数理解析研究所講究録
第 1637 巻 2009 年 164-175

2 階半線形楕円型方程式系の正値全域解

尾道大学・経済情報学部　寺本 智光 (Tomomitsu Teramoto)
Faculty of Economics, Management & Information Science,
Onomichi University

1. 序

次の 2 階楕円型方程式系の正値全域解の存在・非存在について考える:

$$\text{(1.1)} \qquad \begin{cases} \Delta u = p(|x|)v^{\alpha}, \\ -\Delta v = q(|x|)u^{\beta}, \end{cases} \quad x \in \boldsymbol{R}^N,$$

ここで $N \geq 3, \alpha > 0, \beta > 0,$ は定数で $\alpha\beta > 1$ を満たすとする. $p(r) > 0,\ q(r) > 0, r = |x|$ は $[0, \infty)$ で連続とする.

(u, v) が (1.1) の全域解であるとは $u, v \in C^2(\boldsymbol{R}^N)$, (u, v) は $\boldsymbol{R}^N$ で (1.1) を満たすときをいう. また解としては, 球対称なものを考える.

2 階楕円型方程式系

$$\text{(1.2)} \qquad \begin{cases} \Delta u = p(|x|)v^{\alpha}, \\ \Delta v = q(|x|)u^{\beta}, \end{cases} \quad \begin{cases} -\Delta u = p(|x|)v^{\alpha}, \\ -\Delta v = q(|x|)u^{\beta}, \end{cases} \quad x \in \boldsymbol{R}^N$$

の正値全域解の存在・非存在については多数の研究結果がある (文献 [4, 5] 参照) が, (1.1) のタイプの方程式系の研究はほとんどない (文献 [1, 2, 3] 参照). 本研究の目的は (1.1) の正値全域解の存在するための条件又は存在しないための条件等を求めることである.

2. 主結果

(1.1) の正値全域解の存在について次の結果を得た：

Theorem 1 p, q が

$$\int^{\infty} sp(s)ds < \infty, \quad \int^{\infty} sq(s)ds < \infty$$

を満たすとする. このとき (1.1) の球対称な正値全域解が存在する.

Remark Theorem 1 は (1.2) のタイプの方程式系でも成立する.

Theorem 2 p, q が

$$p(r) \leq \frac{C_1}{r^{\lambda}}, \quad q(r) \leq \frac{C_2}{r^{\mu}}, \quad r \geq r_0 > 0$$

を満たすとする, ここで

$$\lambda - 2 + \alpha(\mu - 2) > 0, \quad \frac{\mu - 2 + \beta(\lambda - 2)}{\alpha\beta - 1} + N - 2 > 0, \quad \mu > 2.$$

このとき (1.1) の球対称な正値全域解が存在する.

(1.1) の正値全域解の非存在について次の結果を得た：

Theorem 3 p, q が

$$p(r) \geq \frac{C_1}{r^\lambda}, \quad q(r) \geq \frac{C_2}{r^\mu}, \quad r \geq r_0 > 0$$

を満たすとする, ここで

$$\lambda - 2 + \alpha(\mu - 2) \leq 0 \quad \text{または} \quad \frac{\mu - 2 + \beta(\lambda - 2)}{\alpha\beta - 1} + N - 2 \leq 0.$$

このとき (1.1) の球対称な正値全域解は存在しない.

Example 次の楕円型方程式系を考える：

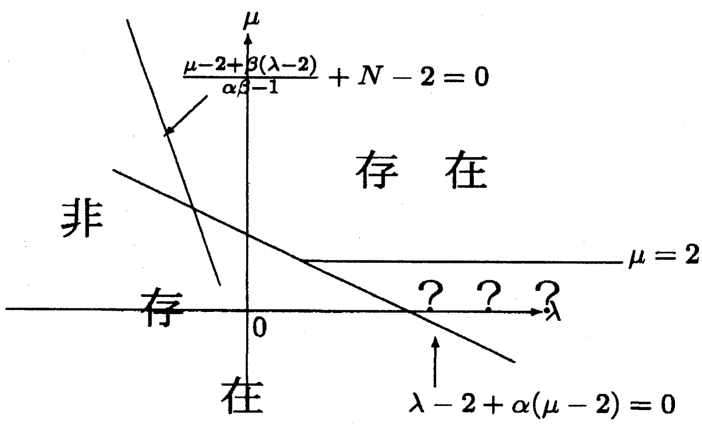
$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{1}{(1+|x|)^\lambda} v^\alpha, \\ -\Delta v = \dfrac{1}{(1+|x|)^\mu} u^\beta, \end{cases} \quad x \in \mathbf{R}^N,$$

ここで $N \geq 3, \alpha > 0, \beta > 0, \lambda, \mu$ は定数で $\alpha\beta > 1$ とする.

