

位相型近似による Markov Regenerative Stochastic Petri Net の解析

広島大学大学院工学研究科 藤本 隆太郎, 岡村 寛之, 土肥 正
Graduate School of Engineering
Hiroshima University

1 はじめに

PN (Petri Net) とはプレースとトランジションと呼ばれる 2 種類のノードを持つ有向二部グラフとして表現され、離散事象を効率よくモデル化するためのツールとして、分散処理システムや生産システムのモデリング言語として用いられる。

PN はトランジションの発火タイミングによって分類される。一般に、トランジションの発火が指数分布に従う確率的遅延を伴うものを SPN (Stochastic PN) と呼び、連続時間マルコフ連鎖 (CTMC) への変換が容易であることから不確定要素を伴うシステムのモデリングおよび解析に利用されている。他方、より現実に近いモデル化の要請から、指数分布以外の発火遅延が必要となることが多い。SPN に対して、瞬時トランジションを部分的に許容するものを GSPN (Generalized SPN) と呼び、定数時間による発火遅延を伴う SPN を DSPN (Deterministic SPN) と呼ぶ。このようなペトリネットはいくつも考案されているが、中でも、すべての状態 (マーキング) において高々一つの一般発火 (発火遅延が一般分布で記述される) しかもたない SPN を MRSPN (Markov Regenerative SPN) と呼び、解析的な取り扱いが可能な SPN の中で最も広いクラスとして知られている [1]。表 1 は、PN の種類とその PN の発火遅延のタイプ、および PN の解析方法をまとめたものである。

MRSPN で表現されたシステムの解析は、定常解析と過渡解析に分類される。SPN が CTMC で記述されるのと同様に、MRSPN は MRGP (Markov ReGenerative Process) によって記述される。そのため、MRSPN の定常解析は隠れマルコフ解析に帰着されることが多く、隠れマルコフ法によって統一的に取り扱うことができる。過渡解析に対しても幾つかの手法が考案されており、代表的な例として補助変数法と位相型近似が挙げられる。文献 [2] では MRSPN に対して補助変数法を用いた数値解法を提案している。MRSPN は一般発火を取り扱うため、発火規則が重要な要点となるが、prd (preemptive repeat different), prs (preemptive resume), pri (preemptive repeat identical) と呼ばれる 3 種類の発火規則に分類され、各々補助変数法および対応する数値解法が文献 [2, 3] で議論されている。

一方、位相型近似は古くから知られている離散事象システムの近似手法であるが、一般分布を近似する位相型分布のパラメータ決定法に関して大きな発展が見られなかったこともあり、これまで補助変数法と比較して余り多くの議論がなされていない。しかしながら、近年、文献 [4] で高精度かつ高速な位相型近似アルゴリズムが開発され、解析ツールの開発など応用面における効果が期待されている。

そこで本研究では、位相型近似を用いた MRSPN の過渡解析を行う。特に、従来の過渡解析手法である補助変数法との比較を行い、位相型近似の有用性を調べる。

2 MRSPN (Markov Regenerative Stochastic Petri Nets)

2.1 Petri Net

Petri Net (PN) はプレース (白丸), トランジション (長方形), トークン (黒丸) の 3 項組で構成され、トランジションの発火でプレース内のトークンが移動する。PN では、全プレースに対するトークンの状態 (マーキング) によってシステムの動作を記述する。トランジションの入力に対するプレースにトークンが存在する時、そのトランジションは発火可能といい、トランジションの発火により入力に対するプレース内のトークンが出力に対するプレースに移動する。

また PN は、抑止アーク (先端に丸の付いたアーク) と呼ばれるアークを持つ。抑止アークとは、入力プレースにトークンが存在しない場合に限り、トランジションが発火可能となる性質を持つアークのことである。

2.2 MRSPN

トランジションが発火可能となってから発火するまでの時間を発火遅延といい、その発火遅延が確率変数によって表されるものを確率ペトリネットという。特に発火遅延が指数分布の確率変数に従うものを SPN

表 1: ペトリネットの種類と解析方法.

