数理解析研究所講究録
第1636巻 2009年 33-39

2パラメータ最適停止に対する預言者の不等式

広島市立大学大学院情報科学研究科システム工学専攻　田中輝雄

1 はじめに

最適停止問題の預言者（prophet）の不等式とは，期待値 $E[\sup_n X(n)]$ と最適値 $\sup_{T:\text{停止規則}} E[X(T)]$ の間の不等式のことであり，最適停止問題に対する1つのトピックである．

前者の期待値は完全に将来を見通せる洞察力をもったプレイヤーの期待利得を，後者の最適値は過去の情報のみに依存する停止規則のみを用いることが出来るプレイヤーの期待利得を表すと解釈される．明らかに，

$$\sup_T E[X(T)] \leq E[\sup_n X(n)]$$

は常に成立する．Krengel と Sucheston [10] が，amart に関連してこれらの値の間の関係式を研究したことが最初の研究とされている．その後，確率過程の満たす条件や利得のいろいろな型に応じて多くの研究がされている (例えば,[5],[6],[7],[8],[9])．

以下では，従来の最適停止問題を1パラメータ最適停止問題とよぶこととする．1パラメータ最適停止問題の預言者の不等式の基本となるものは比の評価 ([6], [8],[10]) と差の評価 ([7],[8]) である．

定理 1.1 ([6], [8],[10]) $\{X(n)\}$ を非負値，独立な確率過程とする．このとき，

$$E[\sup_n X(n)] \leq 2 \sup_T E[X(T)]$$

が成立し，定数 2 は

$$\sup_{\{X(n)\}} \frac{E[\sup_n X(n)]}{\sup_T E[X(T)]} = 2$$

という意味において最良である．

定理 1.2 ([7], [8]) $\{X(n)\}$ を区間 $[0,1]$ に値をとる独立な確率過程とする．このとき，

$$E[\sup_n X(n)] - \sup_T E[X(T)] \leq \frac{1}{4}$$

が成立し，定数 $\frac{1}{4}$ は

$$\sup_{\{X(n)\}} (E[\sup_n X(n)] - \sup_T E[X(T)]) = \frac{1}{4}$$

という意味において最良である．

定理 1.3 ([6]) $\{X(n), n = 1, 2, \ldots, k\}$ を非負値，有限期間の確率過程とする．このとき，

$$E[\sup_n X(n)] \leq k \sup_T E[X(T)]$$

が成立し，定数 k は

$$\sup_{\{X(n)\}} \frac{E[\sup_n X(n)]}{\sup_T E[X(T)]} = k$$

という意味において最良である．

2次元時間変数をもつ確率過程に対する最適停止問題（以下では,2パラメータ最適停止問題とよぶ）に対して，預言者の不等式を導くことを目的とする．ここでは，2パラメータ最適停止問題 (例えば,[2],[11],[12],[13],[14],[15]) に関する預言者の不等式，特に，比の評価について述べる．

Krengel と Sucheston[11, pp.225-226] では，一般の d パラメータ最適停止問題，つまり，d 次元時間変数をもつ確率過程に対する最適停止問題の枠組みで，無限期間，独立な d パラメータ確率過

程に対する最適停止問題の預言者の不等式について考察し, 無限期間確率過程に対しては, 定理 1.1 に対応する不等式は成立しない, つまり, 定理 1.1 におけるような普遍的な定数は存在しないことが示されている. ここでは, 固定された有限期間において, 定理 1.1 と定理 1.3 に対応する不等式と普遍的な定数を見つけることを目的とする. 但し, 有限期間確率過程を考えるため, この普遍的な定数は時間変数の期間に依存する定数となる.

また, 対象とする確率過程は, 定理 1.1 と定理 1.3 と同様に, 非負値, 独立な 2 パラメータ離散時間確率過程を考える.

2 2パラメータ最適停止問題 ([2])

N_0 を非負整数の全体の集合, $N_0^2 = N_0 \times N_0$ とし, N_0^2 には次の半順序を入れる : $s = (s_1, s_2), t = (t_1, t_2) \in N_0^2$ に対して, $s_1 \le t_1$ かつ $s_2 \le t_2$ のとき $s \le t$ と定める.

また, $s \wedge t := (s_1 \wedge t_1, s_2 \wedge t_2), |s| := s_1 + s_2, o := (0,0), e_1 := (1,0), e_2 := (0,1)$ と定める.

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を完備確率空間とする. $\{\mathcal{F}_t, t \in N_0^2\}$ を filtration とする : 次を満たす $\mathcal{F}$ の部分 σ-集合体の族である.