$|x| \geq 1$ で

$$\frac{C_1}{|x|^\lambda} \leq \frac{1}{(1+|x|)^\lambda} \leq \frac{C_2}{|x|^\lambda}, \quad \frac{C_3}{|x|^\mu} \leq \frac{1}{(1+|x|)^\mu} \leq \frac{C_4}{|x|^\mu}$$

を満たすことがわかる, ここで $C_i > 0, i = 1, \cdots, 4$ は定数. Theorem 2,3 からこの方程式系の正値全域解の存在, 非存在について以下のような図を得る：



Remark $\lambda - 2 + \alpha(\mu - 2) > 0$, $\mu \leq 2$ については不明である.

3. 証明の概略

球対称解を考えるので, 次の常微分方程式系を考える

$$\begin{cases} r^{1-N}(r^{N-1}u'(r))' = p(r)v(r)^\alpha, \\ -r^{1-N}(r^{N-1}v'(r))' = q(r)u(r)^\beta, \\ u'(0) = v'(0) = 0, \end{cases} \quad r \geq 0. \tag{3.1}$$

証明には不動点定理を用いる.

まず 集合と写像

$$X=\{(u,v)\in C[0,\infty)\times C[0,\infty); ***\}$$
$$\mathcal{T}:X\to C[0,\infty)\times C[0,\infty)$$

を定義する. Schauder-Tychonoff の不動点定理を適用するため, 次のことを示す：

(I) $\mathcal{T}(X)\subset X$, (II) $\mathcal{T}$: 連続, (III) $\mathcal{T}(X)$: 相対コンパクト

Theorem 1 の証明の概略 $a>0,\ b>0$ を

$$\frac{(3b)^\alpha}{N-2}\int_0^\infty sp(s)ds\le a,\quad \frac{(3a)^\beta}{N-2}\int_0^\infty sq(s)ds\le b$$

を満たすようにとる. これは $\alpha\beta>1$ だから可能である.

集合 X_1 と 写像 $\mathcal{T}:X_1\to(C[0,\infty])^2$ を次で定義する：

$$X_1=\left\{(u,v)\in(C[0,\infty))^2;\ a\le u(r)\le 3a,\ b\le v(r)\le 3b, r\ge 0\right\},$$
$$\mathcal{T}(u,v)=(\tilde{u},\tilde{v}),$$

ここで

$$\tilde{u}(r)=a+\frac{1}{N-2}\int_0^r s\left[1-\left(\frac{s}{r}\right)^{N-2}\right]p(s)v(s)^\alpha ds,\tag{3.2}$$
$$\tilde{v}(r)=3b-\frac{1}{N-2}\int_0^r s\left[1-\left(\frac{s}{r}\right)^{N-2}\right]q(s)u(s)^\beta ds.$$

(I) $\mathcal{T}(X_1)\subset X_1$. $(u,v)\in X_1$ とする. $\tilde{u}(r)\ge a,\ \tilde{v}(r)\le 3b,\ r\ge 0$ は明らか.

$\tilde{u}$ について：

$$\begin{aligned}\tilde{u}(r)\le&\ a+\frac{1}{N-2}\int_0^r sp(s)v(s)^\alpha ds\\ \le&\ a+\frac{(3b)^\alpha}{N-2}\int_0^r sp(s)ds\\ \le&\ a+\frac{(3b)^\alpha}{N-2}\int_0^\infty sp(s)ds\\ \le&\ a+a=2a<3a,\quad r\ge 0.\end{aligned}$$

よって $\tilde{u}(r)\le 3a,\ r\ge 0$.

$\tilde{v}$ について：

$$\begin{aligned}\frac{1}{N-2}\int_0^r s\left[1-\left(\frac{s}{r}\right)^{N-2}\right]q(s)u(s)^\beta ds\le&\ \frac{(3a)^\beta}{N-2}\int_0^r sq(s)ds\\ \le&\ \frac{(3a)^\beta}{N-2}\int_0^\infty sq(s)ds\\ \le&\ b,\quad r\ge 0.\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\tilde{v}(r) = &\ 3b - \frac{1}{N-2}\int_0^r s\left[1-\left(\frac{s}{r}\right)^{N-2}\right] q(s)u(s)^\beta ds \\ \geq &\ 3b - b = 2b > b, \quad r \geq 0.\end{aligned}$$

以上より $\mathcal{T}(X_1) \subset X_1$.

(II) $\mathcal{T}(X_1)$ は連続, (III) $\mathcal{T}(X_2)$ は相対コンパクト

も示すことができる.

従って Schauder-Tychonoff の不動点定理より $(u,v) = \mathcal{T}(u,v)$ なる $(u,v) \in X_1$ が存在する. この不動点が (3.1) を満たすことがわかる. よってこの不動点が (1.1) の正値全域解となる.(証明終)

Theorem 2 の証明の概略 一般性を失うことなく $r_0 = 1$ 又は $r_0 = e$ としてもよい.

(i) $\lambda > 2,\ \mu > 2$ のとき. この場合は Theorem 1 の条件を満たす.

