数理解析研究所講究録
第 1635 巻 2009 年 16-22

組合せ子Oの非基礎ループ性*
(Non Ground Loop of Combinator O)

島根大学 総合理工学部 岩見 宗弘 (Munehiro Iwami)
Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering, Shimane University
Matsue, Shimane, Japan, 690-8504
e-mail: munehiro@cis.shimane-u.ac.jp

概要

Sumllyan は, 書換え規則 $\mathbf{O}xy \rightarrow y(xy)$ を持つ組合せ子 **O** を提案した. 本稿では Waldmann と同様の手法により組合せ子 **O** は非基礎ループ性を持つことを示す.

1 はじめに

組合せ子 **S** のみからなる計算体系は停止性を持たない [1]. そこで Bergstra らは組合せ子 **S** が非循環性 (acyclic) を持つことを示した [2]. 近年, Waldmann は, 循環性より強い性質である基礎ループ性 (ground loop) を提案し, 組合せ子 **S** が非基礎ループ性を持つことを示した [16].

一般の項を扱う計算モデルとして, 項書換えシステム (TRS) がよく知られている. 組合せ子論理や組合せ子の書換え規則は, TRS として見做すことができる. TRS に対する非ループ性 (non-loop) についても様々な研究が行われている. Middeldorp らは書換え規則が 1 つの TRS の場合でさえ非ループ性が決定不能であることを示している [8]. 彼らの非ループ性の決定不能性の証明から, 書換え規則が 1 つの TRS の非基礎ループ性も決定不能であることが分かる. また, 部分システムの性質から全体システムの性質が導かれることをモジュラ性と呼ぶが, (等式付)TRS の非ループ性のモジュラ性に関する研究も Middeldorp らにより行われている [9].

単純な書換え規則を持つ組合せ子であるが停止性を持たない組合せ子として, 書換え規則 $\mathbf{L}xy \rightarrow x(yy)$ を持つ組合せ子 **L** がある [12]. 組合せ子 **L** が停止性を持たないことは Sprenger ら等により示されており [13, 14], 非循環性を持つことは我々により示されている [5]. また, 単純な書換え規則 $\mathbf{O}xy \rightarrow y(xy)$ を持つ組合せ子 **O**[12] は停止性を持たない [6, 7].

本稿では, Waldmann が非基礎ループ性を示すために提案した手法 [16] を適用し, 組合せ子 **O** が非基礎ループ性を持つことを示す.

*This paper is an extended abstract and the detailed version will be published elsewhere.