ペトリネットの種類	発火遅延のタイプ	解析
Timed PN	確定時間	—
SPN	指数分布	マルコフ解析
DSPN	指数分布, 確定時間	MRGP 解析 (確定時間)
ESPN	一般分布	セミマルコフ解析
MRSPN	指数分布, 一般分布	MRGP 解析
一般	全て	モンテカルロシミュレーション

(Stochastic Petri Net) といい, 本質的に連続時間マルコフ連鎖 (CTMC: Continuous Time Markov Chain) と等価であるため, 不確定要素を伴うシステムのモデリングおよび解析に利用されている.

本研究では, SPN の拡張である MRSPN を取り扱う. MRSPN は SPN に次のような性質が付加されたものである.

- (1) 発火遅延が指数分布だけでなく, 一般分布に従うトランジションを持つ
- (2) 一般分布に従うトランジションは, 全てのマーキングにおいて高々1つしか存在しない
- (3) 一般分布に従うトランジションは, 抑止アークなどによって発火が抑制されたときの振る舞いを決める発火規則を持つ

ここで, 発火遅延が指数分布に従うトランジションを指数発火, 一般分布に従うトランジションを一般発火と呼ぶ.

一般発火トランジション g を持つ MRSPN を考える. このとき, MRSPN のマーキングは g が発火可能でないマーキング集合 M_E と g が発火可能なマーキング集合 M_G に分割できる. また, マーキング集合 M_G は, g が発火可能かつ抑止が発生していないマーキング集合 $M_{G'}$ と, g が発火可能であるが抑止が働いているマーキング集合 $M_{G''}$ に分割できる.

3 補助変数法

3.1 補助変数法の原理

補助変数法とは, 一般発火が発火可能となってから発火が起こるまでの時間を表す年齢変数 (補助変数) を導入し, 実時間と年齢の 2 次元軸で各マーキングの継続時間を考える. MRSPN において, 各マーキングの継続時間および年齢における各マーキングの継続時間密度は, それぞれ偏微分方程式と常微分方程式で表現することができる. 補助変数法に基づいた数値解析では, 微分方程式を実時間と年齢で離散化して得られる差分スキームに基づいて, 近似解を算出する. そのため, 離散化に対する刻み幅は計算速度および近似精度に大きく影響するという特徴をもつ.

3.2 prs 発火規則を持つ MRSPN の解析

ここでは発火規則 prs の一般発火を持つ MRSPN の補助変数法の解析手法を示す. 無限小生成行列 Q をマーキング集合 $M_E, M_{G'}, M_{G''}$ 間の推移に分割する. 時刻 t での M_E に分類される状態の過渡状態確率を $\pi^E(t)$, $M_{G'}$ と $M_{G''}$ に分類される状態の過渡状態確率を $\pi^{G'}(t)$ 及び $\pi^{G''}(t)$ とする. 一般発火について, 時刻 t で年齢 x のときの発火のしやすさを表す確率密度を $h(t, x)$, $M_{G''}$ で $x=0$ のときの確率密度を $H^{G''}(t)$ とする. また, 一般分布の累積分布関数を $G(t)$ とする.

このとき, 各マーキングでの状態確率と年齢が $x=0$ のとき, マーキング集合 $M_{G'}, M_{G''}$ の境界条件は, 次の偏微分方程式と常微分方程式によって表される.

$$\frac{\partial}{\partial t} h(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} h(t, x) R = h(t, x) Q_G, \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \pi^E(t) = \pi^E Q^E + \int_0^\infty h(t, x) R dG(x) P_{G,E}, \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt}H^{G''}(t) = \pi^E Q^{E,G''} + H^{G''}(t)Q^{G''} + \int_0^\infty h(t,x)RdG(x)P_{G',G''}, \quad (3)$$

$$h^{G'}(t,0) = \pi^E Q^{E,G'} + H^{G''}(t)Q^{G'',G'} + \int_0^\infty h(t,x)RdG(x)P_{G'}, \quad (4)$$

$$\pi^{G'}(t) = \int_0^\infty h^{G'}(t,x)(1-G(x))dx, \quad (5)$$

$$\pi^{G''}(t) = \int_0^\infty h^{G''}(t,x)(1-G(x))dx + H^{G''}(t). \quad (6)$$

離散化に対する刻み幅を d とすると、各状態の過渡状態確率は次の計算を反復することによって求めることができる。

ステップ 1: $h_i(nd,0) = 0$ として、確率密度を計算する ($i \in \mathcal{M}_G, m = 1$).

