数理解析研究所講究録
第 1630 巻 2009 年 33-40

Necessary and sufficient conditions in terms of Möbius transform for k-monotonicity of set functions*

東京工業大学・大学院総合理工学研究科　室伏 俊明 (Toshiaki Murofushi)
Interdisciplinary Graduate School of Science and Engineering,
Tokyo Institute of Technology

東京工業大学・大学院総合理工学研究科　澤田 佳成 (Yoshinari Sawata)
Interdisciplinary Graduate School of Science and Engineering,
Tokyo Institute of Technology

福島大学・共生システム理工学類　藤本 勝成 (Katsushige Fujimoto)
College of Symbiotic Systems Science,
Fukushima University

1 はじめに

k 単調性 [1][2] は，集合関数の理論における最も重要な概念の一つである．協力ゲームの凸性（例えば [9]）は 2 単調性と同値であり，集合関数の劣モジュラ性（例えば [5]）は共役（または双対）集合関数が 2 単調であることと同値である．さらに，$k \geq k' \geq 2$ のとき k 単調ならば k' 単調なので，$k > 2$ のときの k 単調集合関数は特殊な 2 単調集合関数（劣モジュラ集合関数の共役や凸ゲーム）になっている．そして，k 単調性は，k の値が大きいほど それ自体 数学的に強い豊かな性質となっている．一方，Möbius 変換（例えば [7]）も集合関数の理論における最も重要な概念の一つであり，包除被覆の特徴づけ [3][6][8] や k 加法性の定義 [6][8] 等に利用されている．

これらを考えると，Möbius 変換によって k 単調性の特徴づけを行なうことは，集合関数の理論における強力な解析ツールを与える極めて重要な仕事といえる．Chateauneuf と Jaffray [1] は，そのような幾つかの特徴づけを行なっており，それらは集合関数の加法的分解 [10] などに利用され，さらに双容量の k 単調性の特徴づけ [4] に拡張されている．

しかし，彼らの与えた特徴づけのうちの一つである [1, Proposition 4]（後述）は，その命題自体は正しいものの，証明の一部に誤りがある．本稿では，[1] とは異なる方針による正しい証明を与え，さらに付録で [1] における証明を修復する．また，Proposition 4 の若干の精密化も行なう（命題 1）．本稿の証明で用いる手法は，Boole 束における区間

*本研究の一部は，21 世紀 COE プログラム「エージェントベース社会システム科学の創出」ならびに基盤研究 (C) 19510136, 2008 による．

の基本的性質をもとにしており，汎用性が高い．なお，本稿の結果は筆者らの論文 [10] に含まれている．

2 数学的準備

本稿を通して，Θ を空でない有限集合，2^Θ を Θ のべき集合とする．$\mu(\emptyset)=0$ なる関数 $\mu: 2^\Theta \to \mathbb{R}$ を Θ 上の**集合関数**と呼ぶ．Θ の部分集合族 $\mathcal{A}$ と Θ 上の集合関数 m に対して，$m(\mathcal{A})$ を下式のように定める：

$$m(\mathcal{A}) \triangleq \sum_{A \in \mathcal{A}} m(A).$$

任意の集合 A, B に対し，閉区間 $[A,B]$ を次式で定める：

$$[A,B] \triangleq \{C \mid A \subseteq C \subseteq B\}.$$

$[\emptyset, A] = 2^A$ であり，また $A \not\subseteq B$ のとき $[A,B]=\emptyset$ である．m が Θ 上の集合関数のとき，上述の記法を用いると

$$\sum_{C: A \subseteq C \subseteq B} m(C) = m([A,B])$$

と書ける．集合 A の要素数を $|A|$ で表す．

定義 1 Θ 上の集合関数 μ の **Möbius 変換** μ^{M} は，

$$\mu^{\mathrm{M}}(A) \triangleq \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|A \setminus B|} \mu(B) \qquad \text{for } A \subseteq \Theta$$

で定義される Θ 上の集合関数である．

任意の $A \subseteq \Theta$ に対して $\mu(A) = \mu^{\mathrm{M}}([\emptyset, A])$ が成り立つことは よく知られている．

定義 2 [1][2] k を 2 以上の整数とする．任意の $\{A_i\}_{i=1}^k \subseteq 2^\Theta$ について次式が成り立つとき，Θ 上の集合関数 μ は **k 単調**であるという：