2 準備

本稿の定義は文献 [2], [16], [15] に準ずる．本節では，組合せ子論理と項書換えシステムの定義を与える．

2.1 組合せ子論理

組合せ子論理ついては文献 [1] の第 7 章及び文献 [3], [4] を参照して頂きたい．

以下では，記号 Z をある組合せ子とする．構文的等式を $\equiv$ で表す．**変数**の可算無限集合を $\mathcal{V}$ とする ($\{Z\} \cap \mathcal{V} = \emptyset$)．組合せ子 Z 上の項の集合 $CL(Z,\mathcal{V})$ を次のように帰納的に定義する．(1) $\mathcal{V} \subseteq CL(Z,\mathcal{V})$, (2) $Z \in CL(Z,\mathcal{V})$, (3) $s,t \in CL(Z,\mathcal{V})$ ならば $(st) \in CL(Z,\mathcal{V})$．集合 $CL(Z,\mathcal{V})$ の項を **Z-項**という．また，変数を含まない Z-項を**基礎 Z-項**といい，基礎 Z-項全体の集合を $CL(Z)$ で表す．**Z-文脈**，すなわち，0 個以上のホール □ を含む Z-項の集合 $CL(\{Z,\square\},\mathcal{V})$ を次のように帰納的に定義する．(1) $\mathcal{V} \subseteq CL(\{Z,\square\},\mathcal{V})$, (2) $Z \in CL(\{Z,\square\},\mathcal{V})$, (3) $\square \in CL(\{Z,\square\},\mathcal{V})$, (4) $s,t \in CL(\{Z,\square\},\mathcal{V})$ ならば $(st) \in CL(\{Z,\square\},\mathcal{V})$．1 つのホール □ を含む Z-文脈を $C[\,]$ で表す．$C[t]$ は Z-文脈 $C[\,]$ のホール □ を Z-項 t で置き換えた結果である．(st) を括弧を省略して単に st と書く．括弧は左結合である，すなわち，$s_1 s_2 \cdots s_n$ は $(\cdots(s_1 s_2)\cdots s_n)$ を意味する．Z-項 t に含まれている変数の集合を $Var(t)$ と表す．**代入** σ を $\mathcal{V}$ から $CL(Z,\mathcal{V})$ への定義域 $Dom(\sigma) = \{x \in \mathcal{V} \mid \sigma(x) \not\equiv x\}$ が有限である写像とする．代入 σ を $\{x \leftarrow \sigma(x) \mid x \in Dom(\sigma)\}$ と表す．すべての代入 σ はある組合せ子 Z と Z-項 $B_1, \cdots, B_n$ に対して，$\sigma(ZB_1 \cdots B_n) = Z\sigma(B_1)\cdots\sigma(B_n)$ を満たす写像 $\sigma : CL(Z,\mathcal{V}) \to CL(Z,\mathcal{V})$ へ拡張できる．以下では，$\sigma(t)$ の代わりに $t\sigma$ という記法を使用する．書換え規則 $Zx_1 \cdots x_n \to t$ は組合せ子 Z が持つ方向付けられた等式であり，次の条件を満たす：(1) 変数 $x_1, \cdots, x_n$ は互いに相異なる，(2) $Var(t) \subseteq \{x_1, \cdots, x_n\}$, (3) 組合せ子 Z は Z-項 t に出現しない．書換え規則 $Zx_1 \cdots x_n \to t$ による $CL(Z,\mathcal{V})$ 上の書換え $\to$ を次のように定義する：$s \to t \iff$ ある Z-文脈 $C[\,]$, $B_1, \cdots, B_n \in CL(Z,\mathcal{V})$ に対して，$s \equiv C[ZB_1 \cdots B_n]$ かつ $t \equiv C[t\{x_1 \leftarrow B_1, \cdots, x_n \leftarrow B_n\}]$．このとき，$ZB_1 \cdots B_n$ を **Z-リデックス**という．書換え $\to$ が無限書換え列 $t_0 \to t_1 \to t_2 \to \cdots$ を持たないとき，**停止性を持つ**という．書換え $\to$ の推移的閉包を $\to^+$ で表す．書換え $t \to^+ t$ を**循環 (cyclic)** であるという．書換え $\to$ が循環書換えを持たないとき，組合せ子 Z は**非循環性を持つ (acyclic)** という．$C[\,]$ を Z-文脈，σ を代入とする．書換え $t \to^+ C[t\sigma]$ を**ループ (loop)** という．書換え $\to$ がループを持たないとき，組合せ子 Z は非ループ性を持つという．書換え $t \to^+ C[t]$ を**基礎ループ (ground loop)** という．書換え $\to$ が基礎ループを持たないとき，組合せ子 Z は非基礎ループ性を持つという．組合せ子 Z が停止性を持つならば非ループ性を持つ．逆に，組合せ子 Z が非ループ性を持つとき停止性を持つとは限らない．また，組合せ子 Z が非ループ性を持つならば非基礎ループ性を持つ．さらに，組合せ子 Z が非基礎ループ性を持つならば非循環性を持つ．本稿では文献 [12] に掲載されている停止性を持たない組合せ子 [1] と組合せ子 **K**, **I**, **J** [2] のみを取り扱う．本稿で使用する組合せ子と書換え規則を次の表 1 にまとめる．

---

[1]ただし，Turing の不動点組合せ子 **U** は本稿では取り扱わない．

[2]停止性を持つ代表的な組合せ子として **K**, **I**, **J** を取り扱う．

表 1: 組合せ子と書換え規則 ([12])