$$h_i(nd,md) = \sum_{k \in \mathcal{M}_G} h_k((n-1)d, (m-r_k)d)e^{Q_{\sigma^d}}. \quad (7)$$

ここで、 $k \in \mathcal{M}_{G'}$ のとき $r_k = 1$ 、 $k \in \mathcal{M}_{G''}$ のとき $r_k = 0$ である。

ステップ 2: 状態確率 $\pi^E(t)$ を計算する。

$$\pi^E(nd) = \pi^E((n-1)d)e^{Q_{E^d}} + \sum_{j=1}^{j_{max}^G} h^{G'}((n-1)d, (j-1)d)e^{Q_{\sigma^d}} P_{G',E} G_j^G. \quad (8)$$

ステップ 3: 確率密度 $H^{G''}(nd)$ を計算する。

$$\begin{aligned} H^{G''}(nd) &= H^{G''}((n-1)d)e^{Q_{G'',\sigma^d}} + \pi^E((n-1)d)e^{Q_{E,\sigma^d}} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{j_{max}^G} h^{G'}((n-1)d, (j-1)d)e^{Q_{\sigma^d}} P_{G',G''} G_j^G. \end{aligned} \quad (9)$$

ステップ 4: マーキング集合 $\mathcal{M}_{G'}$ に入った瞬間の確率密度 $h^{G'}(nd,0)$ を計算する。

$$\begin{aligned} h^{G'}(nd,0) &= \pi^E((n-1)d)e^{Q_{E,\sigma^d}} + H^{G''}((n-1)d)e^{Q_{G'',\sigma^d}} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{j_{max}^G} h^{G'}((n-1)d, (j-1)d)e^{Q_{\sigma^d}} P_{G',G'} G_j^G. \end{aligned} \quad (10)$$

ステップ 5: 状態確率 $\pi^{G'}(t)$ を計算する。

$$\pi^{G'}(nd) = \sum_{j=0}^{j_{max}^{G'}} h^{G'}(nd, jd)(1-G^G(jd)). \quad (11)$$

ステップ 6: 状態確率 $\pi^{G''}(t)$ を計算する。

$$\pi^{G''}(nd) = H^{G''}(nd) + \sum_{j=1}^{j_{max}^G} h^{G''}(nd, jd)(1-G^G(jd)). \quad (12)$$

ステップ 7: 次の時間 $(n+1)d$ について同様な計算を繰り返す

prd 発火規則の場合は、発火が抑止されると年齢はリセットされるため、 $H^{G''}(t)$ および $\pi^{G''}(t)$ を計算する必要はない。そのため、 $h_i(t,x)$ 、 $\pi^E(t)$ などの計算方法は省略される。

4 MRSPN の位相型近似

4.1 位相型近似の基本原理

MRSPN における位相型近似は、一般発火を支配する一般分布に対して行われる。位相型分布は連続時間マルコフ連鎖 (CTMC) において、吸収状態に到達するまでの時間の確率分布であり、その確率密度は次のように与えられる。

$$f(t) = \alpha \exp(Tt)\xi. \quad (13)$$

ここで、 α は初期確率、 T は無限小生成行列、 $\xi = -Te$ であり、 e はすべての要素が 1 の列ベクトルである。位相型分布は任意の分布を任意の精度で近似することができるが、本質的に冗長な表現を含んでいるため、無限小生成行列 T に何らかの構造を持たせた取り扱いが行われる (例えば [5] を参照)。