(ii) $\lambda = 2,\ \mu > 2$ のとき. $a > 0, b > 0$ を

$$\begin{cases} (3b)^\alpha \max\left\{\dfrac{1}{N-2}\displaystyle\int_0^e sp(s)ds,\ \dfrac{C_1}{N-2}\right\} \leq a, \\ (3a)^\beta \max\left\{\dfrac{1}{N-2}\displaystyle\int_0^e sq(s)ds,\ \dfrac{C_2}{N-2}\displaystyle\int_e^\infty s^{1-\mu}(\log s)^\beta ds\right\} \leq b. \end{cases}$$

を満たすようにとる. これは $\alpha\beta > 1$ だから可能である.

集合 X_2 を次で定義する：

$$X_2 = \left\{(u,v) \in (C[0,\infty))^2;\ a \leq u(r) \leq 3aF(r),\ b \leq v(r) \leq 3b,\ r \geq 0\right\},$$

ここで

$$F(r) = \begin{cases} 1, & 0 \leq r \leq e, \\ \log r, & r \geq e. \end{cases}$$

写像 $\mathcal{T} : X_2 \to C[0,\infty) \times C[0,\infty)$ を $\mathcal{T}(u,v) = (\tilde{u},\tilde{v})$ で定義する. ここで $(\tilde{u},\tilde{v})$ は (3.2) で定義したものである.

(I) $\mathcal{T}(X_2) \subset X_2$. $(u,v) \in X_2$ とする. $\tilde{u}(r) \geq a, \tilde{v}(r) \leq 3b,\ r \geq 0$ は明らか.

$\tilde{u}$ について： $0 \leq r \leq e$ のとき

$$\begin{aligned}\tilde{u}(r) \leq &\ a + \frac{(3b)^\alpha}{N-2}\int_0^r sp(s)ds \\ \leq &\ a + \frac{(3b)^\alpha}{N-2}\int_0^e sp(s)ds \\ \leq &\ a + a = 2a < 3a.\end{aligned}$$

$r \geq e$ のとき

$$\begin{aligned}\tilde{u}(r) \leq &\ a + \frac{(3b)^\alpha}{N-2}\int_0^e sp(s)ds + \frac{C_1(3b)^\alpha}{N-2}\int_e^r s^{-1}ds \\ \leq &\ a + a + \frac{C_1(3b)^\alpha}{N-2}\log r \\ \leq &\ 3a\log r.\end{aligned}$$

よって $\tilde{u}(r) \le 3aF(r),\ r \ge 0$.

$\tilde{v}$について： $0 \le r \le e$のとき

$$\frac{1}{N-2}\int_0^r s\left[1-\left(\frac{s}{r}\right)^{N-2}\right] q(s)u(s)^\beta ds \le \frac{(3a)^\beta}{N-2}\int_0^e sq(s)ds \le b < 2b.$$

$r \ge e$ のとき

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N-2}\int_0^r s\left[1-\left(\frac{s}{r}\right)^{N-2}\right] q(s)u(s)^\beta ds \\ \le\ & \frac{(3a)^\beta}{N-2}\int_0^e sq(s)ds + \frac{C_2(3a)^\beta}{N-2}\int_e^r s^{1-\mu}(\log s)^\beta ds \\ \le\ & b + \frac{C_2(3a)^\beta}{N-2}\int_e^\infty s^{1-\mu}(\log s)^\beta ds \\ \le\ & b+b=2b. \end{aligned}$$

以上より

$$\begin{aligned} \tilde{v}(r) \ge\ & 3b - \frac{1}{N-2}\int_0^r s\left[1-\left(\frac{s}{r}\right)^{N-2}\right] q(s)u(s)^\beta ds \\ \ge\ & 3b-2b=b, \quad r \ge 0. \end{aligned}$$

よって $\mathcal{T}(X_2) \subset X_2$.

(iii) $\lambda < 2,\ \mu - 2 + \beta(\lambda-2) > 0$ のとき. $a>0,\ b>0$ を

$$\begin{cases} (3b)^\alpha \max\left\{\dfrac{1}{N-2}\displaystyle\int_0^1 sp(s)ds,\ \dfrac{C_1}{(N-2)(2-\lambda)}\right\} \le a, \\ (3a)^\beta \max\left\{\dfrac{1}{N-2}\displaystyle\int_0^1 sq(s)ds,\ \dfrac{C_2}{(N-2)(\mu-2+\beta(\lambda-2))}\right\} \le b \end{cases}$$

を満たすようにとる. これは $\alpha\beta > 1$ だから可能である.

集合 X_3 を次で定義する：

$$X_3 = \left\{(u,v) \in (C[0,\infty))^2;\ a \le u(r) \le 3aF(r),\ b \le v(r) \le 3b,\ r \ge 0\right\}$$

ここで

$$F(r) = \begin{cases} 1, & 0 \le r \le 1, \\ r^{2-\lambda}, & r \ge 1. \end{cases}$$

写像 $\mathcal{T}$ については (ii) と同じように定義する.