S	$\mathbf{S}xyz \to xz(yz)$	**H**	$\mathbf{H}xyz \to xyzy$
K	$\mathbf{K}xy \to x$	**M**	$\mathbf{M}x \to xx$
I	$\mathbf{I}x \to x$	**W**	$\mathbf{W}xy \to xyy$
L	$\mathbf{L}xy \to x(yy)$	$\mathbf{W}^1$	$\mathbf{W}^1\, xy \to yxx$
O	$\mathbf{O}xy \to y(xy)$	$\mathbf{W}^*$	$\mathbf{W}^*\, xyz \to xyzz$
J	$\mathbf{J}xyzw \to xy(xwz)$	$\mathbf{W}^{**}$	$\mathbf{W}^{**}\, xyzw \to xyzww$

2.2 項書換えシステム

項書換えシステムの詳細については文献 [10], [15] を参照して頂きたい.

シグネチャ$\mathcal{F}$ を引数を持つ**関数記号**の集合とする. 引数が 0 の関数記号を**定数**と呼ぶ. **変数**の可算無限集合を $\mathcal{V}$ とする ($\mathcal{F} \cap \mathcal{V} = \emptyset$). 構文的等式を $\equiv$ で表す. $\mathcal{F}$ 上の**項**の集合 $T(\mathcal{F},\mathcal{V})$ を次のように帰納的に定義する. (1) $\mathcal{V} \subseteq T(\mathcal{F},\mathcal{V})$ (2) f を n 引数関数記号 ($n \geq 0$), $t_1,\cdots,t_n \in T(\mathcal{F},\mathcal{V})$ ならば $f(t_1,\cdots,t_n) \in T(\mathcal{F},\mathcal{V})$. 変数を含まない項を**基礎項**といい, 基礎項全体の集合を $T(\mathcal{F})$ により表す. シグネチャ$\mathcal{F} \cup \{\Box\}$ 上の項を**文脈**という. すなわち, 0 個以上のホール $\Box$ を含む項の集合 $T(\mathcal{F} \cup \{\Box\},\mathcal{V})$ を次のように帰納的に定義する. (1) $\mathcal{V} \subseteq T(\mathcal{F} \cup \{\Box\},\mathcal{V})$, (2) $\Box \in T(\mathcal{F} \cup \{\Box\},\mathcal{V})$, (3) f を n 引数関数記号 ($n \geq 0$), $t_1,\cdots,t_n \in T(\mathcal{F} \cup \{\Box\},\mathcal{V})$ ならば $f(t_1,\cdots,t_n) \in T(\mathcal{F} \cup \{\Box\},\mathcal{V})$. 文脈 C がホール $\Box$ を 1 つだけ含むとき, $C[\,]$ と表す. $C[t]$ は文脈 $C[\,]$ のホール $\Box$ を項 t で置き換えた結果である. $t \equiv C[s]$ として表すことができるならば, s は t の**部分項**であるといい, $s \trianglelefteq t$ と表す. 項 t に出現する変数の集合を $Var(t)$ と表す. **代入** σ を $\mathcal{V}$ から $T(\mathcal{F},\mathcal{V})$ への定義域 $Dom(\sigma) = \{x \in \mathcal{V} \mid \sigma(x) \not\equiv x\}$ が有限である写像とする. すべての代入 σ は項 $f(t_1,\cdots,t_n) \in T(\mathcal{F},\mathcal{V})$ に対して, $\sigma(f(t_1,\cdots,t_n)) = f(\sigma(t_1),\cdots,\sigma(t_n))$ を満たす写像 $\sigma : T(\mathcal{F},\mathcal{V}) \to T(\mathcal{F},\mathcal{V})$ へ拡張できる. 以下では, $\sigma(t)$ の代わりに $t\sigma$ という記法を使用する. 書換え規則 $l \to r$ は $T(\mathcal{F},\mathcal{V})$ 上の方向付けられた等式であり, 次の条件を満たす: $l \notin \mathcal{V}$ かつ $Var(r) \subseteq Var(l)$. **項書換えシステム (TRS)** は書換え規則の集合である. TRS $\mathcal{R}$ により項 s が t に書換えられるとは, ある代入 σ, 文脈 $C[\,]$ と書換え規則 $l \to r \in \mathcal{R}$ が存在し $s \equiv C[l\sigma]$ かつ $t \equiv C[r\sigma]$ を満たすときをいい, $s \to_{\mathcal{R}} t$ と表す. 項 $l\sigma$ を**リデックス**という. 項 s 中のリデックス Δ を書換えることにより t が得られるとき, $s \to^{\Delta} t$ と表す. 項 t の**根記号**を次のように定義する: t が変数のとき $root(t) \equiv t$, $t \equiv f(t_1,\cdots,t_n)(n \geq 0)$ のとき $root(t) \equiv f$. TRS $\mathcal{R}$ が無限書換え列 $t_0 \to_{\mathcal{R}} t_1 \to_{\mathcal{R}} t_2 \to_{\mathcal{R}} \cdots$ を持たないとき, **停止性を持つ**という. TRS $\mathcal{R}$ の書換え $\to_{\mathcal{R}}$ の推移的閉包を $\to^{+}_{\mathcal{R}}$ で表す. TRS $\mathcal{R}$ において, 書換え $t \to^{+}_{\mathcal{R}} t$ を**循環**であるという. TRS $\mathcal{R}$ が循環書換えを持たないとき, **非循環性を持つ**という. $C[\,]$ を文脈, σ を代入とする. TRS $\mathcal{R}$ において, 書換え $t \to^{+}_{\mathcal{R}} C[t\sigma]$ を**ループ**という. TRS $\mathcal{R}$ がループを持たないとき, 非ループ性を持つという. TRS $\mathcal{R}$ において, 書換え $t \to^{+}_{\mathcal{R}} C[t]$ を**基礎ループ**という. TRS $\mathcal{R}$ が基礎ループを持たないとき, 非基礎ループ性を持つという.

