数理解析研究所講究録
第 1627 巻 2009 年 18-49

Cuntz-Krieger環の生成元達の組み合わせ論的性質と関連する力学系のゼータ関数について

横浜市立大学　松本健吾 (Kengo Matsumoto)

0 はじめに

この小文では、次の2つのプレプリントの内容を紹介します。

Ⓐ K. Matsumoto「Cuntz-Krieger algebras and a generalization of Catalan numbers」
arXiv: 0607517

Ⓑ W. Krieger & K. Matsumoto「Zeta functions and topological entropy of the Markov Dyck shifts」
arXiv: 0706.3262

従って、この小文は W. Krieger との共同研究に基づいたものです。目標とすることは、次の表の ?① , ?② と ?③ を埋めることです。?① と ?② は主にⒶで取り上げ、?③ はⒷのプレプリントで考えました。

C*環	Cuntz環 $\mathcal{O}_N$	Cuntz-Krieger環 $\mathcal{O}_A$
組み合わせ論	(N-色) カタラン数	?①
記号力学系	Dyck shifts D_N	?②
力学系のゼータ関数	$\zeta_{D_N}(t)$ (G. Keller 1989) による	?③

Cuntz環 $\mathcal{O}_N$ の生成元 $S_1, \cdots, S_N$ は等距離作用素達で $\sum_{j=1}^{N} S_j S_j^*$ を満たすものです。
これら生成元 $S_1, \cdots, S_N, S_1^*, \cdots, S_N^*$ の組み合せ論的性質はカタラン数で統制され、その生成元達のなす記号列からできる記号力学系は、Dyck シフトと呼ばれるサブシフトになります。
このDyckシフトの力学系のゼータ関数は、

G. Keller: J. Combinatorial Theory 56(1991) 75-83
により求められています。そこで問題は、Cuntz環の代わりに、Cuntz-Krieger環に一般化した場合に、カタラン数やDyck shiftsやそのゼータ関数がどのように一般化されるか？ということになります。

[1] 力学系のゼータ関数

ゼータ関数と言えば、Riemannゼータ関数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p:\text{素数}} (1-p^{-s})^{-1}$$

があまりにも有名ですが、これから登場するゼータ関数は、その力学系への類似物であり、歴史的には

Selberg (1952) が Riemann面、Riemann対称空間の測地線構造に対して

Artin-Mazur (1965) が C^∞多様体上の可微分同相写像達にそして

Ruelle (1976) が力学系のゼータ関数の定式化と、統計力学的観点からの研究

の論文等で、その定義が確立し、研究され始めたと言えそうです。

以下 X をコンパクトハウスドルフ空間, ϕ をその上の同相写象とします。$P_n(\phi)$, $n=1,2\ldots$ で ϕ の n-周期点全体のなす集合

$$P_n(\phi)=\{x\in X \mid \phi^n(x)=x\}$$

を表わし, $p_n(\phi)$ をその個数 $\# P_n(\phi)$ とします ($p_n(\phi)=\infty$ の場合も, もちろんあります)。この数列

$$p_1(\phi),\ p_2(\phi),\ p_3(\phi),\ \ldots$$

は力学系 (X, ϕ) の位相共役不変量になっています。力学系のゼータ関数 $\zeta_\phi(t)$ はこの数列 $\{p_n(\phi)\}_{n=1}^{\infty}$ をまとめ上げたものですが, $p_n(\phi)=\infty$ になってしまうと取り扱えないので, 以下

$$p_n(\phi)<\infty \qquad \forall n=1,2,3,\ldots$$

となる力学系 (X, ϕ) に限定して考えます。

$\boxed{\text{定義}}$ (力学系のゼータ関数)

$p_n(\phi)<\infty$ $\forall n=1,2,\ldots$ となる力学系 (X, ϕ) に対して, そのゼータ関数を

$$\zeta_\phi(t)=\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_n(\phi)}{n}t^n\right)$$

と定義します。

exp の中身は無限級数なので，収束半径の問題，
解析接続の問題，解析接続した後の関数の形や，
零点の問題等，解析的な問題は重要ですが，ここでは
しばらく，形式的な定義で考えてみます。

形式的には

$$\zeta_\phi(t) = 1 + p_1(\phi) + \frac{1}{2}\left(p_2(\phi) + p_1(\phi)^2\right)t^2 + \frac{1}{6}\left(2p_3(\phi) + 3p_1(\phi)p_2(\phi) + p_1(\phi)^2\right)t^3 + \cdots$$

や

$$\frac{d^n}{dt^n}\log\zeta_\phi(t)\Big|_{t=0} = n!\,\frac{p_n(\phi)}{n}$$

なので，ゼータ関数 $\zeta_\phi(t)$ から数列 $p_n(\phi), n=1,2,\ldots$ も
復活できます。このゼータ関数はオイラー積表示

$$\zeta_\phi(t) = \prod_{\gamma:\text{周期軌道}} \left(1 - t^{|\gamma|}\right)^{-1}$$

（但し，$|\gamma|$ は周期軌道の周期の長さ）をもつので，
形式的に $e^{-s}=t$, $N(\gamma) \equiv e^{|\gamma|}$ とおくと，

$$\zeta_\phi(t) = \prod_{\gamma:\text{周期軌道}} \left(1 - N(\gamma)^{-s}\right)^{-1}, \quad |t|^{-1} = Re(s)$$

となり, Riemma ゼータ関数の形の類似であることが良く分ります。以下簡単な例を記号力学系を題材にして計算してみましょう。その際, 必要なのは初等的公式

$$\sum_{k=0}^{\infty} t^k = \frac{1}{1-t} \qquad \text{とその積分形}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} = -\log(1-t)$$