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) \geq \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,k\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} \mu\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right).$$

定義から，$k \geq k' \geq 2$ のとき，k 単調な集合関数が k' 単調でもあることが容易にわかる．上の k 単調性の定義は，Chateauneuf & Jaffray [1] によるものであり，Choquet [2] によるオリジナルの定義とやや異なる．しかし上の定義を採用すると，協力ゲームの凸性が 2 単調性と同値になり，また，劣モジュラ性が，共役集合関数が 2 単調であることと同値になる．ここで，Θ 上の集合関数 μ の共役（または双対）とは，

$$\overline{\mu}(A) \triangleq \mu(\Theta) - \mu(\Theta \setminus A) \qquad \text{for } A \subseteq \Theta$$

で定まる Θ 上の集合関数 $\overline{\mu}$ である．

なお，本稿では扱わないが，集合関数 μ が 1 単調であるとは，μ が通常の意味で単調 $(A \subseteq B \ \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B))$ であることをいう．

3　k 単調性の必要十分条件

[1] の Proposition 4 を本稿の記法で書くと，次のようになる（式番号は [1] に同じ）．

Proposition 4 [1] μ を Θ 上の集合関数，k を 2 以上の整数とする．このとき下式は，μ が k 単調であるための必要十分条件である．

$$2 \le |A| \le k,\ B \subseteq \Theta \text{ ならば } \mu^{\mathrm{M}}([A,B]) \ge 0. \tag{7}$$

[1] における Proposition 4 の十分性の証明には誤りがある（付録参照）．本節では，上の命題の十分性の正しい証明を [1] とは異なる方針によって与える．証明の目標は，[1] と同様，式 (7) から次の命題——[1] の Proposition 3 を本稿の記法で書いたもの——の式 (6) を導くことである（式番号は [1] に同じ）．

Proposition 3 [1] μ を Θ 上の集合関数，k を 2 以上の整数とする．このとき下式は，μ が k 単調であるための必要十分条件である．

$$\{A_l\}_{l\in L} \subseteq 2^{\Theta},\ |L| = k \text{ ならば } \sum_{\substack{B\subseteq \bigcup_{l\in L} A_l \\ B \not\subseteq A_l\ \forall l \in L}} \mu^{\mathrm{M}}(B) \ge 0. \tag{6}$$

我々の証明にとって，次の補題が本質的である．

補題 1 A を有限集合，$\{A_l\}_{l\in L}$ を集合の有限族とし，

$$\mathcal{B} \triangleq \{B \subseteq A \mid B \not\subseteq A_l\ \forall l \in L\}$$

とおく．このとき，$\mathcal{B}$ の分割 $\{[C_i, D_i]\}_{i\in I}$ で，任意の $i \in I$ について $|C_i| \le |L|$ であるようなものが存在する．

証明. C を包含関係 $\subseteq$ に関する $\mathcal{B}$ の任意の極小元とする．C の極小性から，各 $\theta \in C$ に対して $C \setminus \{\theta\} \subseteq A_{l_\theta}$ なる $l_\theta \in L$ が存在し，C の異なる 2 要素 θ と θ' に対して，L のそのような要素 l_θ と $l_{\theta'}$ は互いに異なる．したがって，$|C| \le |L|$ である（注：この不等式は $L = \emptyset$ のときにも成立する）．

$\mathcal{B} = \emptyset$ のときは，$\emptyset$ が $\mathcal{B}$ の求めるべき分割である．また，$\mathcal{B}$ の極小元が唯一 C だけのときも，$\mathcal{B} = [C, A]$ なので，$\{[C, A]\}$ 自体が求めるべき分割になっている．

一般の場合を $|A|$ に関する帰納法で示す．$|A| \le 1$ のときは，$\mathcal{B}$ は空であるか，空でなければ その極小元は唯一である．そこで $|A| \ge 2$ とし，$\mathcal{B}$ に異なる 2 つの極小元 C^{in} と C^{out} があるとする．$\theta_0 \in C^{\mathrm{in}} \setminus C^{\mathrm{out}}$ をとり，

$$\mathcal{B}^{\mathrm{in}} \triangleq \{B \in \mathcal{B} \mid B \ni \theta_0\}, \quad \mathcal{B}^{\mathrm{out}} \triangleq \{B \in \mathcal{B} \mid B \not\ni \theta_0\}$$

