	76527	18

第5節で指摘したが、5 1 2 角の周は三角法で求めた周よりも小数19桁に1.33単位の過剰がある（第一の節）。8 1 9 2 角の周は過剰の度合いが一段と進み、三角法の周よりも小数18桁に1.1595単位の過剰があり（第二の節）、6 5 5 3 6 角の周は、小数17桁に1.13463単位の過剰が生じている（第三の節）。各節で過剰が一桁ずつ繰り上がることに注目！

文 献

- [1] 杉本敏夫：解説・関孝和——天才の思考過程、海鳴社、2008.
- [2] 平山諦・広瀬秀雄・下平和夫編集：関孝和全集、大阪教育図書、1980.
- [3] 村松茂清 原著・佐藤健一著：算 —現代訳と解説—、研成社、1987.
- [4] 山崎與右衛門・戸谷清一・鈴木久夫：珠算算法の歴史、森北出版、1958.
- [5] 山田正重 原著・佐藤健一著：改算記、研成社、1659.
- [6] 杉本敏夫：開立法のある難点の解決、数学史研究、190号、2006.
- [7] 竹之内脩： $\pi - \pi$ の計算 アルキメデスから現代まで—、共立出版、2007
- [8] 竹之内脩：関孝和の数学、共立出版、2008.

(2008. 8. 5 発表、11. 25 記)