(I) $\mathcal{T}(X_3) \subset X_3$. $(u,v) \in X_3$ とする. $\tilde{u}(r) \ge a, \tilde{v}(r) \le 3b,\ r \ge 0$ は明らか.

$\tilde{u}$について： $0 \le r \le 1$ のとき

$$\begin{aligned} \tilde{u}(r) \le\ & a + \frac{(3b)^\alpha}{N-2}\int_0^r sp(s)ds \\ \le\ & a + \frac{(3b)^\alpha}{N-2}\int_0^1 sp(s)ds \\ \le\ & a+a=2a<3a. \end{aligned}$$

$r \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned}\tilde{u}(r) \leq\ & a + \frac{(3b)^{\alpha}}{N-2}\int_0^1 sp(s)ds + \frac{C_1(3b)^{\alpha}}{N-2}\int_1^r s^{1-\lambda}ds \\ \leq\ & a + a + \frac{C_1(3b)^{\alpha}}{(N-2)(2-\lambda)}r^{2-\lambda} \leq 3ar^{2-\lambda}.\end{aligned}$$

以上より $\tilde{u}(r) \leq 3aF(r),\ r \geq 0.$

$\tilde{v}$ について： $0 \leq r \leq 1$ のとき

$$\frac{1}{N-2}\int_0^r s\left[1-\left(\frac{s}{r}\right)^{N-2}\right]q(s)u(s)^{\beta}ds \leq \frac{(3a)^{\beta}}{N-2}\int_0^1 sq(s)ds \leq b < 2b.$$

$r \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned}&\frac{1}{N-2}\int_0^r s\left[1-\left(\frac{s}{r}\right)^{N-2}\right]q(s)u(s)^{\beta}ds \\ \leq\ & \frac{(3a)^{\beta}}{N-2}\int_0^1 sq(s)ds + \frac{C_2(3a)^{\beta}}{N-2}\int_1^r s^{1-\mu-\beta(2-\lambda)}ds \\ \leq\ & b + \frac{C_2(3a)^{\beta}}{N-2}\int_1^{\infty} s^{1-\mu+\beta(2-\lambda)}ds \\ =\ & b + \frac{C_2(3a)^{\beta}}{(N-2)\{\mu-2+\beta(\lambda-2)\}} \\ \leq\ & b + b = 2b.\end{aligned}$$

以上より $\tilde{v}(r) \geq 3b - 2b = b,\ r \geq 0.$ よって $\mathcal{T}(X_3) \subset X_3.$

(iv) $\lambda - 2 + \alpha(\mu-2) > 0,\ \mu - 2 + \beta(\lambda-2) < 0,\ \dfrac{\mu-2+\beta(\lambda-2)}{\alpha\beta-1} + N - 2 > 0$ のとき.

$K,\ L$ を次のようにおく：

$$K = \frac{\lambda-2+\alpha(\mu-2)}{\alpha\beta-1}, \quad L = \frac{\mu-2+\beta(\lambda-2)}{\alpha\beta-1}.$$

条件より $K > 0,\ L < 0,\ L + N - 2 > 0,$ である. 定数 $M > 0$ を

$$M > 3^{\beta}\left\{1 + \frac{\displaystyle\int_0^1 q(t)dt - \frac{C_2}{L(L+N-2)}}{\displaystyle\frac{1}{N-2}\int_0^1 t^{N-1}q(t)dt}\right\}$$

を満たすようにとる. $a > 0, b > 0$ を

$$(Mb)^{\alpha}\max\left\{\frac{1}{N-2}\int_0^1 sp(s)ds,\ \frac{C_1}{K(N-2)}\right\} \leq a,$$

$$\frac{a^{\beta}}{N-2}\int_0^1 t^{N-1}q(t)dt \geq b,$$

$$(3a)^{\beta}\left\{\frac{1}{N-2}\int_0^1 t^{N-1}q(t)dt + \int_0^1 q(t)dt - \frac{C_2}{L(L+N-2)}\right\} \leq Mb,$$

を満たすようにとる．これは $\alpha\beta > 1$ と定数 M の取り方から可能である．
集合 X_4 を次で定義する:

$$X_4 = \left\{(u,v) \in (C[0,\infty))^2 : \ a \le u(r) \le 3aF(r),\ bG_1(r) \le v(r) \le MbG_2(r),\ r \ge 0\right\},$$

ここで

$$F(r) = \begin{cases} 1, & 0 \le r \le 1, \\ r^K, & r \ge 1, \end{cases}$$
$$G_1(r) = \begin{cases} 1, & 0 \le r \le 1, \\ r^{2-N}, & r \ge 1 \end{cases}$$
$$G_2(r) = \begin{cases} 1, & 0 \le r \le 1, \\ r^L, & r \ge 1, \end{cases}$$