だけです。

$\boxed{\text{例1}}$ $(X, \phi) = (\underset{1点}{\cdot}, id)$

$P_n(\phi) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ なので

$$\begin{aligned} \zeta_\phi(t) &= \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}\right) \\ &= \exp(-\log(1-t)) \\ &= \frac{1}{1-t}. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{例2}}$ $(X, \phi) = (\{1, 2, \cdots, N\}^{\mathbb{Z}}, \sigma)$: N-fullshift

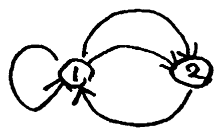
そこで $\sigma((x_i)_{i\in\mathbb{Z}}) = (x_{i+1})_{i\in\mathbb{Z}}$: シフト

n-周期点 $P_n(\sigma)$ は n 文字列 $\{1, 2, \cdots, N\}^n$ で決まるので $P_n(\sigma) = N^n$ となります。従って

$$\zeta_\sigma(t) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{N^n}{n} t^n\right)$$
$$= \exp(-\log(1-Nt))$$
$$= \frac{1}{1-Nt}$$

$\boxed{例3}$ $(X,\phi)=(X_G,\sigma)$：位相的マルコフシフト

$G=(V,E)$を既約な有向有限グラフで、頂点Vの個数はNとします。A_Gで$N\times N$隣接行列とします。例えば…

G:  なら $A_G = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ です。

$$X_G = \{(x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in E^{\mathbb{Z}} \mid r(x_i)=s(x_{i+1}) \ \forall i\in\mathbb{Z}\}$$

そこで…

$r(x_i)$, $s(x_{i+1})$は辺x_iの終点、辺x_{i+1}の始点です。
無限直積位相で$E^{\mathbb{Z}}$はコンパクトハウスドルフ空間でX_Gはそのコンパクト部分集合です。

$\sigma_G: X_G \longrightarrow X_G$ を $\sigma_G((x_i)_{i\in\mathbb{Z}}) = (x_{i+1})_{i\in\mathbb{Z}}$ と定義したとき、位相力学系(X_G, σ_G)をグラフGから定義される位相的マルコフシフトと呼びます。
このとき、頂点iから頂点jへの辺の本数は$(A_G)^n(i,j)$なので、n-周期点の個数は

$$P_n(\sigma_G) = \sum_{i=1}^{N} (A_G)^n(i,i) = Tr((A_G)^n)$$
$$= \lambda_1^n + \cdots + \lambda_N^n$$

但し $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_N\}$ は A_G の重複を許した固有値リストです。従って、ゼータ関数は

$$\zeta_{\sigma_G}(t) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_1^n + \cdots + \lambda_N^n}{n} t^n\right)$$
$$= \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_1^n}{n} t^n\right) \times \cdots \times \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_N^n}{n} t^n\right)$$
$$= \frac{1}{1-\lambda_1 t} \times \cdots \times \frac{1}{1-\lambda_N t}$$
$$= \frac{1}{\det(1 - A_G t)}$$

となり行列式表示をもちます。この表示は Bowen-Lanford Formula (1970) と呼ばれています。

$\boxed{\text{例14}}$ $(X, \phi) = (D_N, \sigma_{D_N})$: Dyck シフト

$2 \leq N \in \mathbb{N}$ として、Σ_N を N-種の括弧とします。

$$\Sigma_N = \{ (_1, (_2, \cdots, (_N,)_N, \cdots,)_2,)_1 \}$$

ここで括弧 $(_i,)_j$ に次の演算を定義します。

$$(*) \quad \boxed{(_i \cdot)_j = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}}$$

このとき

$$\mathcal{F}_N=\{(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)\in\Sigma_N\times\cdots\times\Sigma_N \mid \gamma_1\cdots\gamma_n=0\}$$

と定義します。例えば…

$({}_1)_2$, $({}_2)_1$, $({}_1({}_2)_2)_2$, $({}_3({}_1)_1({}_2)_2)_4\in\mathcal{F}_N$

つまり、$\mathcal{F}_N$ は整合しない括弧の並びの集合です。

$$D_N=\{(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}\in\Sigma_N^{\mathbb{Z}} \mid (x_{k+1},x_{k+2},\cdots,x_{k+m})\notin\mathcal{F}_N \quad \forall k\in\mathbb{Z},\ \forall m\in\mathbb{N}\}$$

とおくと D_N は整合しない括弧列が現れない括弧の両側無限列全体であり $\Sigma_N^{\mathbb{Z}}$ のコンパクト部分集合になります。$\sigma_{D_N}: D_N\to D_N$ を例3と同様のシフトとしたとき、位相力学系 (D_N, σ_{D_N}) を Dyck シフトと呼びます。Dyck シフトは例3のマルコフシフトではなく、さらには ソヒックシフトと呼ばれる色付有向有限グラフで現されるサブシフトにもなりません。ソヒックでない記号力学系のゼータ関数を計算するのは一般にかなり難しく、殆ど計算例が知られていません。ただこの Dyck シフトのゼータ関数 $\zeta_{D_N}(t)$ については、G. Keller がカタラン数の母関数を使って、次のように計算しています。

定理 (G. Keller 1989)

$$\zeta_{D_N}(t) = \frac{2(1+\sqrt{1-4Nt^2})}{(1-2Nt+\sqrt{1-4Nt^2})^2}$$

Kellerは Dyck shiftの周期点の個数 $P_n(D_N)$ については求めていません。九州大学の浜地先生のところの大学院生だった井上さんによって $P_n(D_N)$ は次のように計算されています。

定理 (K. Inoue)

$N=2$ のとき

$$P_n(D_2) = \begin{cases} 2\left\{3^n - \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{i} 2^i\right\} & (n\text{:奇数}) \\ 2\left\{3^n - \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{i} 2^i\right\} + \binom{n}{\frac{n}{2}} 2^{\frac{n}{2}} & (n\text{:偶数}) \end{cases}$$