とおく．明らかに $\{\mathcal{B}^{\mathrm{in}}, \mathcal{B}^{\mathrm{out}}\}$ は $\mathcal{B}$ の分割である．

$A^{\mathrm{out}} \triangleq A \setminus \{\theta_0\}$ とおくと，$\mathcal{B}^{\mathrm{out}} = \{B \subseteq A^{\mathrm{out}} \mid B \not\subseteq A_l\ \forall l \in L\}$ である．よって帰納法の仮定から，$\mathcal{B}^{\mathrm{out}}$ の分割 $\{[C_i, D_i]\}_{i\in I^{\mathrm{out}}}$ で，任意の $i \in I^{\mathrm{out}}$ について $|C_i| \le |L|$ であるようなものが存在する．

あとは$\mathcal{B}^{\text{in}}$の分割を求めればよい．

$$A^{\text{in,out}} \triangleq A \setminus \{\theta_0\},$$
$$\mathcal{B}^{\text{in,out}} \triangleq \{B \setminus \{\theta_0\} \mid B \in \mathcal{B}^{\text{in}}\},$$
$$L^{\text{in,out}} \triangleq \{l \in L \mid \theta_0 \in A_l\}$$

とおくと，

$$\mathcal{B}^{\text{in,out}} = \{B \subseteq A^{\text{in,out}} \mid B \not\subseteq A_l \ \forall l \in L^{\text{in,out}}\}$$

より，帰納法の仮定から，$\mathcal{B}^{\text{in,out}}$の分割$\{[C_i, D_i]\}_{i \in I^{\text{in}}}$で，任意の$i \in I^{\text{in}}$について$|C_i| \leq |L^{\text{in,out}}|$であるようなものが存在する．各$i \in I^{\text{in}}$に対して，

$$C_i^{\text{in}} \triangleq C_i \cup \{\theta_0\}, \qquad D_i^{\text{in}} \triangleq D_i \cup \{\theta_0\}$$

とおくと，明らかに$\{[C_i^{\text{in}}, D_i^{\text{in}}]\}_{i \in I^{\text{in}}}$は$\mathcal{B}^{\text{in}}$の分割である．$\theta_0$は$\mathcal{B}$の極小元$C^{\text{in}}$の要素だから，$\theta_0 \notin A_l$なる$l \in L$が存在する．よって$L^{\text{in,out}} \subsetneq L$なので，各$i \in I^{\text{in}}$に対し次式が成立する：

$$|C_i^{\text{in}}| = |C_i| + 1 \leq |L^{\text{in,out}}| + 1 \leq |L|. \qquad \blacksquare$$

Proposition 4の十分性の証明．
$|L| \triangleq k$,　$\{A_l\}_{l \in L} \subseteq 2^{\Theta}$,　$A \triangleq \bigcup_{l \in L} A_l$とおき，

$$\mathcal{B} \triangleq \{B \subseteq A \mid B \not\subseteq A_l \ \forall l \in L\}$$

とする．補題1より，$\mathcal{B}$の分割$\{[C_i, D_i]\}_{i \in I}$で，各$i \in I$について$|C_i| \leq |L| = k$であるようなものが存在する．$A = \bigcup_{l \in L} A_l$より，各$\theta \in A$に対して$\theta \in A_l$なる$l \in L$が存在するので，すべての$B \in \mathcal{B}$について$|B| \geq 2$となる．よって，各$i \in I$について$|C_i| \geq 2$である．したがって，式(7)より

$$\sum_{\substack{B \subseteq \bigcup_{l \in L} A_l \\ B \not\subseteq A_l \ \forall l \in L}} \mu^{\text{M}}(B) = \mu^{\text{M}}(\mathcal{B}) = \sum_{i \in I} \mu^{\text{M}}([C_i, D_i]) \geq 0. \qquad \blacksquare$$

Proposition 4は，次のように精密化できる．

命題 1 μをΘ上の集合関数，μ^{M}をμのMöbius変換，kを2以上の整数とする．このとき次の条件は，μがk単調であるための必要十分条件である．

> $2 \leq |A| < k$なる任意の$A \subseteq \Theta$について$\mu^{\text{M}}(A) \geq 0$であり，$|A| = k$なる任意の$A \subseteq \Theta$と任意の$B \subseteq \Theta$について$\mu^{\text{M}}([A, B]) \geq 0$である．