写像 $\mathcal{T} : X_4 \to C[0,\infty) \times C[0,\infty)$, を $\mathcal{T}(u,v) = (\tilde{u},\tilde{v})$ で定義する，ここで

$$\tilde{u}(r) = a + \int_0^r s\left[1 - \left(\frac{s}{r}\right)^{N-2}\right] p(s)v(s)^\alpha ds,$$
$$\tilde{v}(r) = \int_r^\infty s^{1-N} \int_0^s t^{N-1} q(t)u(t)^\beta dt ds.$$

(I) $\mathcal{T}(X_4) \subset X_4$. $(u,v) \in X_4$ とする．$\tilde{u}(r) \ge a,\ r \ge 0$ は明らか．
$\tilde{u}$ について：$0 \le r \le 1$ のとき

$$\begin{aligned}\tilde{u}(r) \le&\ \ a + \frac{1}{N-2}\int_0^r sp(s)(MbG_2(s))^\alpha ds \\ \le&\ \ a + \frac{(Mb)^\alpha}{N-2}\int_0^1 sp(s)ds \\ \le&\ \ a + a = 2a < 3a.\end{aligned}$$

$r \ge 1$ のとき

$$\begin{aligned}\tilde{u}(r) \le&\ \ a + \frac{(Mb)^\alpha}{N-2}\int_0^1 sp(s)ds + \frac{C_1(Mb)^\alpha}{N-2}\int_1^r s^{1-\lambda+\alpha L} ds \\ \le&\ \ a + a + \frac{C_1(Mb)^\alpha}{N-2}\int_1^r s^{K-1} ds \\ \le&\ \ 2ar^K + \frac{C_1(Mb)^\alpha}{K(N-2)} r^K \\ \le&\ \ 3ar^K.\end{aligned}$$

以上より $\tilde{u}(r) \le 3aF(r),\ r \ge 0$.

$\tilde{v}$ について： $0 \leq r \leq 1$ のとき

$$\begin{aligned}
\tilde{v}(r) \geq \;& a^{\beta}\int_{r}^{\infty} s^{1-N}\int_{0}^{s} t^{N-1}q(t)dtds \\
\geq \;& a^{\beta}\int_{1}^{\infty} s^{1-N}\int_{0}^{s} t^{N-1}q(t)dtds \\
\geq \;& a^{\beta}\int_{1}^{\infty} s^{1-N}\int_{0}^{1} t^{N-1}q(t)dtds \\
= \;& \frac{a^{\beta}}{N-2}\int_{0}^{1} t^{N-1}q(t)dt \geq b.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{v}(r) \leq \;& (3a)^{\beta}\left\{\int_{0}^{1} s^{1-N}\int_{0}^{s} t^{N-1}q(t)F(t)^{\beta}dtds + \int_{1}^{\infty} s^{1-N}\int_{0}^{s} t^{N-1}q(t)F(t)^{\beta}dtds\right\} \\
\leq \;& (3a)^{\beta}\left\{\int_{0}^{1}\int_{0}^{s} q(t)dtds + \int_{1}^{\infty} s^{1-N}\left\{\int_{0}^{1} t^{N-1}q(t)dt + \int_{1}^{s} t^{N-1-\mu+\beta K}dt\right\}ds\right\} \\
\leq \;& (3a)^{\beta}\left\{\int_{0}^{1} q(t)dt + \frac{1}{N-2}\int_{0}^{1} t^{N-1}q(t)dt + C_2\int_{1}^{\infty} s^{1-N}\int_{1}^{s} t^{L+N-3}dtds\right\} \\
\leq \;& (3a)^{\beta}\left\{\int_{0}^{1} q(t)dt + \frac{1}{N-2}\int_{0}^{1} t^{N-1}q(t)dt + \frac{C_2}{L+N-2}\int_{1}^{\infty} s^{L-1}ds\right\} \\
= \;& (3a)^{\beta}\left\{\int_{0}^{1} q(t)dt + \frac{1}{N-2}\int_{0}^{1} t^{N-1}q(t)dt - \frac{C_2}{L(L+N-2)}\right\} \leq Mb.
\end{aligned}$$

$r \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned}
\tilde{v}(r) \geq \;& a^{\beta}\int_{r}^{\infty} s^{1-N}\int_{0}^{s} t^{N-1}q(t)dtds \\
\geq \;& a^{\beta}\int_{r}^{\infty} s^{1-N}\int_{0}^{r} t^{N-1}q(t)dtds \\
\geq \;& \frac{a^{\beta}}{N-2}\int_{0}^{1} t^{N-1}q(t)dt\; r^{2-N} \\
\geq \;& br^{2-N}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{v}(r) \leq \;& (3a)^{\beta}\int_{r}^{\infty} s^{1-N}\left\{\int_{0}^{1} t^{N-1}q(t)dt + C_2\int_{1}^{s} t^{N-1-\mu+\beta K}dt\right\}ds \\
= \;& (3a)^{\beta}\left\{\int_{0}^{1} t^{N-1}q(t)dt\frac{r^{2-N}}{N-2} + C_2\int_{r}^{\infty} s^{1-N}\int_{1}^{s} t^{L+N-3}dtds\right\} \\
\leq \;& (3a)^{\beta}\left\{\frac{1}{N-2}\int_{0}^{1} t^{N-1}q(t)dtr^{2-N} + \frac{C_2}{L+N-2}\int_{r}^{\infty} s^{L-1}ds\right\} \\
= \;& (3a)^{\beta}\left\{\frac{1}{N-2}\int_{0}^{1} t^{N-1}q(t)dtr^{2-N} - \frac{C_2}{L(L+N-2)}r^{L}\right\} \\
\leq \;& (3a)^{\beta}\left\{\frac{1}{N-2}\int_{0}^{1} t^{N-1}q(t)dt - \frac{C_2}{L(L+N-2)}\right\}r^{L} \leq Mbr^{L}.
\end{aligned}$$