3 組合せ子 O の非基礎ループ性

書換え規則が 1 つの場合でさえ TRS の非ループ性は，決定不能である [8]. Middeldorp らの非ループ性の決定不能性の証明から，書換え規則が 1 つの場合でさえ TRS の非基礎ループ性も決定不能である．Waldmann は組合せ子 **S** の非循環性 [2] を拡張し，組合せ子 **S** の非基礎ループ性を示し，さらに，基礎 **S**-項が正規形を持つことが決定可能であることを示している [16].

本節では，Waldmann が組合せ子 **S** の非基礎ループ性を示すのに提案した手法 [16] を適用して組合せ子 **O** の非基礎ループ性を示す.

定義 3.1 *TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{O})$ のシグネチャ $\mathcal{F}(\mathcal{R}(\mathbf{O}))$ を定数 **O** と *2* 引数関数記号 $\circ$ から成る集合とし，*TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{O})$ を次のように定義する：
$\mathcal{R}(\mathbf{O}) = \{(\mathbf{O} \circ x) \circ y \rightarrow y \circ (x \circ y)\}$.

定義 3.2 次のように定義されるラベル付 *TRS* $\mathcal{R}_n(\mathbf{O})$ は無限シグネチャ $\mathcal{F}(\mathcal{R}_n(\mathbf{O})) = \{\mathbf{O}, \circ_1, \circ_2, \cdots, \circ_n, \circ_{n+1}, \cdots\}$ を持つ *(*ここで $\circ_i$ $(1 \le i)$ はラベル付 *2* 引数関数記号である *)*：
$\mathcal{R}_n(\mathbf{O}) = \{(\mathbf{O} \circ_l x) \circ_k y \rightarrow y \circ_{k+1} (x \circ_k y) | 1 \le k \le n, 1 \le l\}$.

注意：$\circ_{n+1}$ を左辺の根記号とする書換え規則は存在しない．また，$i \le j$ ならば，$\mathcal{R}_i(\mathbf{O}) \subseteq \mathcal{R}_j(\mathbf{O})$.

補題 3.3 任意の $n (\ge 1)$ に対して，$\mathcal{R}_n(\mathbf{O})$ は停止性を持つ.

次に，文献 [16] に倣って，組合せ子 **O** に対する右側の深さを定義する.