- $\mathcal{F}_o$ は $\mathcal{F}$ のすべての零集合を含む.
- $s \le t$ ならば $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$.

定義 2.1 *(1) $T : \Omega \to N_0^2$ が, 任意の $t \in N_0^2$ に対して, $\{T \le t\} \in \mathcal{F}_t$ を満たすとき, T を stopping point とよぶ.*

(2) stopping point の列 $\{\sigma(n), n \ge 0\}$ と確率変数 $\tau : \Omega \to N_0$ の組 $(\{\sigma(n), n \ge 0\}, \tau)$ が次を満たすとき, この組を tactic とよぶ.

- $\sigma(0) = o$ P-a.e.
- $\sigma(n+1) \in d(\sigma(n))$ P-a.e., $\forall n$.
- $\sigma(n+1) : \mathcal{F}_{\sigma(n)}$-measurable, $\forall n$.
- $\tau : \{\mathcal{F}_{\sigma(n)}, n \ge 0\}$-stopping time.

但し, $d(s) := \{t \mid t \ge s, |t - s| = 1\}$, $\mathcal{F}_{\sigma(n)} := \{A \in \mathcal{F} \mid A \cap \{\sigma(n) = t\} \in \mathcal{F}_t, \ \forall t\}$.

(3) stopping point T に対して, $T = \sigma(\tau)$ P-a.e. となる tactic $(\{\sigma(n)\}, \tau)$ が存在するとき, T は accessible であるとよぶ. すべての accessible stopping point の集合を $\mathbf{A}$ で表すとする.

accessible stopping point に関して, 次の重要な結果が知られている.

定理 2.1 $\{\mathcal{F}_t, t \in N_0^2\}$ が条件付独立性を満たすとする : 任意の $s, t \in N_0^2, C \in \mathcal{F}_s, D \in \mathcal{F}_t$ に対して,

$$P(C \cap D \mid \mathcal{F}_{s \wedge t}) = P(C \mid \mathcal{F}_{s \wedge t}) P(D \mid \mathcal{F}_{s \wedge t}).$$

このとき, すべての *stopping point* は *accessible* である.

$\{\mathcal{F}_t, t \in N_0^2\}$ が独立な確率過程 $\{X(t), t \in N_0^2\}$ から生成される部分 σ-集合体の族であるとき, 条件付独立性を満たす.

確率過程 $\{X(t), t \in N_0^2\}$ に対して,

$$E[X(T^*)] = \sup_{T \in \mathbf{A}} E[X(T)]$$

となる T^* を見つけ, 最適値 $E[X(T^*)]$ を特徴付けること, または,

$$E[X(\sigma^*(\tau^*))] = \sup_{(\{\sigma(n)\}, \tau)} E[X(\sigma(\tau))]$$

となる $(\{\sigma^*(n)\}, \tau^*)$ を見つけ, 最適値 $E[X(\sigma^*(\tau^*))]$ を特徴付けることが 2 パラメータ最適停止問題である.

$u \in N_0^2$ を固定し, $I := \{t \in N_0^2 : t \le u\}$ とおく. 以下では主に, 時間変数の空間を I (有限期間) とし, 確率過程の時間変数や stopping point の値域は I に制限したものを考える.

有限期間の場合は, 動的計画法の backward induction によって解析することができる.

定義 2.2 $\{X(t), t \in I\}$ に対して, 次式で定義される確率過程 $\{Z(t), t \in I\}$ を *Snell* 包とよぶ.

$$Z(t) := \operatorname*{esssup}_{T \geq t, T \in \mathbf{A}} E[X(T)|\mathcal{F}_t].$$

$\{X(t), t \in I\}$ に対して, 確率過程 $\{W(t), t \in I\}$ を次式で定義する.

- $W(u) := X(u)$.
- $s < u$ とし, $s + e_i$ に対して $W(s + e_i)$ が定義されているとき,

$$W(s) := \max\left\{X(s), \max_i E[W(s+e_i)|\mathcal{F}_s]\right\}$$

とおく.

このとき, 任意の $t \in I$ に対して, $Z(t) = W(t)$ であることが知られている. また, stopping point の列 $\{T(t), t \in I\}$ を次式で定義する.

- $T(u) := u$.
- $s < u$ とし, $s + e_i$ に対して $T(s + e_i)$ が定義されているとき,

$$T(s) := \begin{cases} s & \text{on } \{W(s) = X(s)\} \\ T(D(s)) & \text{on } \{W(s) > X(s)\}, \end{cases}$$

但し, $D(s)$ は $E[W(s + e_k)|\mathcal{F}_s] = \max_i E[W(s + e_i)|\mathcal{F}_s]$ となる $s + e_k$ を表す.