一般分布に対して位相型近似を行うことで、一般発火が多状態のマルコフ連鎖によって置き換えられ、MRSPN のマーキングプロセスを CTMC として近似することができる。つまり、MRSPN を SPN で近似することによって、近似的な解析を行うことができる。無限小生成行列 Q を持つ CTMC に対しては、次式で表されるような一様化の手法を用いることで、効率的に時刻 t における過渡状態確率 $\pi(t)$ を求めることができる [4]。

$$\pi(t) = \pi(0) \sum_{\omega=0}^{\infty} e^{-qt} \frac{(qt)^{\omega}}{\omega!} \times \left(I + \frac{Q}{q} \right)^{\omega}. \quad (14)$$

ここで、 I は単位行列であり、 q は Q の対角要素の中で絶対値の最大となる値である。

4.2 位相型近似アルゴリズム

本研究では、位相型近似において必要とされるパラメータ推定方法として、文献 [4] で提案されている最尤推定法に基づいた手法を用いる。最尤推定において、確率分布の距離として KL (Kullback-Leibler) 情報量を用いる。

任意の確率密度関数 $f(t)$ が与えられたとき、 $f(t)$ とある確率密度関数 $g(t)$ 間の KL 情報量は、次のように定義される。

$$\begin{aligned} KL(f, g) &= \int_0^{\infty} f(t) \log \frac{f(t)}{g(t)} dt \\ &= \int_0^{\infty} f(t) \log f(t) dt - \int_0^{\infty} f(t) \log g(t) dt. \end{aligned} \quad (15)$$

KL 情報量の値が小さければ $f(t)$ と $g(t)$ の距離は短くなる。よって、式 (15) の右辺第二項が最大となるとき、 $g(t)$ は $f(t)$ を最もよく近似できているといえる。

この項に対して数値積分を適用することで、次式を得る。

$$\int_0^{\infty} f(t) \log g(t) dt \approx \sum_{i=1}^K \omega_i f(t_i) \log g(t_i). \quad (16)$$

ここで、 ω_i は数値積分に依存した重みである。また式 (16) は、重み付きサンプル $(t_1, \omega_1 f(t_1)), \dots, (t_K, \omega_K f(t_K))$ が観測されたときの位相型分布に対する最尤推定に対応する。数値積分の重み ω_i は二重指数公式 [6] により生成する。この手法は、台形公式やシンプソン公式などと比較して、多くの積分関数に対してより正確な近似解を得ることができる。二重指数公式は次式で表される。

$$\phi(x) = \exp\left(\frac{\pi}{2}(x - e^{-x})\right). \quad (17)$$

式 (17) を用いることで、式 (16) は次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} f(\phi(x)) \log g(\phi(x)) \phi'(x) dx \\ &\approx \sum_{i=K^-}^{K^+} h \phi'(ih) f(\phi(ih)) \log g(\phi(ih)). \end{aligned} \quad (18)$$

ここで、 $\phi'(x)$ は $\phi(x)$ の一次導関数、 h は離散に対する刻み幅であり、 $K^+ (= -K^-)$ は離散区間の上限 (下限) である。積分精度はこの h と K^+ に大きく依存する。

二重指数公式に対して h と K^+ が与えられると、サンプリングポイント t_i および対応する重み ω_i が以下のように生成される。

$$t_{i-K^-+1} = \phi(ih), \quad (19)$$

$$\omega_{i-K^-+1} = h\phi'(ih)f(\phi(ih)), \quad i = K^-, \dots, 0, \dots, K^+. \quad (20)$$

ここで、 $K = K^+ - K^- + 1$ である。

最終的に、位相型分布の最尤推定を得るために、EM algorithm の計算速度に改良を加えた faster EM (FEM) algorithm を適用する。図 1 は、数値積分の重みによる位相型分布生成のための FEM algorithm の EM-step の疑似コードである。図 1 内の $[\cdot]_i$ と $[\cdot]_{i,j}$ は、ベクトルの i 番目の要素と行列の (i, j) の要素を表している。また、 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ は時間区間を、 $q > \max_i |[T]_{i,i}|$ は最小の状態推移率をそれぞれ表しており、 U は次式を満たすような右打ち切り点である。

$$\sum_{k=0}^U e^{-q\Delta t_i} \frac{(q\Delta t_i)^k}{k!} \geq 1 - \epsilon. \quad (21)$$