定義 3.4 $T(\mathcal{F}(\mathcal{R}(\mathbf{O})))$ 又は $T(\mathcal{F}(\mathcal{R}_n(\mathbf{O})))$ における項の**右側の深さ (right depth)** を次のように定義する：
$d_r(\mathbf{O}) = 0$, $d_r(X \circ_l Y) = 1 + d_r(Y)$.

補題 3.5 $T(\mathcal{F}(\mathcal{R}_n(\mathbf{O}))) \ni X \rightarrow_{\mathcal{R}_n(\mathbf{O})} Y$ ならば，$d_r(X) \le d_r(Y)$.

定義 3.6 $T(\mathcal{F}(\mathcal{R}_n(\mathbf{O}))) \setminus \{\mathbf{O}\}$ におけるラベル付項の**根記号のラベル**を次のように定義する：
$root(t) \equiv \circ_k$ のとき，$label(t) = k$.

定義 3.7 *([16])* 次の条件が成立するとき，ラベル付項 X が**無矛盾 (consistent)** であるという.
$\forall X' \trianglelefteq X$ $(X' \not\equiv \mathbf{O})$ に対して，$d_r(X') \ge label(X')$.

定義より，無矛盾な項の部分項は明らかに無矛盾である．また，以下で示すように，無矛盾性は TRS $\mathcal{R}_n(\mathbf{O})$ における書換えで保存される.

補題 3.8 X $(\in T(\mathcal{F}(\mathcal{R}_n(\mathbf{O}))))$ が無矛盾かつ $X \rightarrow_{\mathcal{R}_n(\mathbf{O})} Y$ ならば，Y は無矛盾である.

定義 3.9 写像 $tag : T(\mathcal{F}(\mathcal{R}(\mathbf{O}))) \rightarrow T(\mathcal{F}(\mathcal{R}_n(\mathbf{O})))$ を，葉ではない任意の部分項 X の根記号 $\circ$ をラベル付記号 $\circ_{d_r(X)}$ で置き換えると定義する.

定義 3.10 写像 $forget : T\ (\mathcal{F}(\mathcal{R}_n(\mathbf{O}))) \to T\ (\mathcal{F}(\mathcal{R}(\mathbf{O})))$ を, すべてのラベル付記号 $\circ_l$ を $\circ$ で置き換えると定義する.

補題 3.11 ある $n(\geq 1)$ に対して, $T(\mathcal{F}(\mathcal{R}_n(\mathbf{O}))) \ni X \to_{\mathcal{R}_n(\mathbf{O})} Y$ ならば, $forget\ (X) \to_{\mathcal{R}(\mathbf{O})} forget\ (Y)$.

補題 3.12 $\mathcal{R}(\mathbf{O})$ 上の有限又は無限書換え列 $T\ (\mathcal{F}\ (\mathcal{R}(\mathbf{O}))) \ni X_1 \to_{\mathcal{R}(\mathbf{O})}^{\Delta_1} X_2 \to_{\mathcal{R}(\mathbf{O})}^{\Delta_2} X_3 \to_{\mathcal{R}(\mathbf{O})}^{\Delta_3} \cdots$ が存在し, 任意の $k\ (\geq 1)$ に対して, $d_r(\Delta_k) \leq n$ と仮定する. このとき, $X_1' \equiv tag(X_1)$ かつ任意の $k\ (\geq 1)$ に対して $forget(X_k') \equiv X_k$ を満たす $\mathcal{R}_n(\mathbf{O})$ 上の有限又は無限書換え列 $X_1' \to_{\mathcal{R}_n(\mathbf{O})} X_2' \to_{\mathcal{R}_n(\mathbf{O})} X_3' \to_{\mathcal{R}_n(\mathbf{O})} \cdots$ が存在する.

補題 3.13 $\mathcal{R}(\mathbf{O})$ 上の無限書換え列 $T(\mathcal{F}(\mathcal{R}(\mathbf{O}))) \ni X_1 \to_{\mathcal{R}(\mathbf{O})}^{\Delta_1} X_2 \to_{\mathcal{R}(\mathbf{O})}^{\Delta_2} X_3 \to_{\mathcal{R}(\mathbf{O})}^{\Delta_3} \cdots$ が存在すると仮定する. このとき, $d_r(\Delta_k)\ (k = 1, 2, \cdots)$ は有界ではない.