このとき, $T(t) \geq t, T(t) \in \mathbf{A}$ である.

定理 2.2 (**[2]**) 任意の *stopping point* $T(\geq t, \in \mathbf{A})$ に対して, $Z(t) = E[X(T(t))|\mathcal{F}_t] \geq E[X(T)|\mathcal{F}_t]$ が成立する. 特に, 任意の *stopping point* $T(\geq o, \in \mathbf{A})$ に対して, $E[Z(o)] = E[X(T(o))] \geq E[X(T)]$ が成立し, $T(o)$ が最適な *stopping point*, $E[Z(o)]$ が最適値である.

3 預言者の不等式 : 非負値, 独立の場合

3.1 無限期間確率過程に対する不等式

定理 3.1 ([11]) $\{X(t), t \in N_0^2\}$ を非負値, 独立な確率過程とする. $\mathcal{F}_t^* := \sigma(X(s), t+(1,1) \not\leq s)$, $\mathcal{F}_t^{**} := \sigma(X(s), s_1 \leq t_1)$ によって部分 σ-集合体の族 $\{\mathcal{F}_t^*, t\}, \{\mathcal{F}_t^{**}, t\}$ を定める. $\{\mathcal{F}_t^*, t\}$ に関するすべての *stopping point* の集合を $\mathbf{A}^*$, $\{\mathcal{F}_t^{**}, t\}$ に関するすべての *stopping point* の集合を $\mathbf{A}^{**}$ とする. このとき, 次式が成立する.

$$E[\sup_t X(t)] \leq 2 \sup_{T \in \mathbf{A}^{**}} E[X(T)] \leq 2 \sup_{T \in \mathbf{A}^*} E[X(T)].$$

以下では, $V[\{X(t), t\}]$ は確率過程 $\{X(t), t\}$ に対する最適停止問題の最適値を, $\vee$ は max を表すとする. また, 与えられた確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上に, 与えられた確率過程 (確率変数列) とは独立になる確率変数列が構成出来ると仮定する.

3.2 タイプ1

$n \geq 2$ とする. この節では, $\{t : |t| \leq n\}$ を時間変数の空間とし, 非負値, 独立な確率過程 $\{X(t)\}$ は正かつ有限な期待値をもつ場合を考える.

$v^i(i = 0, 1, \ldots, n)$ を $|t| = n$ となる点（時間）とする. $V^i := V[\{X(v^i - e_2), X(v^i), X(v^{i+1})\}]$ とし, $p_i(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ は

$$0 < p_i < 1, \quad \frac{V^0}{p_0} < \frac{V^1}{p_1} < \cdots < \frac{V^{n-1}}{p_{n-1}}$$

を満たすとする. $L_{p_i}(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ は 互いに独立, $\{X(t), |t| \leq n-2\}$ とも独立, $P\big(L_{p_i} = \frac{V^i}{p_i}\big) = p_i = 1 - P\big(L_{p_i} = 0\big)$ を満たす確率変数とする. $\lambda := \max_{i=1,2} V[\{X(t), t \geq e_i, |t| \leq n\}]$ とおく.

補題 3.1 次式が成立する.

$\lambda = V[\{\lambda(t = o), X(t)\big(0 < |t| \leq n\big)\}] = V[\{\lambda(t = o), X(t)\big(0 < |t| \leq n-2\big), L_{p_i}\big(0 \leq i \leq n-1\big)\}]$.

補題 3.2 次式を満たす $p_i(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ が存在する.

$$\begin{aligned} & E[\lambda \vee X(t)\big(0 < |t| \leq n-2\big) \vee L_{p_i}(0 \leq i \leq n-1)] \\ > \; & E[\lambda \vee X(t)\big(0 < |t| \leq n-1\big) \vee X(v^i)(0 \leq i \leq n-1)], \\ & E[\lambda \vee X(t)\big(0 < |t| \leq n-2\big) \vee L_{p_i}(0 \leq i \leq n-1)] \\ > \; & E[\lambda \vee X(t)\big(0 < |t| \leq n-1\big) \vee X(v^{i+1})(0 \leq i \leq n-1)]. \end{aligned}$$

補題 3.3

$$R\Big(\{X(t)\big(0 \leq |t| \leq n\big)\}\Big) := \frac{E[\vee X(t)\big(0 \leq |t| \leq n\big)]}{V[\{X(t)\big(0 \leq |t| \leq n\big)\}]}$$

とおく. このとき, 次式を満たす $p_i(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ が存在する.

$$R\Big(\{X(t)\big(0 \leq |t| \leq n\big)\}\Big) < R\Big(\{\lambda(t = o), X(t)\big(0 < |t| \leq n-2\big), L_{p_i}(0 \leq i \leq n-1)\}\Big) + 1.$$

定理 3.2 次式が成立する.

$$E[\sup_t X(t)] < (n+2) \sup_{T \in \mathbf{A}} E[X(T)].$$

さらに, $n+2$ は

$$\sup_{\{X(t)\}} \frac{E[\sup_t X(t)]}{\sup_T E[X(T)]} = n+2$$

という意味において最良である.