EM algorithm に基づいた位相型フィッティングは、終了条件を満たすまで EM-step を繰り返すことによつて行われる。

EM-step for PH estimation

1: Global step:

1.1 Forward: Compute $\tilde{\xi}_k$ for $k = 2, \dots, K+1$;

$$\tilde{\xi}_k = e^{T\Delta t_{K-1}} \tilde{\xi}_{K-1}, \tilde{\xi}_1 = \xi.$$

$$\tilde{\pi}_k = \tilde{\pi}_{k-1} e^{T\Delta t_{k-1}}, \tilde{\pi}_1 = \pi.$$

1.2 Backward: Compute $\tilde{\pi}_k$ for $k = K-1, \dots, 1$;

$$\tilde{\pi}_k = \tilde{\pi}_{k+1} e^{T\Delta t_{k+1}} + \pi / (\pi \tilde{\xi}_{k+1})$$

$$\tilde{\pi}_K = \pi / (\pi \tilde{\xi}_{K+1}).$$

2: Local step: For each time interval $\Delta t_k, k = 1, \dots, K$;

2.1 Forward: Compute b_u for $u = 2, \dots, U$;

$$b_u = P b_{u-1}, b_0 = \tilde{\xi}_k$$

2.2 Backward: Compute c_u for $u = U-1, \dots, 0$;

$$c_u = c_{u+1} P + e^{-q\Delta t_k} \frac{(q\Delta t_k)^u}{u!} \tilde{\pi}_k,$$

$$c_U = e^{-q\Delta t_k} \frac{(q\Delta t_k)^{U+1}}{(U+1)!} \tilde{\pi}_k.$$

2.3 Aggregation: Compute $H_k = (1/q) \sum_{u=0}^U b_u c_u$.

3: Aggregation: Compute $H = \sum_{k=1}^K \tilde{\omega}_k H_k$.

4: Update:

$$[T]_{i,j} = [T]_{i,j} [H]_{j,i} / [H]_{i,i}, i \neq j,$$

$$[\pi]_i = [\pi]_i \left(\sum_{u=2}^{K+1} \tilde{\omega}_k [\tilde{\xi}_u]_i / \pi \tilde{\xi}_u \right) / \sum_{u=0}^K \tilde{\omega}_u$$

$$[\xi]_i = [\xi]_i \left(\sum_{u=2}^{K+1} \tilde{\omega}_k [\tilde{\pi}_u]_i / \tilde{\pi}_u \xi \right) / [H]_{i,i}$$

図 1: 位相型分布のための FEM algorithm の EM-step の疑似コード。

4.3 prs 発火規則を持つ MRSPN の位相型近似

一般性を失うことなく、全体で 1 つの prs 発火規則による一般発火トランジション g をもつ MRSPN を考える。このとき、MRSPN の定義から、マーキング集合 $M_E, M_{G'}, M_{G''}$ に分割できる。このとき、MRSPN から g' を取り除いた SPN のマーキング過程は、次の構造化された無限小生成行列を持つ CTMC で表現される。

$$Q = \begin{pmatrix} Q_E & Q_{E,G'} & Q_{E,G''} \\ Q_{G',E} & Q_{G'} & Q_{G',G''} \\ Q_{G'',E} & Q_{G'',G'} & Q_{G''} \end{pmatrix}. \quad (22)$$

ここで、 $Q_E, Q_{G'}$ および $Q_{G''}$ は、マーキング集合 $M_E, M_{G'}$ および $M_{G''}$ 内の指数発火を表す無限小生成行列である。