定理 3.14 *TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{O})$ は, 非基礎ループ性を持つ.

系 3.15 $CL(\mathbf{O})$ は非基礎ループ性を持つ.

補題 3.16 組合せ子 **O** が $CL(\mathbf{O}, \mathcal{V})$ 上で非基礎ループ性を持つことと $CL(\mathbf{O})$ 上で非基礎ループ性を持つことは同値である.

したがって, 系 3.15 と補題 3.16 から次の系が得られる.

系 3.17 $CL(\mathbf{O}, \mathcal{V})$ は非基礎ループ性を持つ.

4 むすび

本稿では組合せ子 **O** に対して, 非基礎ループ性を示した. 本稿および先行研究の結果を以下の表 2 にまとめる.

参考文献

[1] H. P. Barendregt, "The Lambda Calculus, Its Syntax and Semantics," 2nd revised edition, North-Holland, 1984.

[2] J. Bergstra and J. W. Klop, "Church-Rosser strategies in the lambda calculus," Theoretical Computer Science, 9, pp.27–38, 1979.

[3] H. B. Curry and R. Feys, "Combinatory Logic," Vol.1, North-Holland, 1958.

[4] J. R. Hindley and J. P. Seldin, "Introduction to Combinators and λ-calculus," Cambridge University Press, 1986.

[5] 岩見宗弘, "組合せ子 L の非循環性," 第 6 回情報科学技術フォーラム講演論文集, 情報科学技術レターズ, pp.25–26, 2007.

表 2: 組合せ子が持つ性質

非循環性 $\Longleftarrow$ 非基礎ループ性 $\Longleftarrow$ 非ループ性 $\Longleftarrow$ 停止性
非循環性 $\not\Longrightarrow$ 非基礎ループ性 $\not\Longrightarrow$ 非ループ性 $\not\Longrightarrow$ 停止性

組合せ子	非循環性	非基礎ループ性	非ループ性	停止性
S	○[2]	○[16]	?	×[1]
K	○	○	○	○
I	○	○	○	○
O	○[6, 7]	⊙	?	×[6, 7]
L	○[5]	×[13, 14]	×[13, 14]	×[13, 14]
J	○[11]	○[11]	○[11]	○[11]
H	×	×	×	×
M	×	×	×	×
W	×	×	×	×
$\mathbf{W}^1$	×	×	×	×
$\mathbf{W}^*$	×	×	×	×
$\mathbf{W}^{**}$	×	×	×	×

(⊙ : 成立 **(本研究)**, ○ : 成立, × : 不成立, ? : 未解決)

[6] 岩見宗弘, "組合せ子の非循環性と関連する性質について," 日本ソフトウェア科学会第 25 回 大会論文集, pp.1–8 (CD-ROM), 2008.

[7] 岩見宗弘, "組合せ子の非循環性と非停止性," 京都大学数理解析研究所講究録, 「代数・言語のアルゴリズムと計算理論」, No.1604 ,pp. 60–68, 2008.

[8] A. Middeldorp and B. Gramlich, "Simple termination is difficult," Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing, 6, pp.115–128, 1995.

[9] A. Middeldorp and H. Ohsaki, "Type introduction for equational rewriting," Acta Informatica, 36(12), pp.1007–1029, 2000.

[10] E. Ohlebusch, "Advanced Topics in Term Rewriting," Springer-Verlag, 2002.

[11] D. Probst and T. Studer, "How to normalize the Jay," Theoretical Computer Science, 254, pp.677–681, 2001.

[12] R. Smullyan, "To Mock a Mockingbird," Knopf, New York, 1985.

[13] M. Sprenger and M. Wymann-Böni, "How to decide the lark," Theoretical Computer Science, 110, pp.419–432, 1993.

[14] R. Statman, "The word problem for Smullyan's lark combinator is decidable," J. Symbolic Computation, 7, pp.103–112, 1989.

[15] Terese, "Term Rewriting Systems," Cambridge University Press, 2003.

[16] J. Waldmann, "The combinator S," Information and Computation, 159, pp.2–21, 2000.