3.3 タイプ2

この節と次節では, I を時間変数の空間とし, 非負値, 独立な確率過程 $\{X(t)\}$ は正かつ有限な期待値をもつ場合を考える. 固定した $u = (u_1, u_2)$ は $u_1 \geq u_2$ と仮定する.

自然数 $\ell(u_1 < \ell \leq |u|)$ に対して, $v^i(i = 0, 1, \ldots, k)$ を $|t| = \ell$ となる点とする.

$$\begin{aligned} V^0 &:= V[\{X(v^0 - e_1), X(v^0)\}], \\ V^i &:= V[\{X(v^i - e_1), X(v^i), X(v^{i-1})\}], \\ V^{k+1} &:= V[\{X(v^k - e_2), X(v^k)\}] \end{aligned}$$

とおく．$p_i(i=0,1,\ldots,k+1)$ は

$$0<p_i<1, \quad \frac{V^0}{p_0}<\frac{V^1}{p_1}<\cdots<\frac{V^{k+1}}{p_{k+1}}$$

を満たすとする．$L_{p_i}(i=0,1,\ldots,k+1)$ は 互いに独立，$\{X(t),|t|\le \ell-1\}$ とも独立，$P\big(L_{p_i}=\frac{V^i}{p_i}\big)=p_i=1-P\big(L_{p_i}=0\big)$ を満たす確率変数とする．$\lambda:=\max_{i=1,2}V[\{X(t),t\ge e_i,t\in I\}]$ とおく．

補題 3.4 次式が成立する．

$\lambda=V[\{\lambda(t=o),X(t)\big(0<|t|\le\ell\big)\}]=V[\{\lambda(t=o),X(t)\big(0<|t|\le\ell-2\big),L_{p_i}(0\le i\le k+1)\}].$

補題 3.5 次式を満たす $p_i(i=0,1,\ldots,k+1)$ が存在する．

$$\begin{aligned}&E[\lambda\vee X(t)\big(0<|t|\le\ell-2\big)\vee L_{p_i}(0\le i\le k+1)]\\ >\ &E[\lambda\vee X(t)\big(0<|t|\le\ell\big)]+E[X(v^k)],\\ &E[\lambda\vee X(t)\big(0<|t|\le\ell-2\big)\vee L_{p_i}(0\le i\le k+1)]\\ >\ &E[\lambda\vee X(t)\big(0<|t|\le\ell\big)]+E[X(v^0)].\end{aligned}$$

補題 3.6

$$R[\{X(t),t\in I,|t|\le\ell\}]:=\frac{E[\vee X(t)(t\in I,|t|\le\ell)]}{V[\{X(t),t\in I,|t|\le\ell\}]}$$

とおく．このとき，次式を満たす $p_i(i=0,1,\ldots,k+1)$ が存在する．

$$R[\{X(t),t\in I,|t|\le\ell\}]<R[\{\lambda(t=o),X(t)(0<|t|\le\ell-2),L_{p_i}(i=0,1,\ldots,k+1)\}].$$

3.4 タイプ3

自然数 $\ell(u_2<\ell\le u_1)$ に対して，$v^i(i=0,1,\ldots,k)$ を $|t|=\ell$ となる点とする．

$$\begin{aligned}V^0&:=V[\{X(v^0-e_1),X(v^0)\}],\\ V^i&:=V[\{X(v^i-e_1),X(v^i),X(v^{i-1})\}]\end{aligned}$$

とおく．$p_i(i=0,1,\ldots,k)$ は

$$0<p_i<1, \quad \frac{V^0}{p_0}<\frac{V^1}{p_1}<\cdots<\frac{V^k}{p_k}$$

を満たすとする．$L_{p_i}(i=0,1,\ldots,k)$ は 互いに独立，$\{X(t),|t|\le\ell-2\}$ とも独立，$P\big(L_{p_i}=\frac{V^i}{p_i}\big)=p_i=1-P\big(L_{p_i}=0\big)$ を満たす確率変数とする．$\lambda:=\max_{i=1,2}V[\{X(t),t\ge e_i,t\in I,|t|\le\ell\}]$ とおく．