以上より $bG_1(r) \le \tilde{v}(r) \le MbG_2(r),\ r \ge 0$. よって $\mathcal{T}(X_4) \subset X_4$ である.

(II) $\mathcal{T}(X_i), i = 2,3,4$, は連続, (III) $\mathcal{T}(X_i), i = 2,3,4$, は相対コンパクト.
も示すことができる.

従って Schauder-Tychonoff の不動点定理より $(u,v) = \mathcal{T}(u,v)$ なる $(u,v) \in X_i,\ i = 2,3,4$, が存在する. この不動点が (3.1) を満たすこともわかる. よってこの不動点が (1.1) の正値全域解である.

(v) $\lambda < 2,\ \mu - 2 + \beta(\lambda - 2) = 0$ のとき. このとき

$$p(r) \le \frac{C_1}{r^\lambda}, \quad q(r) \le \frac{C_2}{r^\mu} \le \frac{C_2}{r^{\mu_1}}, \quad r \ge r_0,$$

$$\lambda - 2 + \alpha(\mu_1 - 2) > 0,\ \mu_1 - 2 + \beta(\lambda - 2) < 0,\ \frac{\mu_1 - 2 + \beta(\lambda - 2)}{\alpha\beta - 1} + N - 2 > 0$$

を満たす $2 < \mu_1 < \mu$ が存在する. この (λ, μ_1) は (iv) を満たす.(証明終)

Theorem 3 を証明するため次の Lemma を用意する.

Lemma 1 $h, \tau \in \mathbf{R}$, $d \in (0,1)$, $\varepsilon_0 \in (0,1/2]$, $y \in C[0,\infty)$, $y(r) > 0, r \ge r_0 > 0$ とする. 任意の $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ に対し y が

$$y(r) \le C\varepsilon^{-h} r^\tau y(r(1+\varepsilon))^d, \quad r \ge r_1$$

を満たすとする, ここで $C > 0,\ r_1 \ge r_0$ は定数. このとき

$$y(r) \le \tilde{C} r^{\frac{\tau}{1-d}}, \quad r \ge r_1$$

が成立する, ここで $\tilde{C} > 0$ は定数.

Lemma 2 $v > 0$ が $\Delta v \le 0$ を満たすならば
(i) $(N-2)v(r) + rv'(r) \ge 0, \quad r \ge 0$
(ii) $v(r) \ge Cr^{2-N}, \quad r \ge r_0$
が成立する, ここで $r_0 > 0$ は定数.

Theorem 3 の証明の概略 (u,v) を (1.1) の球対称な正値全域解とすると, (u,v) は次を満たす：

$$r^{1-N}(r^{N-1}u'(r))' = p(r)v(r)^\alpha, \quad r \ge 0, \quad u'(0) = 0, \tag{3.3}$$

$$-r^{1-N}(r^{N-1}v'(r))' = q(r)u(r)^\beta, \quad r \ge 0, \quad v'(0) = 0. \tag{3.4}$$

(3.3), (3.4) を $[0,r]$ で積分して

$$u'(r) = r^{1-N}\int_0^r s^{N-1}p(s)v(s)^\alpha ds \ge 0, \quad r \ge 0,$$
$$v'(r) = -r^{1-N}\int_0^r s^{N-1}q(s)u(s)^\beta ds \le 0, \quad r \ge 0.$$

よって u は増加, v は減少となることがわかる.

$\varepsilon_0 \in (0,1/2]$ とし, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ を任意にとる. r_* を十分大きく $(1+\varepsilon)r_* > r_0$ となるようにとる.

