数理解析研究所講究録
第1636巻 2009年 71-78

ポートフォリオ最適化問題の改良代理制約法による対話型解法

関西大学・総合情報学部　仲川　勇二　(Yuji Nakagawa)
Faculty of Informatics,
Kansai University
関西学院大学・総合政策学部　伊佐田　百合子(Yuriko Isada)
School of Policy Studies,
Kwansei Gakuin University
関西学院大学・総合政策学部　井垣　伸子　(Nobuko Igaki)
School of Policy Studies,
Kwansei Gakuin University

1. はじめに

0-1整数計画問題を解くために, Glover[3]は, 初めて代理制約法を提案した. 代理制約法[4]は, 複数の制約を持つ原問題を解く代わりに, 原問題を代替する制約条件が1つの問題を解く方法である. この方法では, 代理ギャップがしばしば発生するため, 原問題の厳密な最適解に到達することができず, 問題を解くことが非常に困難である場合が多い. この代理ギャップを解消し, 多次元非線形ナップザック問題を解くために, 仲川[8]は改良代理制約(ISC)法を提案した. ISC法は, 代理ギャップを閉じるために, 原問題の最適解を含む領域を定め, その領域内の解を列挙する方法である. 仲川[9]は, ISC法を用いて, 3制約1000変数, 各変数の代替案数が20個の問題と8制約500変数, 各変数の代替案数が50個の問題を解いた. 本論文では, 我々は, 2つのポートフォリオ最適化問題, 即ち, 取引コストを考慮したマーコヴィッツ平均分散問題とインデックス+αファンド問題にISC法に基づく対話型手法を適用する. 一般にポートフォリオ問題は, 目的関数が線形で, かつ, 株数が100以下でなければ, 厳密に解くことは非常に難しいと言われている混合整数計画問題である[2]. 現実規模の問題として, 例えば, 日経平均の銘柄である225の株式の中から50株を選択することを考えるならば, 3.68×10^{50}もの組み合わせが考えられるので, 厳密解を求めることはもちろん, 品質の良い近似解を求めることでさえ困難である.

インデックスファンド問題におけるリスクの基準は, マーコヴィッツ平均分散モデルが提案されて以降, 標準偏差が使用されている. 今野と山崎[7]は, この問題を簡単にするために, 2次の標準偏差の変わりに線形関数である絶対偏差をリスク基準として使用した. 田畑と武田[10]は, この問題を株数の最小化とポートフォリオとインデックスファンドの乖離を示すトラッキングエラーの最小化という2つの目的関数を持つ0-1の2次計画問題として定式化し, その局所解を求めるアルゴリズムを提案し

た．この問題を解く方法として，タブー探索法，アニーリング法，遺伝的アルゴリズムのようなヒューリスティックな手法[1]を用いることが考えられる．Gaivoronskiら[2]はまず，制約なしでポートフォリオ問題を解き，重要な株に絞った上で再度ポートフォリオ問題を解くという2段階の手法を用いている．

我々が提案する手法はISC法に基づく対話型の最適化手法であり，変数が離散値をとる2次計画問題の最適解を求める方法である．変数分離型の信頼性最適化問題[5]の研究において，変数分離可能ではない関数を一次近似することにより変数分離型関数に変換する方法が提案された．この方法をインデックスファンド問題に適用したのが文献[6]である．本論文では，非線形取引コストを考慮したマーコウヴィッツ平均分散問題を分散最小化モデルとして定式化し，提案する手法を用いることにより，この問題に高品質な解を与えることができることを示す．また，インデックスファンド問題の拡張問題としてインデックス+αファンド問題を提唱し，この問題についても高品質な解を得ることができた．ここで，インデックス＋α問題とは，インデックスを正の定数αだけ上回る指標を想定し，それに連動するようなポートフォリオを銘柄数を指定して作成する問題である．