$\boxed{2}$ Cuntz環とCatalan数

Cuntz環 $\mathcal{O}_N$ の生成元 $S_1, \cdots, S_N$ は等距離作用素で、 $S_i^* S_i = 1,\ i=1,\dots,N$, $\sum_{j=1}^{N} S_j S_j^* = 1$ を満たします。

従って、

(＊) $$\boxed{S_i^* \cdot S_j = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i\neq j) \end{cases}}$$

となります。$S_1^*, \cdots, S_N^*, S_1, \cdots, S_N$ の word（有限個の積）で 0 になるのは (☆) で 0 になるときに限るので，先の Dyck shift は

$$S_i^* \leftrightarrow (_i, \quad S_i \leftrightarrow)_i$$

と対応させることにより

$$D_N = \left\{ (\gamma_i)_{i\in\mathbb{Z}} \;\middle|\; \begin{array}{l} \gamma_i = S_j^* \text{ or } S_j\,; \\ \gamma_{k+1}\cdot\gamma_{k+2}\cdots\gamma_{k+m} \neq 0 \text{ in } \mathcal{O}_N \\ \forall k\in\mathbb{Z},\ \forall m\in\mathbb{N} \end{array} \right\}$$

と見なせます。

さて，Catalan数 c_n, $n=0,1,2,\ldots$ は，次で定義される数列です。

$$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \quad \left(= \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} \right)$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

に従って，

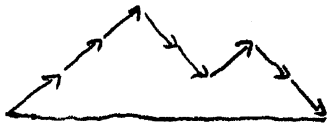
$$\begin{array}{cccccccc} 1, & 1, & 2, & 5, & 14, & 42, & \cdots \\ \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & \end{array}$$

となります。

Catalan数は自然界の様々な物の数え上げに現れる数で，R. Stanley「Enumerative Combinatorics vol 2」には，なんと66種の例が書いてあります。次は，その中の有名な3つです。

$C_n = \#\{$上り↗ n 本, 下り↘ n 本の山脈の形$\}$

例えば



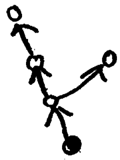
$= \#\{2n$ 個の整合した括弧$\}$

例えば

((())())

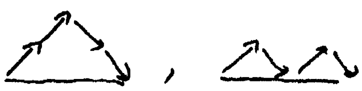
$= \#\{n$ 本の枝からなる根付き木$\}$

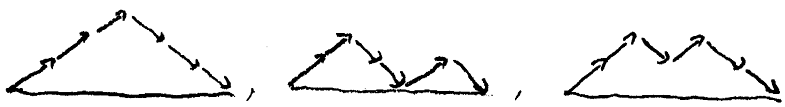
例えば

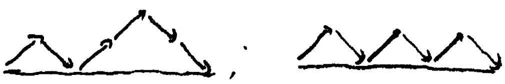


一番上の上り n 本下り n 本の山脈の形は Dyck path とも呼ばれています。詳しく書くと

$n=1$  $\therefore C_1 = 1$

$n=2$  $\therefore C_2 = 2$

$n=3$ 

 $\therefore C_3 = 5$

⋮

そこで　$S_i^* \longleftrightarrow \overset{i}{\nearrow}$　ラベル i の上り

$S_i \longleftrightarrow \overset{i}{\searrow}$　〃　下り

と対応させると

$\forall \gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_{2n})$, $\gamma_i = S_j^*$ or S_j に対して

$\gamma_1 \cdot \cdots \cdot \gamma_{2n} = 1$ in $\mathcal{O}_N$ となるための必要かつ十分条件は

$\gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_{2n})$ がある Dyck path を与えてることになります。従って、

$$\Sigma_N = \{ S_1^*, \cdots, S_N^*, S_1, \cdots, S_N \};$$

$$C_n^{(N)} \equiv \# \left\{ (\gamma_1, \cdots, \gamma_{2n}) \mid \begin{array}{l} \gamma_i \in \Sigma_N, \ \forall i = 1, \cdots, 2n; \\ \gamma_1 \cdot \cdots \cdot \gamma_{2n} = 1 \text{ in } \mathcal{O}_N \end{array} \right\}$$

とおいたとき

$\boxed{\text{命題}}$　$C_n^{(N)} = N^n \times C_n$,　$n = 0, 1, 2, \cdots$

となります。この $C_n^{(N)}$ という数は、組み合わせ論では、N色カタラン数と呼ばれているものです。以上の Cuntz 環の生成元と Catalan 数の対応は、難しいものではなく、Voiculescu, Bożejko や自由確率論を研究している人達には既に良く知られていたことのようです。

$\boxed{3}$ Dyck shifts と Catalan数の Cuntz-Krieger環による一般化。

今までの議論は, Cuntz環 $\mathcal{O}_N$ の生成元達を用いて行いましたが, Cuntz環を一般化した Cuntz-Krieger環でこの議論を一般化しましょう。

$G=(V,E)$ を有向有限グラフとします。その0-1推移行列 A^G を $e,f\in E$：有向辺に対して

$$A^G(e,f)=\begin{cases}1 & \text{if } \xrightarrow{e}\circ\xrightarrow{f}\\ 0 & \text{othorwise}\end{cases}$$

と定義します。グラフ G に対する Cuntz-Krieger環 $\mathcal{O}_{A^G}$ は部分等距離作用素 S_e, $e\in E$ で生成される普遍 C^*環で, 関係式は

$$\begin{cases} S_e^* S_e = \sum_{f\in E} A^G(e,f)\, S_f S_f^*, \\ \sum_{f\in E} S_f S_f^* = 1 \end{cases}$$

です。特に $G=$  N-edges, 頂点1個

のとき $A^G=\begin{bmatrix}1 & \cdots & 1\\ \vdots & & \vdots\\ 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}$ となり $\mathcal{O}_{A^G}=\mathcal{O}_N$ となります。