いま、 g' の発火分布を近似した位相型分布 (α, T, ξ) が与えられたとき、もとの MRSPN のマーキング過程は以下の CTMC で近似的に解析することができる。

$$\tilde{Q} = \tilde{D}_0 + \tilde{D}_1 + \tilde{D}_2, \quad (23)$$

$$\tilde{D}_0 = \begin{pmatrix} O & O & O \\ O & Q_{G'} \oplus T & Q_{G',G''} \otimes I \\ O & Q_{G'',G'} \otimes I & Q_{G''} \otimes I \end{pmatrix}, \quad (24)$$

$$\tilde{D}_1 = \begin{pmatrix} Q_E & Q_{E,G'} \otimes \alpha & Q_{E,G''} \otimes \alpha \\ Q_{G',E} \otimes e & Q_{G''} \otimes e\alpha & Q_{G',G''} \otimes e\alpha \\ Q_{G'',E} \otimes e & Q_{G'',G'} \otimes e\alpha & Q_{G''} \otimes e\alpha \end{pmatrix}, \quad (25)$$

$$\tilde{D}_2 = \begin{pmatrix} O & O & O \\ P_{G',E} \otimes \xi & P_{G',G'} \otimes \xi\alpha & P_{G',G''} \otimes \xi\alpha \\ O & O & O \end{pmatrix}. \quad (26)$$

ここで、 \otimes と \oplus はそれぞれクロネッカー積およびクロネッカー和である。また、 P_{\cdot} は一般発火による状態推移を表す確率行列であり、 I は単位行列である。

マーキング集合 $M_{G'}, M_{G''}$ 内の指数発火による無限小生成行列 Q_{\cdot} は、一般発火の年齢をリセットしない指数発火による無限小生成行列 Q'_{\cdot} と、一般発火の年齢をリセットする指数発火による無限小生成行列 Q''_{\cdot} に分類される。

g が prd 発火規則による一般発火トランジションの場合、 g が発火可能であるが抑止が働いているマーキング集合 $M_{G''}$ は存在しないので、この集合を省略した CTMC を用いて近似的に過渡解析を行うことができる。

5 位相型近似を用いた手法と補助変数法の比較

5.1 prd 発火規則と prs 発火規則を持つ MRSPN

図 2 の MRSPN とマーキングプロセスを考える。ネット内の p_1, p_2, p_3, p_4 はプレース、 t_1, t_2, t_3, t_4 はトランジションを表す。トランジション t_1, t_2 は指数発火、 t_3, t_4 は一般発火である。また、 t_3 の発火規則は prd、 t_4 の発火規則は prs である。

この MRSPN に対して、一般発火の種類を変化させた場合 (Case 1~3) について、補助変数法と位相近似を比較する。モデルパラメータは以下のように仮定した。

- t_1 の発火率 $\lambda_1 = 0.5$ 、 t_2 の発火率 $\lambda_2 = 1.0$ 。
- 一般発火に形状パラメータ $\eta = 5$ および尺度パラメータ $\xi = 1$ のワイブル分布を仮定 (Case 1)。
- 一般発火に区間 $(0.5, 1.5)$ の一様分布を仮定 (Case 2)。
- 一般発火に形状パラメータ $\eta = 0.5$ および尺度パラメータ $\xi = 1$ のワイブル分布を仮定 (Case 3)。