2. 非線形最適化問題とキューブウォーク

次のようなm個の制約条件を持つn次元の変数非分離型計画問題を考える．

$$\text{P:maximize}\quad f(\xi)=r(\xi)+\sum_{i=1}^{n} f_i(\xi_i),$$

$$\text{subject to}\quad g(\xi)=\sum_{i=1}^{n} g_{ji}(\xi_i)\le b_j\,(j\in M),$$

$$\xi_i^L\le \xi_i\le \xi_i^U\,(i\in N),$$

ここで，解空間$\{\xi \mid \xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\}$は離散である．また，$M\equiv\{1,2,\cdots m\}, N\equiv\{1,2,\cdots n\}$で，$r(\xi)$は，微分可能な変数非分離型の関数であり，$f_i(\xi_i), g_{ji}(\xi_i)\,(i\in N, j\in M)$は，微分可能とは限らないとする．

ISC法は，変数分離型問題を解く方法であるので，そのままでは，この方法を変数非分離型問題に適用することはできない．そこで，繰返しアルゴリズムの各ステップにおいて，そのときの暫定解の近傍に一辺の長さがρである多次元立方体(ハイパーキューブ)状の領域を考え，そこで，局所的な変数分離型問題を考える．このハイパーキューブの具体的な作り方は，ℓ番目のステップにおけるピボットの値$\xi^{(\ell)}(\ell=0,1,2,\ldots)$を中心として，そこから$n$次元の各軸に沿って0.5$\rho$だけ離れたところまでの領域を考える．即ち，このハイパーキューブ領域内の点$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$は，$\left|\xi_i-\xi_i^{(\ell)}\right|\le 0.5\rho$ $(i=1,2,\cdots,n)$を満たしている．この一辺の長さρをキューブサイズと呼ぶ．次に，このハイパーキューブを軸毎にt個のセグメントに分割する．つまり，t^n個の小ハイパーキューブに分割される．その時の格子点$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$は，

$\xi_i = \xi_i^{(\ell)}(x_i, \rho, t) = \xi_i^{(\ell)} - 0.5\rho + \rho(x_i - 1)/t, x_i \in \{1, 2, \cdots, t+1\}, i = 1, 2, \cdots, n$

と書ける．ここで，i 軸における格子点とのずれを $\Delta\xi(x_i, \rho, t) = \rho(x_i - 1)/t - 0.5\rho$ とおいておこう．つまり，$\xi_i = \xi_i^{(\ell)} + \Delta\xi(x_i, \rho, t)$ と書ける．このハイパーキューブ上で次の変数分離型の問題を考える．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(\xi^{(\ell)},\ \rho,\ t): \text{maximize}\quad & k^{(\ell)}(\xi) = \sum_{i=1}^{n} k_i^{(\ell)}(\xi_i) \\
& = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \partial r\left(\xi^{(\ell)}\right)/\partial\xi_i \cdot \Delta\xi\left(x_i, \rho, t\right) + f_i\left(\xi_i^{(\ell)} + \Delta\xi\left(x_i, \rho, t\right)\right) \right\}, \\
\text{subject to}\quad & g_j^{(\ell)}(\xi) = \sum_{i=1}^{n} g_{ji}\left(\xi_i^{(\ell)} + \Delta\xi\left(x_i, \rho, t\right)\right) \le b_j \quad (j \in M), \\
& \xi_i^L \le \xi_i^{(\ell)} + \Delta\xi(x_i, \rho, t) \le \xi_i^U \quad (i \in N), \\
& x_i \in \{1, 2, \ldots, t+1\} \quad (i \in N),
\end{aligned}
$$

この問題 $\mathrm{P}(\xi^{(\ell)}, \rho, t)$ は，主問題の中の変数非分離型関数 $r(\xi)$ の代わりに変数分離型関数 $\sum_{i=1}^{n} \partial r(\xi^{(\ell)})/\partial\xi_i \cdot \Delta\xi(x_i, \rho, t)$ を用いており，非線形ナップサック問題である．この問題は，ハイパーキューブ内のすべての格子点の中から制約条件を満たし目的関数値が最大となる格子点を一つ見つける問題であり，ISC法で厳密かつ高速に解くことが可能である．そのハイパーキューブ内での最も良い解（暫定解）が得られれば，キューブの中心を新たな暫定解に移動しキューブサイズ ρ および分割数 t を変化させて新たなキューブを作成し，よりよい解が暫定解の近傍にないか探索する．この対話的解法をキューブウォークと呼び，そのアルゴリズムを以下に示す．