さてグラフ G に対して

$\Sigma_G=\{S_e^*, S_e \mid e\in E\}$ とおきます。

$$\mathcal{F}_G = \{(\gamma_1,\dots,\gamma_n)\in \Sigma_G\times\cdots\times\Sigma_G \mid \gamma_1\cdots\gamma_n = 0 \text{ in } \mathcal{O}_{A_G}\}$$

と禁止語を決めて,

$\boxed{\text{定義}}$ (位相的マルコフダイクシフト)

$$D_{A_G} = \{(x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \mid x_i\in\Sigma_G,\ i\in\mathbb{Z},\ x_{k+1}\cdots x_{k+m}\notin\mathcal{F}_G\quad \forall k\in\mathbb{Z},\ \forall m\in\mathbb{N}\}$$

特に

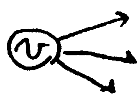
$G=$  N-edges のとき $D_{A_G}=D_N$ ダイクシフトとなります。

Cuntz-Krieger に従って, G が Condition (I) を満たすとは, (1) 任意の頂点に入ってくる辺と出ていく辺が必ずあり (2) 任意の頂点から何本かの辺を通って必ず異なる2個以上の頂点に到達できる ときを言います。このとき

$\boxed{\text{命題}}$ G が Condition (I) を満たすならば, サブシフト D_{A_G} はソフィックにならない。

そこで, これから, このサブシフト D_{A_G} のゼータ関数 $\zeta_{D_{A_G}}(t)$ を求めてみましょう。そのために, 先に現れた N色カタラン数を一般のグラフ G に対して, 一般化する必要があるのです。

そこで頂点 $v\in V$ に対して, 射影 $P_v=\sum_{s(f)=v} S_f S_f^*$ とおきます。すると



- $P_v P_u = 0 \quad (v \neq u)$
- $S_e^* S_f = \begin{cases} P_{t(e)} & (e=f) \\ 0 & (e \neq f) \end{cases}$, $t(e)$はeの終点。

を満たします。辺集合Eを $E=\{e_1, \cdots, e_{|E|}\}$ とすると、

$$\Sigma_G = \{ S_{e_1}^*, \cdots, S_{e_{|E|}}^*, S_{e_1}, \cdots, S_{e_{|E|}} \}$$

となります。そこで

Cuntz環 $\mathcal{O}_{|E|}$ を用意し、その等距離生成元達を $s_1, \cdots, s_{|E|}$ で書き、対応 $\Phi_G : \Sigma_G \longrightarrow \Sigma_{|E|} = \{ s_i^*, s_i \mid i=1, \cdots, |E| \}$

を $\Phi_G(S_{e_i}^*) = s_i^*$, $\Phi_G(S_{e_i}) = s_i$, $i=1, \cdots, |E|$

で定義します。

$\boxed{\text{定義}}$ (G-Catalan words, G-Catalan数)

$$B_n^G = \left\{ (X_1, \cdots, X_{2n}) \;\middle|\; \begin{array}{l} X_i \in \Sigma_G \; i=1, \cdots, 2n \; ; \\ X_1 \cdots X_{2n} \neq 0 \text{ in } \mathcal{O}_{A^G} \\ \Phi_G(X_1) \cdots \Phi_G(X_{2n}) = 1 \text{ in } \mathcal{O}_N \end{array} \right\}$$

を G-Catalan words と呼び、

$$C_0^G \equiv \# V \ (= N)$$

$$C_n^G \equiv \# B_n^G, \quad n = 1, 2, \cdots$$

を G-Catalan 数と定義します。

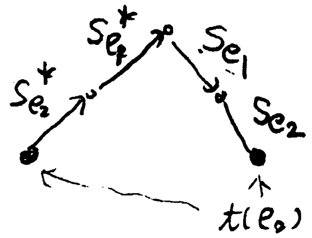
例えば、

$(S_{e_2}^*, S_{e_1}^*, S_{e_1}, S_{e_2})$ は $t(e_1) = s(e_2)$ であれば

G-Catalan word ですし，積を計算すると

$$S_{e_2}^* S_{e_1}^* S_{e_1} S_{e_2} = S_{e_2}^* \Big(\sum_{f\in E} A^G(e_1,f)\, S_f S_f^*\Big) S_{e_2}$$

$$= \sum_{f\in E} A^G(e_1,f)\, S_{e_2}^* S_f S_f^* S_{e_2}$$



$$= A^G(e_1,e_2)\, S_{e_2}^* S_{e_2} = S_{e_2}^* S_{e_2}$$

$$= P_{t(e_2)}$$

と山の登り口(=下り口)の頂点への射影になります。
これはどんな G-Catalan word に対しても正しく，
勝手な $X=(X_1,\dots,X_{2n})\in B_n^G$ に対して，唯一頂点
$v(X)\in V$ が存在して（登り口=下り口の頂点），

$$X_1 X_2 \cdots X_{2n} = P_{v(X)} \quad \text{in } \mathcal{O}_{A^G}$$

となることが簡単にわかります。次の補題も分ります

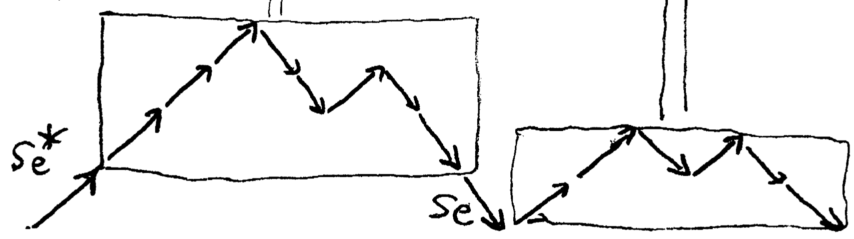
$\boxed{\text{補題}}$ 勝手な $X=(X_1,\dots,X_{2n+2})\in B_{n+1}^G$ に対して，
次のように一意的に分解できる。

$$X=(S_e^*, Y_1,\dots,Y_{2k}, S_e, Z_1,\dots,Z_{2(n-k)}),$$

但し $(Y_1,\dots,Y_{2k})\in B_k^G$,
$(Z_1,\dots,Z_{2(n-k)})\in B_{n-k}^G$
です。

これは次のような絵を書けば一発で分るでしょう。

$$X = (S_e^*, \boxed{Y_1, \quad Y_{2k}}, S_e, \boxed{Z_1, \ \cdots \ , Z_{2(n-k)}})$$