証明．（必要性）[1]のCorollary 1による（またはProposition 4で，$2 \leq |A| < k$のとき$B = A$としてもよい）．
（十分性）$A \subseteq B \subseteq \Theta$, $2 \leq |A| < k$とし，$|B \setminus A|$に関する帰納法で式(7)を示す．まず$|B \setminus A| = 0$のときは，$B = A$と仮定から$\mu^{\text{M}}([A, B]) = \mu^{\text{M}}(A) \geq 0$である．次に

$|B\setminus A|\geq 1$ のときは，$\theta\in B\setminus A$ が存在し，$\{[A,B\setminus\{\theta\}],[A\cup\{\theta\},B]\}$ が $[A,B]$ の分割になる．まず，帰納法の仮定より $\mu^{\mathrm{M}}([A,B\setminus\{\theta\}])\geq 0$ である．また，$|A\cup\{\theta\}|<k$ のときは同様に帰納法の仮定から $\mu^{\mathrm{M}}([A\cup\{\theta\},B])\geq 0$ であり，$|A\cup\{\theta\}|=k$ のときは命題の仮定から $\mu^{\mathrm{M}}([A\cup\{\theta\},B])\geq 0$ となる．よって，

$$\mu^{\mathrm{M}}([A,B])=\mu^{\mathrm{M}}([A,B\setminus\{\theta\}])+\mu^{\mathrm{M}}([A\cup\{\theta\},B])\geq 0. \qquad \blacksquare$$

[10] では，集合関数の加法分解に関する定理の証明に上の命題 1 を用いている．

4 おわりに

本稿では，Proposition 4 [1] の十分性の正しい証明を与え，さらに Proposition 4 の精密化（命題 1）を行なった．[1] における証明（付録 A.2）は帰納法を使わず直接的であるが，本稿の補題 1 と命題 1 の証明で用いた手法は，Boole 束における区間の基本的性質

$A\subseteq B$ かつ $\theta\in B\setminus A$ のとき

- $\{[A,B\setminus\{\theta\}],\ [A\cup\{\theta\},B]\}$ は $[A,B]$ の分割，
  すなわち

$$[A,B\setminus\{\theta\}]\cup[A\cup\{\theta\},B]=[A,B],$$
$$[A,B\setminus\{\theta\}]\cap[A\cup\{\theta\},B]=\emptyset$$

- 分割の構成要素 $[A,B\setminus\{\theta\}]$ と $[A\cup\{\theta\},B]$ は，次の同形写像により互いに束同形

$$[A,B\setminus\{\theta\}]\ni C\mapsto C\cup\{\theta\}\in[A\cup\{\theta\},B],$$
$$[A\cup\{\theta\},B]\ni D\mapsto D\setminus\{\theta\}\in[A,B\setminus\{\theta\}]$$

を基にしており，汎用性が高い．実際，双容量の k 単調性の特徴づけ [4] の証明も，この性質をもとにしている．

参考文献

[1] A. Chateauneuf & J.-Y. Jaffray, Some characterizations of lower probabilities and other monotone capacities through the use of Möbius inversion, *Math. Social Sci.*, **17** (1989) 263–283.

[2] G. Choquet, Theory of capacities, *Ann. Inst. Fourier*, **5** (1953) 131–295.

[3] 藤本勝成，意思決定とメビウス反転，日本ファジィ学会誌，**10** (1998) 206–214.

[4] K. Fujimoto & T. Murofushi, Some characterizations of k-monotonicity through the bipolar Möbius transform in bi-capacities, *J. of Adv. Comput. Intell. & Intell. Inform.*, **9** (2005) 484–495.

[5] S. Fujishige, Submodular Functions and Optimization, 2nd ed., *Annals of Discrete Math.*, **58**, Elsevier, 2005.

[6] M. Grabisch, T. Murofushi, & M. Sugeno, eds., *Fuzzy Measures and Integrals: Theory and Applications*, Physica-Verlag, 2000.

[7] M. Hall, Jr. *Combinatorial Theory*, 2nd ed., Wiley, 1986.