[Step1] 主問題 P，初期解 $\xi(0)$，分割数 t，許容誤差を入力する；Step2 : Set $\ell \leftarrow 0$;

[Step3] Set $\ell \leftarrow \ell + 1$;

[Step4] キューブサイズ ρ と分割数 t を決める；

[Step5] 代替問題 $\mathrm{P}\left(\xi^{\ell-1}, \rho, t\right)$ を $\xi^{(\ell-1)}$ を中心としたハイパーキューブ内でISC法を用いて $x^{(\ell)}$ を得る；

[Step6] Set $\xi_i^{(\ell)} \leftarrow \xi_i^{(\ell-1)} + \Delta\xi\left(x_i^{(\ell)}, \rho, t\right)\ (i = 1, 2, \cdots, n)$;

[Step7] ρ が充分小さくかつ $\left|k\left(\xi^{(\ell)}\right) - k\left(\xi^{(\ell-1)}\right)\right| \le \varepsilon$ ならば[Step3]へ戻る．

そうでなければ[Step 8]へ進む；

[Step8] $\xi(\ell)$ を出力する；

図 1 はキューブウォークのイメージを図解したものである.

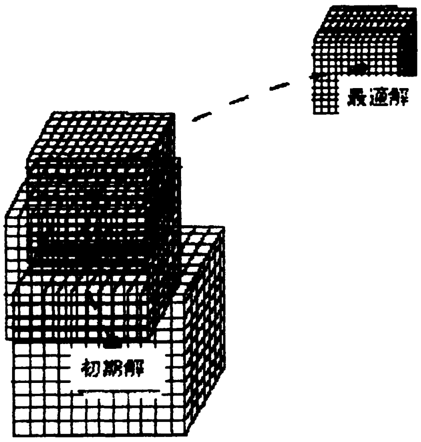

図 1 キューブウォークの視覚的イメージ

3. マーコヴィッツ平均分散モデル

本論文では, 変数非分離型計画問題の例として2種類のポートフォリオ最適化問題を考え, そこで, キューブウォークの有効性を論じる. まずここでは, 取引コストを考慮したマーコヴィッツ平均分散モデルを扱う. n 種類の株 $i \in \{1,2,\cdots,n\}$ を考える. 株 i の収益率を R_i とおき, 株 i の重みを ξ_i とする $\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i = 1\right)$. 総投資額 C に対する収益率の平均 r と標準偏差 σ は次式で与えられる.

$$r = E\left[\sum_{i=1}^{n} R_i \xi_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[R_i]\xi_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \xi_i,$$

$$\sigma = \sqrt{E\left[\left\{\sum_{i=1}^{n} R_i \xi_i - E\left[\sum_{i=1}^{n} R_i \xi_i\right]\right\}^2\right]} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} \sigma_{is}\xi_i\xi_s},$$

ここで, $E[\bullet]$ は変数 $\bullet$ の平均値を表し, μ_i は株 i の平均収益率 $E[R_i]$ を表す. また, σ_{is} は, 株 i と株 s の共分散 $E[(R_i - \mu_i)(R_s - \mu_s)]$ を表す. 取引コストを考慮したマーコヴィッツ平均分散モデルは次式で表される.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P^A}:\text{minimize} \quad & \sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} \sigma_{is}\xi_i\xi_s, \\
\text{subject to} \quad & \sum_{i=1}^{n} \xi_i = 1, \\
& \sum_{i=1}^{n} \left(\mu_i C\xi_i - h_i(C\xi_i)\right) \geq \theta C, \\
& 0 \leq \xi_i \leq 1 \; (i = 1,2,\cdots,n),
\end{aligned}$$

ここで, θ は最小収益率, $h_i(C\xi_i)$ は総投資額C に対する取引コストである. ISC法では等号制約を

表 1　取引コスト

約定金額(百万円)	取引手数料(百万円)
～0.5	1.40%
0.5～0.7	1.10%+0.0015
0.7～1	0.90%+0.0029
1　～3	0.85%+0.0034
3　～5	0.80%+0.0049
5　～10	0.68%+0.0109
10～30	0.55%+0.0239
30～50	0.25%+0.1139
50～	0.10%+0.1889