頂点 $V=\{v_1,\cdots,v_N\}$ とします。$i=1,\cdots,N$ に対して

$$B_n^G(i) = \{(X_1,\cdots,X_{2n}) \in B_n^G \mid X_1\cdots X_{2n} = P_{v_i}\}$$

$$C_0^G(i) = 1$$

$$C_n^G(i) = \# B_n^G(i)$$

と定義します。これらは頂点 v_i に根をもつ G-Catalan数です。グラフ G の頂点の隣接行列を A_G とします

$$A_G(i,j) = \#\{e \in E \mid v_i \xrightarrow{e} v_j\}$$

$i,j=1,\cdots,N$。

先の補題から、次の命題が瞬間芸でわかりますね。

$\boxed{\text{命題}}$

(1) $$C_n^G = \sum_{i=1}^{N} C_n^G(i)$$

(2) $$C_{n+1}^G(i) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=1}^{N} C_k^G(j) A_G(j,i) C_{n-k}^G(i)$$

ここで、この頂点 v_i に根っこをもつCatalan数 $C_n^G(i)$ を求めるため、組み合わせ論では常とう手段となっている母関数を考えましょう。

$$f_i^G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^G(i) x^n, \quad i=1,\dots,N$$

$$f^G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^G x^n \qquad \text{とおきます。}$$

このとき、次の定理の前半は先の瞬間芸命題の言い換えです。

$\boxed{\text{定理}}$

(1) $$f^G(x) = \sum_{i=1}^{N} f_i^G(x)$$

(2) 関数達 $f_1^G(x), \dots, f_N^G(x)$ は次の式(*)

(*) $$f_i^G(x) = 1 + x\sum_{j=1}^{N} f_j^G(x) A_G(j,i) f_i^G(x), \quad i=1,\dots,N$$

を満たし、原点の近傍で、この関係式(*)だけで、一意的に決まる。またこの関数達 $f_i^G(x)$, $i=1,\dots,N$ は原点の近傍で何回でも微分可能である。

証明の後半には、微積分の授業で習う陰関数定理を使います。私は生まれて初めて、陰関数定理を自分の研究で使いました。まさかCuntz-Krieger環の研究で陰関数定理を使うとは夢にも思いませんでした(びっくり)。

次に母関数 $f_i^G(x)$ の収束半径を調べたいと思います。R_i^G を $f_i^G(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n^G(i)x^n$ の収束半径とします。グラフのzeta関数の一般論で $R_i^G>0$ は分っています。さらに次がすぐわかります。

1°, $R_i^G \geq \dfrac{1}{4\|A_G\|_1}$, $i=1,\dots,N$

2°, $R_i^G = R_j^G$ $\forall i,j=1,\dots,N$, ただし G は既約とする。

ここで $\|A_G\|_1 = \max_{1\leq i\leq N} \sum_{j=1}^{N} A_G(j,i)$ です。

実際, 1° については先の命題(2)の関係式から,
$c_n^G(i) \leq (\|A_G\|_1)^n c_n$ がわかるので,
$4=\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{c_n}$ よりわかります。2° についても,
$c_{n+1}^G(i) \geq c_n^G(j) A_G(j,i)\, c_0^G(i)$ であり
$A_G(j,i) \neq 0$ であれば $c_{n+1}^G(i) \geq c_n^G(j)$
を得て, 証明されます。

既約なグラフ G については, 2° から $f^G(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n^G x^n$ の収束半径は, 共通の R_i^G になります。この値を R_G とおきます。N 個の実数 $t_1,\dots,t_N$ に対して, 新しい $N\times N$ 行列 tA_Gt を $tA_Gt(i,j)=t_iA_G(i,j)t_j$ と定義します。これまた微積分の授業で習う条件付極値問題の解法を使うことにより, 次が証明できます(私は, 微積分は Cuntz-Krieger 環に有用だ!と言いたい)。

$\boxed{\text{命題}}$ 実数x_0が収束半径R_Gであるならば、N個の正の実数$t_1,\cdots,t_N$が存在して、次の2つの等式を満たす。

$$\begin{cases} \text{(i)} & \det({}^t t A_G t - x_0) = 0 \\ \text{(ii)} & x_0 = t_i - \sum_{j=1}^{N} t_j A_G(j,i) t_i \quad \forall i=1,\cdots,N \end{cases}$$

つまり、x_0は行列${}^t t A_G t$の固有値として(ii)で実現されるということです。また、特に、固有値x_0に対する固有ベクトル$[s_i]_{i=1}^{N}$で$\sum_{i=1}^{N} s_i = 1$となるものが存在して、

$$x_0 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} t_i s_i \quad \text{となります。}$$

従って収束半径は行列の固有値として、代数的に求めることが可能です。

次に母関数達$f_i^G(x)$からG-Catalan数達$C_n^G(i)$を求める方法を考えてみましょう。もし$f_i^G(x)$が具体的にわかったとすると、そのテイラー展開の係数である$C_n^G(i)$達は、例えば次のformula

原点回りを左回転一周

$$C_n^G(i) = \frac{1}{n!}\frac{d^n f_i^G(x)}{dx^n}(0) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_C \frac{f_i^G(z)}{z^{n+1}}dz \qquad C:$$

で求めることがもちろんできます。しかし、一般には、具体的な行列A_Gから、関係式(*)（2ページ前の定理）を満たす関数達$f_i^G(x)$を求めるのは非常に難しく、