(3.3) を $[r/(1+\varepsilon), r]$, $r > r_*$ で積分して

$$r^{N-1}u'(r) - \left(\frac{r}{1+\varepsilon}\right)^{N-1} u'\left(\frac{r}{1+\varepsilon}\right) = \int_{r/(1+\varepsilon)}^{r} s^{N-1}p(s)v(s)^{\alpha}ds.$$

$u'(r) \geq 0$, v は減少, $p(r)$ の条件から

$$u'(r) \geq C_1 r^{1-N} v(r)^{\alpha} \int_{r/(1+\varepsilon)}^{r} s^{N-1-\lambda}ds \geq C_3 \varepsilon r^{1-\lambda} v(r)^{\alpha},$$

ここで, $C_3 > 0$ は ε に無関係な定数. 上式を $[r,(1+\varepsilon)r]$ で積分して

$$u((1+\varepsilon)r) - u(r) \geq C_3\varepsilon \int_{r}^{(1+\varepsilon)r} s^{1-\lambda}v(s)^{\alpha}ds$$

$u(r) > 0$, $v(r)$ は減少より,

$$\begin{aligned} u((1+\varepsilon)r) \geq\ & C_3\varepsilon v((1+\varepsilon)r)^{\alpha} \int_{r}^{(1+\varepsilon)r} s^{1-\lambda}ds \\ \geq\ & C_4\varepsilon^2 r^{2-\lambda} v((1+\varepsilon)r)^{\alpha}, \quad r \geq r_*, \end{aligned}$$

ここで $C_4 > 0$ は 定数. 新たに $(1+\varepsilon)r$ を r とおいて

$$u(r) \geq \tilde{C}_1 \varepsilon^2 r^{2-\lambda} v(r)^{\alpha}, \quad r \geq r_1, \tag{3.5}$$

が成立する, ここで $\tilde{C}_1 > 0$ は定数, $r_1 > r_*$.

同様に (3.4) を $[r/(1+\varepsilon), r]$, $r > r_*$ で積分して

$$-r^{N-1}v'(r) + \left(\frac{r}{1+\varepsilon}\right)^{N-1} v'\left(\frac{r}{1+\varepsilon}\right) = \int_{r/(1+\varepsilon)}^{r} s^{N-1}q(s)u(s)^{\beta}$$

$v'(r) \leq 0$, $u(r)$ は増加, $q(r)$ の条件から

$$-v'(r) \geq C_2 r^{1-N} u\left(\frac{r}{1+\varepsilon}\right)^{\beta} \int_{r/(1+\varepsilon)}^{r} s^{N-1-\mu}ds \geq C_3\varepsilon r^{1-\mu} u\left(\frac{r}{1+\varepsilon}\right)^{\beta},$$

ここで, $C_3 > 0$ は定数. 上式を $[r,(1+\varepsilon)r]$ で積分して

$$-v((1+\varepsilon)r) + v(r) \geq C_3\varepsilon \int_{r}^{(1+\varepsilon)r} s^{1-\mu} u\left(\frac{s}{1+\varepsilon}\right)^{\beta} ds.$$

$v(r) > 0$, $u(r)$ は増加より

$$\begin{aligned} v(r) \geq & C_3\varepsilon u\left(\frac{r}{1+\varepsilon}\right)^{\beta} \int_{r}^{(1+\varepsilon)r} s^{1-\mu}ds \\ \geq & \tilde{C}_2 \varepsilon^2 r^{2-\mu} u\left(\frac{r}{1+\varepsilon}\right)^{\beta}, \quad r \geq r_* \quad . \end{aligned} \tag{3.6}$$

が成立, ここで $\tilde{C}_2 > 0$ は定数.

(3.6) を (3.5) に代入して

$$u(r) \geq \tilde{C}_1 \tilde{C}_2^{\alpha} \varepsilon^{2\alpha+2} r^{2-\lambda+\alpha(2-\mu)} u\left(\frac{r}{1+\varepsilon}\right)^{\alpha\beta}, \quad r \geq r_1.$$

新たに $r/(1+\varepsilon)$ を r とおいて

$$u((1+\varepsilon)r) \geq \tilde{C}_1 \tilde{C}_2^{\alpha} \varepsilon^{2\alpha+2} \left((1+\varepsilon)r\right)^{2-\lambda+\alpha(2-\mu)} u(r)^{\alpha\beta}, \quad r \geq r_1.$$

よって

$$u(r) \leq \tilde{C}_3 \varepsilon^{-\frac{2\alpha+2}{\alpha\beta}} r^{\frac{\lambda-2+\alpha(\mu-2)}{\alpha\beta}} u((1+\varepsilon))^{\frac{1}{\alpha\beta}}, \quad r \geq r_1$$

が成立, ここで $\tilde{C}_3 > 0$ は定数. 同様に (3.5) を (3.6) に代入して

$$v(r) \leq \tilde{C}_4 \varepsilon^{-\frac{2\beta+2}{\alpha\beta}} r^{\frac{\mu-2+\beta(\lambda-2)}{\alpha\beta}} v((1+\varepsilon)r)^{\frac{1}{\alpha\beta}}, \quad r \geq r_1$$

が成立する, ここで $\tilde{C}_4 > 0$ は定数.