[8] 室伏，Grabisch，藤本，今岡，成川，ファジィ測度と積分,「ファジィとソフトコンピューティング」ハンドブック（日本ファジィ学会編），共立出版 (2000) 51–75.

[9] B. Peleg & P. Sudhölter, *Introduction to the Theory of Cooperative Games*, Kluwer, 2003.

[10] Y. Sawata, K. Fujimoto, & T. Murofushi, Decomposition of set functions into a sum of set functions on subdomains, submitted.

A 付録：[1] の証明の不備とその修復

A.1 証明の不備

Proposition 4 の十分性に対する [1] における証明方針も，式 (7) を用いて式 (6) を導こうとするものである．以下，[1] における証明を途中まで追ってみる．式 (6) を示すため，$\{A_i\}_{i=1}^k \subseteq 2^\Theta$ を任意に固定し，$A \triangleq \bigcup_{i=1}^k A_i$ とおく．各 $i = 1, 2, \ldots, k$ に対し，$E_i \triangleq A \setminus A_i = \{\theta_1^{(i)}, \ldots, \theta_{L_i}^{(i)}\}$ とする（$L_i = |E_i|$ である）．上で定めた各 E_i の要素の番号付けから，$E \triangleq E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_k$ 上に辞書式順序 ${}^L\!\leqslant$ を導入する．また，各 $(\theta_{l_1}^{(1)}, \ldots, \theta_{l_k}^{(k)}) \in E$ に対し，

$$A_{l_1,\ldots,l_k} \triangleq \{\theta_{l_1}^{(1)}, \ldots, \theta_{L_1}^{(1)}\} \cup \cdots \cup \{\theta_{l_k}^{(k)}, \ldots, \theta_{L_k}^{(k)}\} \cup \left(A \setminus \bigcup_{i=1}^k E_i\right)$$

とおく．

すべての $i = 1, 2, \ldots, k$ に対して $B \not\subseteq A_i$ であるような $B \subseteq A$ を任意に固定する．$(\theta_{l_1}^{(1)}, \ldots, \theta_{l_k}^{(k)}) \in E$ を条件

$$\{\theta_{l_1}^{(1)}, \ldots, \theta_{l_k}^{(k)}\} \subseteq B \tag{$*$}$$

を満たす，${}^L\!\leqslant$ に関する最初の要素とすると（B に対する仮定から E にこのような要素は存在する），$B \subseteq A_{l_1,\ldots,l_k}$ となっている．さてこの後，[1] には

(a) $\{\theta_{l'_1}^{(1)}, \ldots, \theta_{l'_k}^{(k)}\} \subseteq B \subseteq A_{l'_1,\ldots,l'_k}$ ならば，$l_1 = l'_1, \ldots, l_k = l'_k$

と書かれているが，これは次の反例を持つ．

反例 1 $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2\}$, $A_3 = \{3\}$ とすると，$A = \{1,2,3\}$, $E_1 = \{2,3\}$, $E_2 = \{1,3\}$, $E_3 = \{1,2\}$ であり，この順序で各 E_i の要素を番号づける．すなわち，

$$\begin{aligned} \theta_1^{(1)} &= 2, \quad \theta_2^{(1)} = 3, \\ \theta_1^{(2)} &= 1, \quad \theta_2^{(2)} = 3, \\ \theta_1^{(3)} &= 1, \quad \theta_2^{(3)} = 2 \end{aligned}$$

とする．$B \subseteq A$, $B \not\subseteq A_1$, $B \not\subseteq A_2$, $B \not\subseteq A_3$ なる集合 B として，例えば $B = \{1,2\}$ を考えると，式 $(*)$ を満たす，${}^L\!\leqslant$ に関する最初の要素は，$\left(\theta_1^{(1)}, \theta_1^{(2)}, \theta_1^{(3)}\right) = (2,1,1)$，すなわち $(l_1, l_2, l_3) = (1,1,1)$ であり，

$$\begin{aligned} B = \{1,2\} &\subseteq \{1,2,3\} \\ &= \{2,3\} \cup \{1,2\} \cup \{1,3\} \\ &= \left\{\theta_1^{(1)}, \theta_2^{(1)}\right\} \cup \left\{\theta_1^{(2)}, \theta_2^{(2)}\right\} \cup \left\{\theta_1^{(3)}, \theta_2^{(3)}\right\} \\ &= A_{1,1,1} \end{aligned}$$