このformulaを使って $C_n^G(i)$ を求めることは、現実的ではないことがわかります。そこで係数 $C_n^G(i)$ を求めるために、まず関数 $f_i^G(z)$ を求めるという発想を改めて、関係式(*)からいきなり $C_n^G(i)$ を求めるという戦法、に変えます。

$$F_i(w_1,\cdots,w_N)=\sum_{j=1}^{N}(w_j+1)\,A_G(j,i)\,(w_i+1)$$
$$i=1,\cdots,N$$
$$w_i(z)=f_i^G(z)-1,$$

とおきます。関係式(*)から

$$\frac{1}{z}=\frac{F_j(w_1,\cdots,w_N)}{w_j(z)}$$ であり、$f_i^G(z)'=w_i'(z)$

です。

$$\lim_{z\to 0}\frac{w_i(z)}{z}=F_i(w_1(0),\cdots,w_N(0))=\sum_{j=1}^{N}A_G(j,i)>0$$

なので、$w_i(z)$ の原点の回りでの回転数は1です。

従って

$$C_n^G(i)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}\,n}\int_C\frac{f_i^G(z)'}{z^n}dz$$
$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}\,n}\int_C\frac{F_j(w_1,\cdots,w_N)^n}{w_j(z)^n}\times w_i'(z)\,dz$$

となります。結局積分公式

命題 $$C_n^G(i)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}\,n}\int_C\frac{F_j(w_1,\cdots,w_N)^n}{(w_j)^n}dw_i$$
$$i,j=1,\cdots,N$$

が成り立ちます。右辺は j には無関係です。

4 具体例.

1° G_1 :  N-loops とします。 $A_G = [N]$ となります

$$f^{G_1}(x) = f_1^{G_1}(x),$$

$$f_1^{G_1}(x) = 1 + x N f_1^{G}(x)^2$$

より

$$f^{G_1}(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4Nx}}{2xN}$$

ここで 分子の $\sqrt{}$ の前の符号は $\lim_{x \to 0} f^G(x) = C_0^G = 1$ より マイナスです。 $\sqrt{}$ の中は非負なので、 $R_G = \frac{1}{4N}$ はすぐにわかりますが、2ページ前の方法によっても R_G は次のように求められます。連立方程式

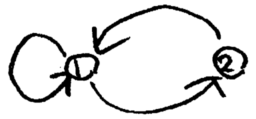
$$\begin{cases} tNt - x_0 = 0 \\ x_0 = t - tNt \end{cases}$$

により $t = \frac{1}{2N}$, $x_0 = \frac{1}{4N}$ でこれが収束半径です。

$F(w) = N \cdot (w+1)^2$ なので、 $C_n^{G_1}$ も先の積分公式より

$$\begin{aligned} C_n^G &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}\,n} \int_C \frac{F(w)^n}{w^n}\, dw \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}\,n} \int_C \frac{N^n (w+1)^{2n}}{w^n}\, dw \\ &= \frac{N^n}{n} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_C \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} w^{k-n}\, dw \\ &= \frac{N^n}{n} \binom{2n}{n-1} = N^n \times C_n, \end{aligned}$$

となり N色 Catalan 数が得られます。

2° G_2 :  ∴ $A_{G_2}=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$

簡単のため $f_i^{G_2}(x)$ を $f_i(x)$ とおきます。関係式(※)は

① $f_1(x)=1+x\,(f_1(x)+f_2(x))\cdot f_1(x)$

② $f_2(x)=1+x\,f_1(x)\cdot f_2(x)$

この連立方程式を解くことになります。すぐに、$f_2(x)$ は次の3次方程式 $x(f_2(x))^3-f_2(x)-1=0$ の解となり $f_1(x)=f_2(x)^2$ となることがわかりますので、求めることができます。収束半径 R_{G_2} は次の連立方程式の解 x_0

Ⓐ $\det\left(\begin{bmatrix}t_1^2 & t_1t_2\\ t_2t_1 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x_0 & 0\\ 0 & x_0\end{bmatrix}\right)=0$

Ⓑ $x_0=t_1-(t_1+t_2)t_1$

Ⓒ $x_0=t_2-t_1t_2$

ですので、これを解くと $x_0=\dfrac{4}{27}$, $t_1=\dfrac{1}{3}$, $t_2=\dfrac{2}{9}$

となります。G_2-Catalan 数 $C_n^{G_2}=C_n^{G_2}(1)+C_n^{G_2}(2)$ の計算は先の積分公式を使って次のようになります。

$F_1(W_1,W_2)=\{(W_2+1)+(W_1+1)\}(W_1+1)$

$F_2(W_1,W_2)=(W_1+1)(W_2+1)=(W_2+1)^3$

∴ $F_2(W_1,W_2)^n=(W_2+1)^{3n}$,

$W_1'(x)=\{(W_2+1)^2\}'=2(W_2+1)W_2'(x)$ より

$$
\begin{aligned}
C_n^{G_2}(1) &= \frac{1}{n}\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_C \frac{F_2(W_1(z), W_2(z))^n}{W_2(z)^n} W_1'(z)\,dz \\
&= \frac{1}{n}\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_C \frac{(W_2(z)+1)^{3n}}{W_2(z)^n} 2(W_2(z)+1)W_2'(z)\,dz \\
&= \frac{2}{n}\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_C \frac{(W_2+1)^{3n+1}}{W_2^{\,n}}\,dW_2 \\
&= \frac{2}{n}\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_C \sum_{k=0}^{3n+1}\binom{3n+1}{k} W_2^{\,k-n}\,dW_2 \\
&= \frac{2}{n}\binom{3n+1}{n-1}
\end{aligned}
$$