扱うことができないので，上記のマーコヴィッツ平均分散問題の等号制約条件式を次の2つの不等号制約式

$1)\sum_{i=1}^{n}\xi_i \le 1 \quad 2)\sum_{i=1}^{n}\xi_i \ge 1$

に置き換えISC法を適用する．具体的には，キューブウォークのアルゴリズム[Step5]において，この2つの不等号制約を切替えながらISC法を用いる．問題P^Aの例題として，ある9銘柄の株を指定した2つの例題を取り上げる．ここで，使用した取引コストは，日本の証券会社で使用されているものであり，表 1に示す．

表 2　例題の解

		例題 1 (取引コスト無)	例題 2 (取引コスト有)
株式の購入割合	銘柄1	0.0076784	0.0120479
	銘柄2	0.0928792	0.0404247
	銘柄3	0.0303041	0.0
	銘柄4	0.0	0.0
	銘柄5	0.987194	0.1174520
	銘柄6	0.0	0.0
	銘柄7	0.0049800	0.0
	銘柄8	0.0	0.0
	銘柄9	0.7654389	0.830075
分散		7.9874792E-04	8.1124813E-04
収益率		0.0053129	0.0012000
収益(百万円)		0.5312870	0.1200000
取引手数料(百万円)		0.0	0.4112870

例題1：取引コスト$h_i(y)=0$（単位：100万円）の場合

$\theta=0.005312870$とおく．この値は，例題2のθの値0.0012に0.004112870を足したものであるが，これは問題2を解いて得られた時の取引コストである．例題1と例題2を同じレベルで比較するためにθの値にあらかじめ取引コスト分を上乗せしている．

例題2：取引コスト$h_i(y)>0$（単位：100万円）の場合

$\theta=0.0012, C=100$とおく．例題1と例題2の解を表 2に示す．例題2において，例題2の解における収益は，0.12，取引コストが0.411287である．例題2の解では，取引コストを考慮しているため，扱う株が4銘柄に減っている．例題2の解における収益と取引コストを足すと0.531287となり，例題1の解における収益と一致する．

4. インデックス+αファンド問題

ここでは，もう一つのポートフォリオ最適化問題としてインデックス＋αファンド問題を取り上げる．インデックス＋αファンド問題とは，銘柄数を指定して，例えば，日経225などのインデックスをある正の定数αだけ上回る架空のインデックスを想定し，それに連動するようなポートフォリオを見つけ出す問題である．ここで日経225のようなインデックスの収益率に定数αを足したものをR_0とし，Rをポートフォリオ$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$の収益率とする．すなわち，各$R_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$を銘柄iに対する収益率とおくと，$R=\sum_{i=0}^{n} R_i\xi_i$ である．また，μ_iは株iの平均収益率$E[R_i]$を表しσ_{is}は，株iと株sの共分散$E[(R_i-\mu_i)(R_s-\mu_s)]$を表す．このとき，インデックス+αファンド問題$\mathrm{P^B}$は次式のように定式化される．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P^B}\text{:minimize } S(\xi) &= E\left[(R_0-R)^2\right] \\
&= \mu_0^2+\sigma_{00}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}(\mu_i\mu_s+\sigma_{is})\xi_i\xi_s-2\sum_{i=1}^{n}(\mu_0\mu_i+\sigma_{0i})\xi_i, \\
\text{subject to } \sum_{i=1}^{n}\xi_i &= 1, \\
\sum_{i=1}^{n} z_i(\xi_i) &= q, \\
\xi_i \ge 0\ (i &= 1,2,\cdots,n),
\end{aligned}
$$

ここで，インデックス+αに対する銘柄番号を0とし，

$$\mu_0=E[R_0],\sigma_{0s}=E\left[(R_0-\mu_0)(R_s-\mu_s)\right](s=0,1,\cdots,n)$$