$1/\alpha\beta < 1$ だから, Lemma 1 より

$$u(r) \leq C r^{\frac{\lambda-2+\alpha(\mu-2)}{\alpha\beta-1}}, \quad r \geq r_1, \tag{3.7}$$

$$v(r) \leq C r^{\frac{\mu-2+\beta(\lambda-2)}{\alpha\beta-1}}, \quad r \geq r_1, \tag{3.8}$$

が成立する, ここで $C > 0$ は定数.

(i) $\lambda - 2 + \alpha(\mu - 2) < 0$ のとき. (3.7) より $u(r) \to 0 (r \to \infty)$. 一方 u は増加で $u(0) > 0$ だから矛盾.

(ii) $\dfrac{\mu - 2 + \beta(\lambda - 2)}{\alpha\beta - 1} + N - 2 < 0$ のとき. Lemma 2(ii) と (3.8) より

$$C_1 r^{2-N} \leq v(r) \leq C_2 r^{\frac{\mu-2+\beta(\lambda-2)}{\alpha\beta-1}}, \quad r \geq r_1$$

となる, $C_1 > 0, C_2 > 0$ は定数. 今 $\dfrac{\mu - 2 + \beta(\lambda - 2)}{\alpha\beta - 1} < 2 - N$ だから矛盾.

(iii) $\lambda > \alpha(2 - N) + 2, \mu < N,\ \lambda - 2 + \alpha(\mu - 2) = 0$ のとき. Lemma 2(i) より

$$\begin{aligned} v(r) \geq &\ -\frac{rv'(r)}{N-2} = \frac{r^{2-N}}{N-2} \int_0^r s^{N-1} q(s) u(s)^{\beta} ds \\ \geq &\ C r^{2-N} u(0)^{\beta} \int_{r_0}^r s^{N-1-\mu} ds \\ \geq &\ C r^{2-\mu}, \quad r \geq r_1 > r_0. \end{aligned}$$

よって $r \geq 2r_1$ として

$$\begin{aligned} u(r) = &\ u(0) + \frac{1}{N-2} \int_0^r s \left[1 - \left(\frac{s}{r}\right)^{N-2}\right] p(s) v(s)^{\alpha} ds \\ \geq &\ C \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{N-2}\right] \int_{r_1}^{r/2} s^{1-\lambda+\alpha(2-\mu)} ds \\ = &\ C \int_{r_1}^{r/2} s^{-1} ds \\ \geq &\ C \log r, \quad r \geq r_2 > 2r_1. \end{aligned}$$

一方 (3.7) より $u(r) \leq C$. これは矛盾.

(iv) $\lambda < \alpha(2-N)+2, \mu > N$, $\dfrac{\mu-2+\beta(\lambda-2)}{\alpha\beta-1}+N-2=0$ のとき. Lemma 2(ii) より

$$\begin{aligned} u(r) = &\ u(0)+\frac{1}{N-2}\int_0^r s\left[1-\left(\frac{s}{r}\right)^{N-2}\right]p(s)v(s)^\alpha ds \\ \geq &\ C\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{N-2}\right]\int_{r_1}^{r/2} s^{1-\lambda+\alpha(2-N)}ds \\ \geq &\ Cr^{2-\lambda+\alpha(2-N)}, \quad r \geq r_2 > 2r_1. \end{aligned}$$

Lemma 2(i) より

$$\begin{aligned} v(r) \geq &\ -\frac{rv'(r)}{N-2} = \frac{r^{2-N}}{N-2}\int_0^r s^{N-1}q(s)u(s)^\beta ds \\ \geq &\ Cr^{2-N}\int_{r_2}^r s^{N-1-\mu+\beta(2-\lambda)+\alpha\beta(2-N)}ds \\ = &\ Cr^{2-N}\int_{r_2}^r s^{-1}ds \geq Cr^{2-N}\log r, \quad r \geq r_3 > r_2. \end{aligned}$$

一方 (3.8) より

$$v(r) \leq Cr^{\frac{\mu-2+\beta(\lambda-2)}{\alpha\beta-1}} = Cr^{2-N}.$$

これは矛盾.

(v) $\lambda = \alpha(2-N)+2, \mu = N$ のとき. (iii),(iv) と同様にして

$$u(r) \geq C\log r, \quad v(r) \geq r^{2-N}\log r$$

となることがわかる. これは矛盾.(証明終)

参考文献

[1] M.F.Bidaut-Veron and P.Grillot, Asymtotic behaviour of elliptic systems with mixed absorption and source terms, Asymtotic Analysis, 19(1999)

[2] C.Cid and C.Yarur, Existence of solutions for a sublinear system of elliptic equations, Electoronic J. Diff. Eq, No.33(2000)

[3] C.Cid and C.Yarur, A sharp existence result for a Diriclet mixed problem: the superlinear cace, Nonlinear Anal., 45(2001)

[4] N. Kawano, On bounded entire solutions of semilinear elliptic equations, Hiroshima Math. J., 14(1984), 125-158.

[5] T. Teramoto, Existence and nonexistence of positive entire solutions of second order semilinear elliptic systems, Funkcial. Ekvac.,42(1999), 241-260.