となっている．さて，$(l'_1, l'_2, l'_3) = (1,1,2)$ とすると，

$$\begin{aligned} \left\{\theta_{l'_1}^{(1)}, \theta_{l'_2}^{(2)}, \theta_{l'_3}^{(3)}\right\} &= \{2,1,2\} \\ &\subseteq B \\ &\subseteq \{1,2,3\} = \{2,3\} \cup \{1,3\} \cup \{2\} \\ &= A_{1,1,2} = A_{l'_1, l'_2, l'_3} \end{aligned}$$

であるが，$l_3 = 1 \neq 2 = l'_3$ なので，上記の言明 (a) は成立しない．

たとえ言明 (a) が不成立であっても，式 (7) を用いて式 (6) を導くための，[1] における次の言明 (b) が成立すれば問題はない．

(b) $\left\{ \left[\{\theta_{l_1}^{(1)}, \ldots, \theta_{l_k}^{(k)}\}, A_{l_1,\ldots,l_k}\right] \,\middle|\, \left(\theta_{l_1}^{(1)}, \ldots, \theta_{l_k}^{(k)}\right) \in E \right\}$ が
$\{B \subseteq A \mid B \not\subseteq A_i \text{ for } i = 1, \ldots, k\}$ の分割である．

しかし，この言明 (b) も次の反例を持つ．

反例 2　反例 1 と同じ設定の下で，言明 (b) の区間族

$$\begin{aligned} \{ & [\{2,1,1\}, A],\ [\{2,1,2\}, A],\ [\{2,3,1\}, A], \\ & [\{2,3,2\}, \{2,3\}],\ [\{3,1,1\}, A],\ [\{3,1,2\}, A], \\ & [\{3,3,1\}, A],\ [\{3,3,2\}, \{2,3\}] \} \\ = & \{[\{1,2\}, A],\ \{A\},\ \{\{2,3\}\},\ [\{1,3\}, A]\} \end{aligned}$$

は，明らかに

$$\{B \subseteq A \mid B \not\subseteq A_1,\ B \not\subseteq A_2,\ B \not\subseteq A_3\} = \{\{1,2\},\ \{1,3\},\ \{2,3\},\ A\}$$

の分割ではない．

A.2 証明の修復

前項の [1] の証明で，$A_{l_1,\ldots,l_k}$ の定義を

$$A_{l_1,\ldots,l_k} = \left(\left\{\theta^{(1)}_{l_1},\ldots,\theta^{(1)}_{L_1}\right\} \cup \cdots \cup \left\{\theta^{(k)}_{l_k},\ldots,\theta^{(k)}_{L_k}\right\} \cup \bigcap_{i=1}^{k} A_i \right) \setminus \left(\left\{\theta^{(1)}_{1},\ldots,\theta^{(1)}_{l_1-1}\right\} \cup \cdots \cup \left\{\theta^{(k)}_{1},\ldots,\theta^{(k)}_{l_k-1}\right\} \right)$$

とすれば，[1] における証明が そのまま適用できる．すべての $i = 1, 2, \ldots, k$ に対して $B \not\subseteq A_i$ であるような $B \subseteq A$ を任意に固定し，$\left(\theta^{(1)}_{l_1},\ldots,\theta^{(k)}_{l_k}\right) \in E$ を前項の条件式 (*) を満たす，${}^{L}\!\leqslant$ に関する最初の要素とすると，$B \subseteq A_{l_1,\ldots,l_k}$ となっている．さらに，上の新しい $A_{l_1,\ldots,l_k}$ の定義から言明 (a) が成立し，このことから言明 (b) も成立する（なお，$\left(\theta^{(1)}_{l_1},\ldots,\theta^{(k)}_{l_k}\right) \in E$ によっては $\left\{\theta^{(1)}_{l_1},\ldots,\theta^{(k)}_{l_k}\right\} \not\subseteq A_{l_1,\ldots,l_k}$ となることがあるが，その場合は $\left[\left\{\theta^{(1)}_{l_1},\ldots,\theta^{(k)}_{l_k}\right\}, A_{l_1,\ldots,l_k}\right] = \emptyset$ なので，問題にはならない）．よって，式 (7) から式 (6) が導かれる．