同様の計算で

$C_n^{G_2}(2) = \frac{1}{n}\binom{3n}{n-1}$ がわかります。

従って G_2-Catalan 数 $C_n^{G_2} = C_n^{G_2}(1) + C_n^{G_2}(2)$ は

$$
C_n^{G_2} = \frac{2}{n}\binom{3n+1}{n-1} + \frac{1}{n}\binom{3n}{n-1}
$$

$$
C_n^{G_2} = \frac{2}{n+1}\binom{3n}{n}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots
$$

最初の方は

$$
\begin{array}{cccccc}
2, & 3, & 10, & 42, & 198, & \cdots \\
\shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \\
C_0^{G_2} & C_1^{G_2} & C_2^{G_2} & C_3^{G_2} & C_4^{G_2} &
\end{array}
$$

となります。これを Catalan 数の Fibonacci 版と呼んでも良いでしょう。ここで $f_1(x) = f_2(x)^2$ だったので、

$$
C_n^{G_3}(1) = \sum_{k=0}^{n} C_k^{G_3}(2)\, C_{n-k}^{G_3}(2)
$$

という関係があります。従って

$$\frac{2}{n}\binom{3n+1}{n-1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k}\binom{3k}{k-1}\frac{1}{n-k}\binom{3n-3k}{n-k-1}$$

という恒等式が成り立ちます。

5 マルコフダイクシフトの Zeta 関数

3 で定義したマルコフダイクシフト D_{A_G} を簡単に D_G とかきます。このサブシフトのアルファベット Σ_G は、Cuntz-Krieger 環 $\mathcal{O}_{A_G}$ の生成元 S_e, $(e\in E)$ を使って $\Sigma_G=\{S_e^*, S_e \mid e\in E\}$ とかけます。これから求めるこの Zeta 関数を $\zeta_{D_G}(t)$ とかきましょう。

$N=\#V$：頂点の個数とし、G-Catalan 数 C_n^G の母関数達 $f_1^G(x),\cdots,f_N^G(x)$ に対して、それを対角に並べた行列値関数 $F^G(t)$ を

$$F^G(t)=\begin{bmatrix} f_1^G(t^2) & & O \\ & \ddots & \\ O & & f_N^G(t^2)\end{bmatrix}$$

と定義します。

このとき

定理 (Krieger-松本)

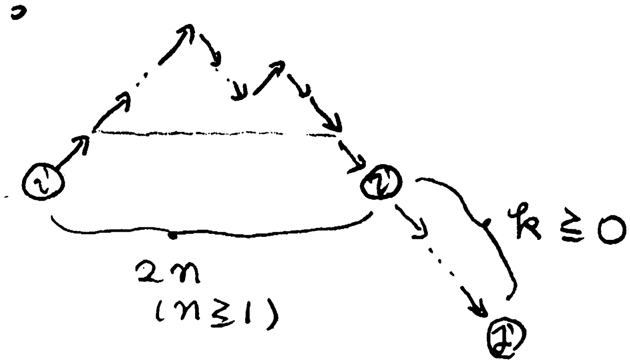
$$\zeta_{D_G}(t)=\frac{1}{\det\left(\left(F^G(t)^{-1}-tA_G\right)\left(1-tF^G(t)A_G\right)\right)}$$

$$\left(\doteqdot\frac{\det\left(F^G(t)\right)}{\det\left(\left(1-tF^G(t)A_G\right)^2\right)}\right)$$

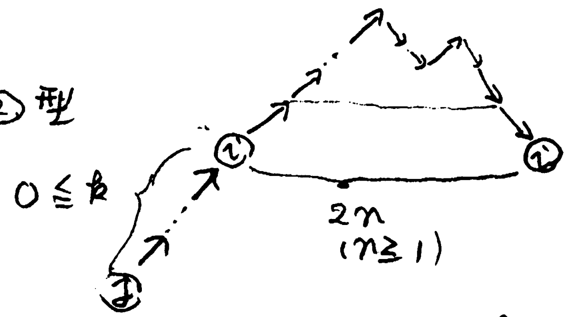
以下に証明の考え方を書きます。

ダイクシフトの周期点は，周期を構成するブロックよりなりますので，その周期ブロックに着目することにより，5種類に分けます。

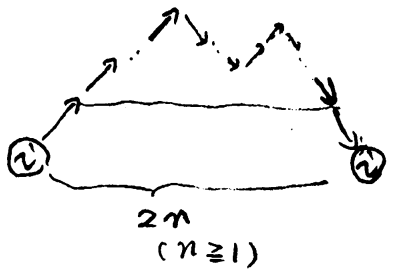
①型



②型

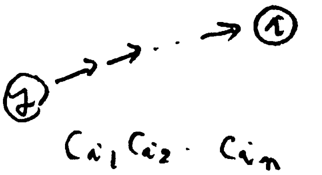


③型



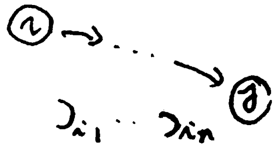
(①, ② で $k=0$ の場合)

④型



(② で $n=0$ の形)

⑤型



(① で $n=0$ の形)

マルコフシフトの部分

③型は、①、②型の特別な場合になり、それ以外のそれぞれの型はみな互いにdisjointなので、

$$\{D_G\text{の周期点}\} = \{(① \cup ②) \setminus ③\} \cup (④ \cup ⑤)$$

となります。また、力学系のゼータ関数の定義より
「周期点の和（∪合併）＝ ζ の積」
になります。

$$
\begin{cases}
\because \quad \zeta_{X\cup Y}(t) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n(X\cup Y)}{n} t^n\right) \\
\qquad = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n(X)+P_n(Y)}{n} t^n\right) \\
\qquad = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n(X)}{n} t^n\right) \times \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n(Y)}{n} t^n\right) \\
\qquad = \zeta_X(t) \times \zeta_Y(t)
\end{cases}
$$

従って

$$\zeta_{D_G} = \frac{\zeta_{①} \times \zeta_{②}}{\zeta_{③}} \times \zeta_{④} \times \zeta_{⑤}$$