補題 3.7 次式が成立する．

$\lambda=V[\{\lambda(t=o),X(t)(0<|t|\le\ell)\}]=V[\{\lambda(t=o),X(t)(0<|t|\le\ell-2),L_{p_i}(0\le i\le k)\}].$

補題 3.8 次式を満たす $p_i(i=0,1,\ldots,k)$ が存在する．

$$\begin{aligned}&E[\lambda\vee X(t)(0<|t|\le\ell-2)\vee L_{p_i}(i=0,1,\ldots,k)]\\ >\ &E[\lambda\vee X(t)(0<|t|\le\ell)].\end{aligned}$$

補題 3.9

$$R[\{X(t),t\in I,|t|\le\ell\}]:=\frac{E[\vee X(t)(t\in I,|t|\le\ell)]}{V[\{X(t),t\in I,|t|\le\ell\}]}$$

とおく．このとき，次式を満たす $p_i(i=0,1,\ldots,k)$ が存在する．

$$R[\{X(t),t\in I,|t|\le\ell\}]<R[\{\lambda(t=o),X(t)(0<|t|\le\ell-2),L_{p_i}(i=0,1,\ldots,k)\}].$$

3.5 有限期間確率過程に対する預言者の不等式

定理 3.3 次式が成立する.

$$E[\sup_t X(t)] < (\min\{u_1, u_2\} + 2) \sup_{T \in \mathbf{A}} E[X(T)].$$

さらに, $\min\{u_1, u_2\} + 2$ は

$$\sup_{\{X(t)\}} \frac{E[\sup_t X(t)]}{\sup_T E[X(T)]} = \min\{u_1, u_2\} + 2$$

という意味において最良である.

4 預言者の不等式：非負値の場合

この章では, I を時間変数の空間とし, 非負値の確率過程 $\{X(t)\}$ を考える.

定理 4.1 次式が成立する.

$$E[\sup_t X(t)] \leq (1 + u_1)(1 + u_2) \sup_{T \in \mathbf{A}} E[X(T)].$$

さらに, $(1 + u_1)(1 + u_2)$ は

$$\sup_{\{X(t)\}} \frac{E[\sup_t X(t)]}{\sup_T E[X(T)]} = (1 + u_1)(1 + u_2)$$

という意味において最良である.

参考文献

[1] 穴太克則. (2000). タイミングの数理. 朝倉書店.

[2] Cairoli,R. and Dalang,R.C. (1996). Sequential Stochastic Optimization. John Wiley & Sons, Inc.

[3] Chow,Y.S., Robbins,H. and Siegmund,D. (1971). Great Expectations : The Theory of Optimal Stopping. Houghton–Mifflin, Boston.

[4] Edgar, G.A. and Sucheston, L. (1992). Stopping Times and Directed Processes. Cambridge University Press.

[5] Hill,T.P. (1981). Prophet inequalities for parallel processes. J. Multivariate Anal. 31, 236–243.

[6] Hill,T.P. and Kertz,R.P. (1981). Ratio comparisons of supremum and stop rule expectations. Z.Wahrsch.Verw.Gebiete 56, 283–285.

[7] Hill,T.P. and Kertz,R.P. (1981). Additive comparisons of stop rule and supremum expectations of uniformly bounded independent random variables. Proc. Amer. Math. Soc. 83, 582–585.

[8] Hill,T.P. and Kertz,R.P. (1992). A survey of prophet inequalities in optimal stopping theory. Contemporary Mathematics 125, 191–207.

[9] Hill,T.P. and Krengel, U. (1992). A prophet inequality related to the secretary problem. Contemporary Mathematics 125, 209–215.

[10] Krengel, U. and Sucheston, L. (1978). On semiamarts, amarts, and process with finite value. Adv. Appl. Probability 4: 197–266

[11] Krengel, U. and Sucheston, L. (1981). Stopping rules and tactics for processes indexed by a directed set. J. Multivariate Anal. 11, 199–229.

[12] Lawler,G.F. and Vanderbei,R.J. (1983). Markov strategies for optimal control over partially ordered sets. Ann.Probab. 11, 642–647.

[13] Mandelbaum,A. (1986). Discrete multi-armed bandits and multi-parameter processes. Probab. Theory Related Fields 71, 129–147.

[14] Mandelbaum,A. and Vanderbei,R.J. (1981). Optimal stopping and supermartingales over partially ordered sets. Z.Wahrsch.Verw.Gebiete 57, 253–264.

[15] Mazziotto,G. (1985). Two parameter optimal stopping and bi–Markov processes. Z.Wahrsch. Verw. Gebiete 69, 99–135.