また、初期マーキングとしてプレース p_2, p_3 にトークンが 1 個ずつ入っているものとする。

補助変数法では刻み幅を $d = 0.1, 0.01, 0.001$ と変化させ解析を行う。位相型近似では状態数を $m = 10, 50, 100$ とした。

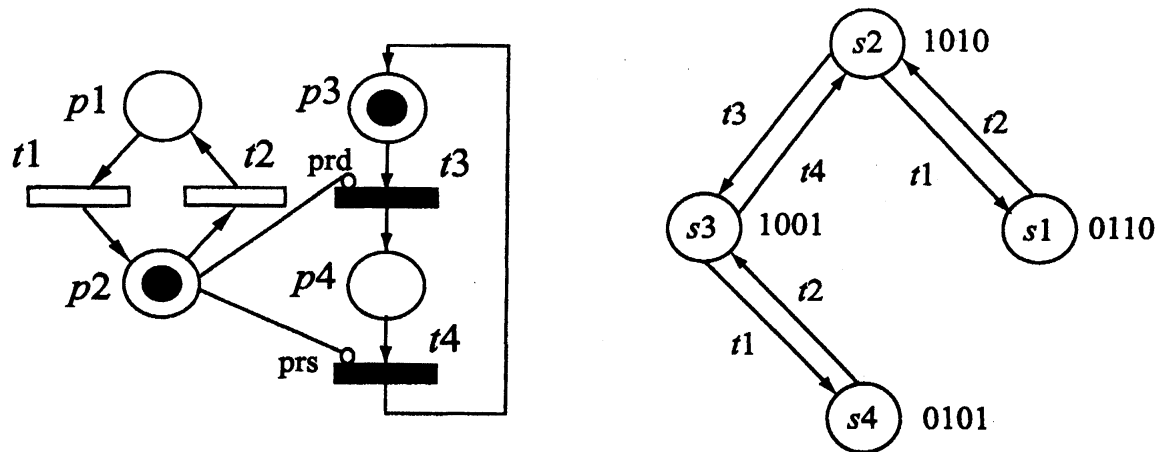


図 2: prd と prs 発火規則を持つ MRSPN

Case 1~3 について、図 2 の状態 s_1 の過渡解析の結果 (状態確率) と各手法の計算時間を図 3, 図 4, 図 5 に示す。図 3, 図 4 の左図から、刻み幅 $d = 0.001$ の場合の補助変数法と、状態数 $m = 50, 100$ の場合の位相型近似がほぼ同じ近似精度を達成していることがわかる。しかし図 5 左図では、状態数 $m = 10, 50, 100$ の場合の位相型近似すべてにおいてほぼ同じ近似精度が達成できているが、補助変数法は刻み幅が $d = 0.001$ であっても十分な解析が行えているとはいえず、より小さい刻み幅で解析を行う必要がある。

また、ほぼ同じ結果が得られた上述の手法による計算時間をそれぞれの図において比較してみると、図 3, 図 4 の表では状態数 $m = 50$ の位相型近似が、図 5 の表では状態数 $m = 10$ の位相型近似が最も速く、計算速度の点で位相型近似を用いた方法の方が有効であることがわかる。

6 まとめと今後の課題

本研究では、位相型近似を用いた汎用的な MRSPN 解析手法の提案を行った。従来の汎用的な MRSPN 解析手法である補助変数法は、原理的に微分方程式を解く手法であるため、数値解法における時間の刻み幅の大きさによって解析の精度や計算時間が異なる。位相型近似を用いた手法では、計算時間は近似に用いる状態数に依存する。

よって本研究では、数値例により位相型近似を用いた手法と補助変数法との比較を行うことによって、いくつかの状況においては、計算速度の点で補助変数法よりも位相型近似を用いた手法のほうが有利であることを示した。今後の課題としては、多変量位相型分布を用いた汎用的な MRSPN 解析手法の開発などがあげられる。

参考文献

- [1] H. Choi, V. G. Kulkarni, and K. S. Trivedi. Markov regenerative stochastic Petri nets. *Performance Evaluation*, 20:337–357, 1994.
- [2] M. Telek and A. Horváth. Transient analysis of Age-MRSPNs by the method of supplementary variables. *Performance Evaluation*, 45:205–221, 2001.
- [3] A. Horváth and M. Telek. Time domain analysis of non-markovian stochastic petri nets with pri transitions. *IEEE TRANSACTIONS ON SOFTWARE ENGINEERING*, 28(10):933–943, 2002.
- [4] H. Okamura, T. Dohi, and K. S. Trivedi. Refinement of an EM algorithm for large-scale PH distributions. in submission.
- [5] A. Thümmler, P. Buchholz, and M. Telek. A novel approach for phase-type fitting with the EM algorithm. *IEEE Transactions on Dependable and Secure Computing*, 3(3):245–258, 2006.
- [6] H. Takahashi and M. Mori. Double exponential formulas for numerical integration. *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, 9:721–741, 1974.