ここで、④、⑤の部分のZeta関数はマルコフシフトの部分なので

$$\zeta_{④}(t) = \frac{1}{\det(1 - tA_G^{t})}$$

A_Gのtranspose

$$\zeta_{⑤}(t) = \frac{1}{\det(1 - tA_G)}$$

です。
$(\therefore \zeta_{④} = \zeta_{⑤})$

補題 (i) $\zeta_{③}(t) = \prod_{i=1}^{N} f_i^G(t^2)$

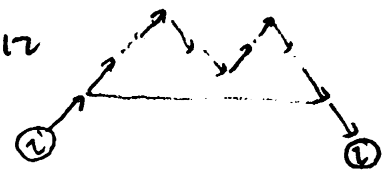
(ii) $\zeta_{①}(t) = \zeta_{②}(t) = \dfrac{1}{\det\left(I - D^G(t)(1-tA_G)^{-1}\right)}$

但し

$$D^G(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) & & O \\ & \ddots & \\ O & & g_N(t) \end{bmatrix}, \quad g_i(t) = 1 - \frac{1}{f_i^G(t^2)}$$

(証明の概略)

(i) $i=1,\dots,N$に対して

$C_i = \{$  途中に下り口がない山の全体 $\}$

とおくと、これは circular code と呼ばれるものになります。circular codeとは C_iの元の自由連接からなる両側無限列 C_i^∞ の周期的なものは、一意的にC_iの元達に分解できる words の集りを言います。C_iの元の自由連接からなる単語全体をC_i^*で表わすと、$C_i^* = \bigcup_n B_n^G(i)$ となります。③型の中で、根っこ(登り口)の頂点がiのものを③$_i$で表わすと、そのzeta関数 $\zeta_{③_i}(t)$ は、従って、$\zeta_{C_i^\infty}(t)$ です。一般に circular code C に対しては、その自由連接からなる両側無限列 C^∞ の zeta関数 $\zeta_{C^\infty}(t)$ と自由連接できる有限単語全体 C^* の母関数

$g_{C^*}(t)$ は一致するので、

$$\zeta_{③_i}(t) = \zeta_{C_i^\infty}(t) = g_{C_i^*}(t)$$

となります。

一方 $g_{C_i^*}(t) = g_{\bigcup_m B_m^G(i)}(t) = f_i^G(t^2)$

なので、

$$\zeta_{③_i}(t) = f_i^G(t^2) \quad \text{となり}$$

$$\zeta_{③}(t) = \prod_{i=1}^{N} \zeta_{③_i}(t) = \prod_{i=1}^{N} f_i^G(t^2) \quad \text{となります。}$$

(ii)

冒頭のⒷの preprint で、Markov 性をもった circular code として circular Markov code という概念を導入し、circular code C に対する zeta 関数の公式 $\zeta_{C^\infty}(t) = \dfrac{1}{1-g_C(t)}$ と Markov シフトに対する zeta 関数の公式 $\zeta_{X_A}(t) = \dfrac{1}{\det(1-tA)}$ を統合しました。①型、②型はその circular Markov code というものになっており、その統合された公式からこの (ii) の公式が導かれます。詳細は preprint Ⓑ か、G. Keller の先の論文を見ていただければと思います。すいません。この補題により、定理が証明されることになります。 $\square$

記号力学系の重要な位相共役不変量に位相エントロピーがあります。位相エントロピー $h_{top}(\Lambda)$ はサブシフト Λ に対して、現れる長さ n の単語の指数的増大度を計る量で

$$h_{top}(\Lambda)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log {}^{\#}B_n(\Lambda)$$

で定義されます。ここで ${}^{\#}B_n(\Lambda)$ は Λ に現れる長さ n の単語全体の個数です。Λ の n-周期点の個数を $P_n(\Lambda)$ とすると、もちろん $P_n(\Lambda)\leqq {}^{\#}B_n(\Lambda)$ ですが、マルコフダイクシフト D_G の場合は次が成立ちます。

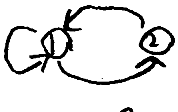
命題 $h_{top}(D_G)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log P_n(D_G)$

これにより先の定理の系として

系 $h_{top}(D_G)=$ 方程式 $\det(1-tF^G(t)A_G)=0$ の最小な正の実解 の $\log$

がわかります。

最後に例の計算をやります。グラフ G として、先のグラフ

G_2  を考えます。$A_{G_2}=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$ です。

$f_i^{G_2}(x)=f_i(x)$, $i=1,2$ とおくと

$$\begin{cases} f_1(t^2)=f_2(t^2)^2 \\ f_2(t^2)=1+t^2 f_2(t^2)^3 \end{cases}$$ でした。

$z(t)=t\,f_2(t^2)$ とおくと

$$\xi(t)^3 - \xi(t) + t = 0$$

このとき

$$\xi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{1}{3}\arcsin\frac{3\sqrt{3}}{2}t\right), \quad 0 < t \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

であり，zeta 関数 $\zeta_{D_{G_2}}(t)$ は，この $\xi(t)$ を使って

$$\zeta_{D_{G_2}}(t) = \frac{\xi(t)}{t\left(2\xi(t)^2 + \xi(t) - 1\right)^2}$$

$$= \frac{\xi(t)}{t(\xi(t)+1)\{-4t + \xi(t) + 1\}}.$$

位相エントロピー $h_{top}(D_{G_2})$ は

$h_{top}(D_{G_2}) = 3\log 2 - \log 3 = \log\frac{8}{3}$ となります。

上から
わかるように，具体的なグラフに対してのマルコフダイクシフトの計算は，G_2 のような簡単なグラフでも，それほどきれいな形になりませんが，頑張って他のグラフに対しても，計算していこうと思ってます。

この研究集会をお世話下さった山ノ内さんにたいへん感謝しています。