とおいた．また，銘柄iの株の選択の有無を表す関数を，

$$z_i(\xi_i)=\begin{cases}0(\xi_i=0)\\1(\xi_i\ge 0)\end{cases}$$

とし，選択する株の銘柄数をqとおいた．上記のインデックスファンド問題は2つの制約条件式を持つので，前節と同様に，それらを4つの不等号制約条件式に置き換えることによりISC法を適用する．

$$1)\sum_{i=1}^{n}\xi_i\le 1,\sum_{i=1}^{n}z(\xi_i)\le q \quad 2)\sum_{i=1}^{n}\xi_i\ge 1,\sum_{i=1}^{n}z(\xi_i)\le q$$

$$3)\sum_{i=1}^{n}\xi_i\le 1,\sum_{i=1}^{n}z(\xi_i)\ge q \quad 4)\sum_{i=1}^{n}\xi_i\ge 1,\sum_{i=1}^{n}z(\xi_i)\ge q$$

このとき，αの値をどのように設定するかが問題である．通常は0から少しずつ増加させ，それ以上増加させると連動するような解が得られない状態になるまで繰り返し問題を解くという方法が考えられる．しかし，この方法は，効率的ではない．そこで，この問題の目的関数が，

$$S(\xi)=V[R_0-R]+(E[R_0]-E[R])^2$$

と，書き換えられることに注目し，その第一項の分散$V[R_0-R]$だけを最小にするようなポートフォリ

オを求める．すると，もちろん第二項は無視して解くわけであるから，平均は異なるが分散だけがインデックスと連動するようなポートフォリオが得られる．このとき，平均がインデックスより上回るものがあれば，その差がαの最小値の目安となる．また，平均がインデックスより上回るものがない場合は，そのポートフォリオを構成している銘柄のうち，常にインデックスを下回っているようないくつかの銘柄を強制的に解からはずすことにより，平均がインデックスを上回るようなポートフォリオを得ることができる可能性がある．

図 2は，日経225の36ヶ月間の月次収益率と，それを上回り，かつ，連動するようにキューブウォークで得られた二つのポートフォリオの結果を示している．図 2の中のポートフォリオ1は，αの値を