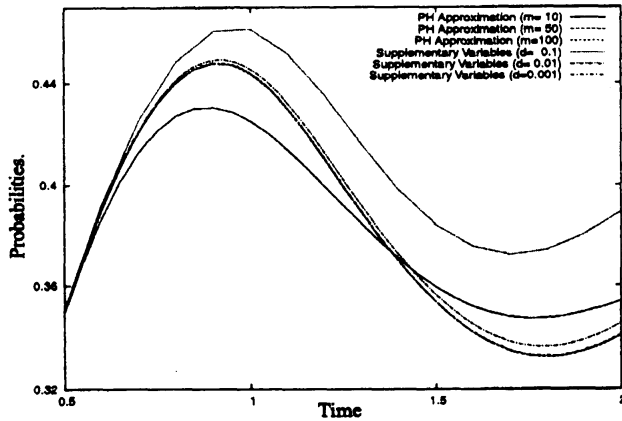


図 3: 解析結果と計算時間の比較 (Case 1).

解析手法	計算時間
位相近似 ($m = 10$)	0.715 秒
位相近似 ($m = 50$)	7.518 秒
位相近似 ($m = 100$)	103.393 秒
補助変数法 ($d = 0.1$)	0.022 秒
補助変数法 ($d = 0.01$)	1.471 秒
補助変数法 ($d = 0.001$)	144.526 秒

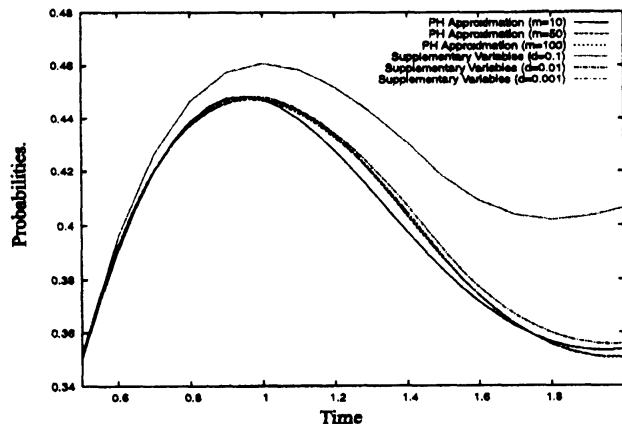


図 4: 解析結果と計算時間の比較 (Case 2).

解析手法	計算時間
位相近似 ($m = 10$)	0.576 秒
位相近似 ($m = 50$)	6.488 秒
位相近似 ($m = 100$)	66.224 秒
補助変数法 ($d = 0.1$)	0.009 秒
補助変数法 ($d = 0.01$)	0.206 秒
補助変数法 ($d = 0.001$)	18.715 秒

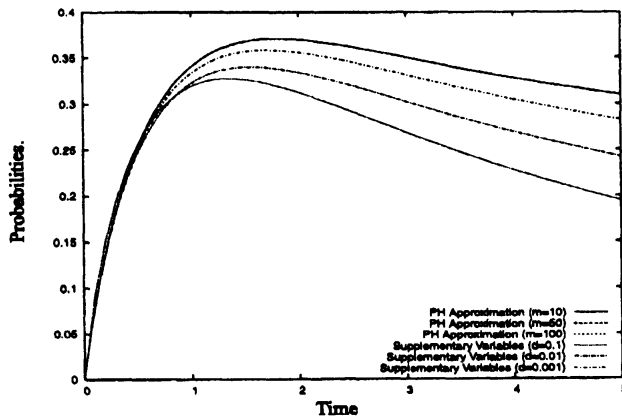


図 5: 解析結果と計算時間の比較 (Case 3).

解析手法	計算時間
位相近似 ($m = 10$)	160.151 秒
位相近似 ($m = 50$)	888.190 秒
位相近似 ($m = 100$)	1448.610 秒
補助変数法 ($d = 0.1$)	0.021 秒
補助変数法 ($d = 0.01$)	1.390 秒
補助変数法 ($d = 0.001$)	136.866 秒