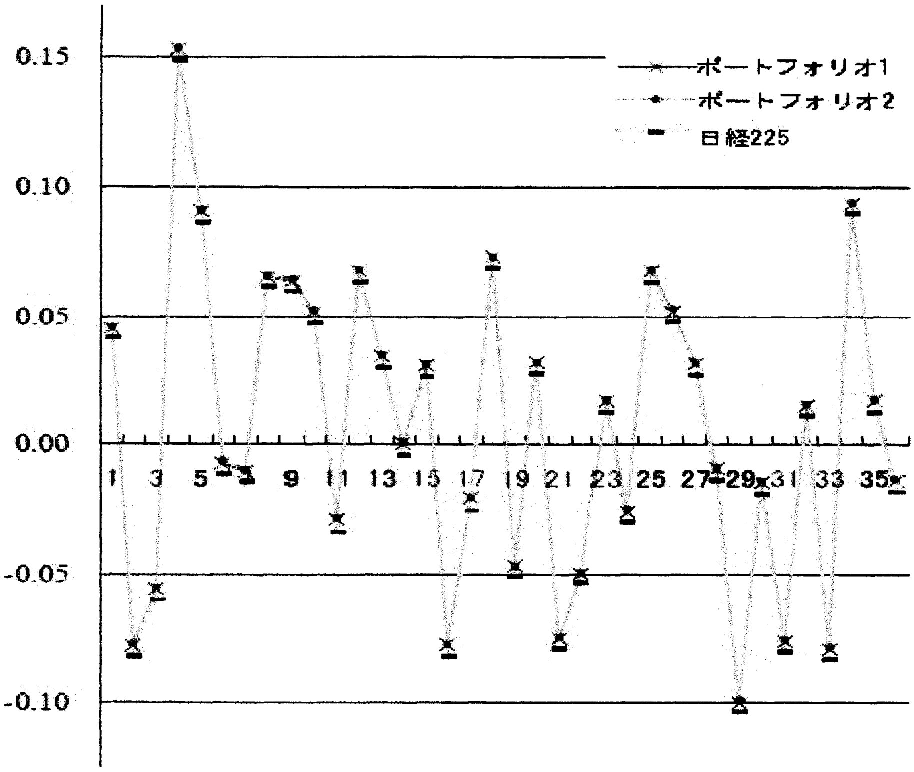

図 2　日経 225 の月次収益率の変化とそのインデックス+αファンドのポートフォリオ

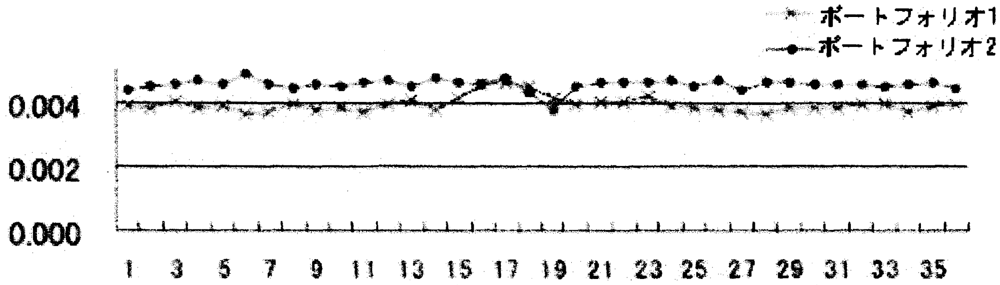

図 3　日経 225 の月次収益率の変化とそのインデックス+αファンドのポートフォリオの差

0.004に指定して求めたインデックス+αファンドの解であり，ポートフォリオ2は，分散のみを最小化して求めたインデックス+αファンドの解である．このケースでは，分散のみを最小化するだけでインデックスを大きく上回るような解（ポートフォリオ2）が得られた．これらの結果とインデックスとの差をグラフにしたものが図 3である．これを見ると，どの時点においても，非常に安定した形で日経225を上回るポートフォリオが求められていることがわかる．実際，このとき得られた目的関数値$S(\xi)$の値は，ポートフォリオ1の場合は0.57×10^{-9}，ポートフォリオ2の場合は0.32×10^{-9}と，ほぼ完璧に日経225+αと連動しており，すなわち，日経225よりも平均それぞれ0.004，0.0045程度上回る月次収益率が得られている．

5. むすび

この論文では，二つのタイプのポートフォリオ最適化問題を対話型改良代理制約法を用いて解いた．一つ目の取引コストを考慮したマーコヴィッツ平均分散問題は，従来の方法では解くことが非常に難しいと考えられていたが，我々が提案した手法を用いることで，このタイプの問題を効果的に解くことができることを示した．もう一つのインデックス+αファンド問題においても我々の手法の有効性を示すことができた．しかし，今回はキューブサイズを経験的に決定したが，将来の課題として，システマティックにキューブサイズを決定する手法の開発が残されている．

参考文献

[1] J. E. Beasley, N. Meade, T.-J. Chang: An evolutionary heuristic for the index tracking problem. European Journal of Operational Research, 148 (2003), 621-643.

[2] A. A. Gaivoronski, S. Krylov, N. van der Wijst: Optimal portfolio selection and dynamic benchmark tracking. European Journal of Operational Research, 163 (2005), 115-131.

[3] F. Glover: A Multiphase-Dual algorithm for the Zero-One Integer Programming Problem. Operations Research, 13 (1965), 879-919.

[4] F. Glover: Surrogate constraints. Operations Research, 16 (1968), 741-749.

[5] M. Hikita, Y. Nakagawa, K. Nakashima, H. Narihisa: Reliability optimization of systems by a surrogate-constraints algorithm. IEEE Transactions on Reliability, R-41 (1992), 473-480.

[6] 甲斐良隆, 仲川勇二, 田畑吉雄：改良代理制約法の非分離形非凸計画問題への応用. 電子情報通信学会論文誌, J88-A (2005), 422-424.

[7] H. Konno, H. Yamazaki: Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its application to Tokyo stock market. Management Science, 37 (1991), 519-531.

[8] Y. Nakagawa: A reinforced surrogate constraints method for separable nonlinear integer programming. RIMS, Kyoto University, 1068 (1998), 194-202.

[9] Y. Nakagawa: An improved surrogate constraints method for separable nonlinear integer programming. Journal of Operations Research Society of Japan, 46 (2003), 145-163.

[10] Y. Tabata, E. Takeda: Bicriteria optimization problem of designing an index fund. Journal of the Operations Research Society, 46 (1995), 1023-1032.