

周回積分に基づく非線形固有値問題の解法

A method for nonlinear eigenvalue problems based on contour integration

櫻井鉄也 (筑波大)	Tetsuya Sakurai(Univ. Tsukuba)
朝倉順子 (筑波大)	Junko Asakura(Univ. Tsukuba)
多田野寛人 (筑波大)	Hiroto Tadano(Univ. Tsukuba)
池上 努 (産総研)	Tsutomu Ikegami(AIST)
木村欣司 (京都大)	Kinji Kimura(Univ. Kyoto)

1 はじめに

非線形固有値問題は、構造物の振動解析や流体の安定性解析、電磁場解析、遅延微分方程式などの分野で現れる。また、連立代数方程式を多項式固有値問題に帰着する応用も提案されている [8]。しかし、数値的な計算が容易ではないことから、モデルの定式化において非線形固有値問題は避けられる傾向があり、もとの問題は非線形であっても何らかの近似によって線形問題に帰着させて扱われることが多い。

行列の要素が多項式で与えられる場合には、コンパニオン行列を用いることで一般化固有値問題に帰着される。しかし、得られる一般化固有値問題の行列の次元がもとの行列の次元に対して多項式の次数に比例して増大することや、無限大固有値を多く含んで数値的に不安定になるなどの問題点があった。また、多項式でない場合にはコンパニオン行列は使えず、Newton 法などの反復法が必要であり、初期値依存性が高く網羅的に解を求めることは容易ではない。

一般化固有値問題に対する周回積分を用いた解法として、文献 [14] において Sakurai-Sugiura (SS) 法が提案された。この方法は、モーメントを用いて解析関数の零点を求める方法である Kravanja-Sakurai-Van Barel (KSB) 法 [9] に基づいている。KSB 法では与えられた関数の零点を極に持つような関数の周回積分によってモーメントを求め、そこから得られる Hankel 行列の小規模な行列束から極を計算する。SS 法では固有値を極に持つような関数を考えることで、KSB 法と同様にモーメントから固有値を求める。このとき、対応する部分空間を考慮することで固有ベクトルも得られる。KSB 法の誤差解析は文献 [10, 13] で与えられている。

SS 法はモーメントを直接用いて Hankel 行列を生成する。これに対して、文献 [15] では、ベクトルに対する周回積分と Rayleigh-Ritz プロシージャを用いることで、とくに対称行列に対して精度改善を行った。モーメントを直接用いる (explicit moments) 場合と Rayleigh-Ritz プロシージャを用いる場合を区別するときには、それぞれ SS-EM 法、SS-RR 法とよぶ。また、複数のベクトルを用いたブロック版 (Block SS method) [7] によって、領域内に多数の固有値がある場合の安定性が改善され、重複固有値に対しても適用可能になった。SS 法は分散した並列計算環境に適した特徴をもち、大規模シミュレーションに利用されている [16]。

本論文では、周回積分を用いた固有値解法を非線形固有値問題に適用する方法 [1] について示す。さらに、行列の要素が解析関数で与えられる問題への適用方法 [2] についても述べる。この方法は、多項式行列に適用した場合でも行列の次元が増大せず、とくに高次の多項式で従来法に比べて有効性が高い。また、これまで Newton 法などの初期値依存性の高い方法で反復によって求めるしかなかった問題でも、与えた領域内のすべての固有値を網羅的に求めることが可能となる。

次節において、周回積分を用いた一般化固有値問題の解法を多項式固有値問題へ適用する方法を示す。さらに、解析関数への拡張方法についても簡単に述べる。第 3 節において、周回積分を数値的に近似する方法について述べる。第 4 節で非線形固有値問題に適用した数値例を示す。

2 非線形固有値問題への周回積分を用いた方法の適用

行列 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ とし, ベクトル $v \in \mathbb{C}^n$ は零でないとする. 関数 $f(z)$ を

$$f(z) := v^H (zB - A)^{-1} v \quad (1)$$

と定義する. $f(z)$ は固有値を極とする有理関数となるため, この $f(z)$ に対して周回積分を用いて与えられた領域内の極を求める方法 [9] を適用する. これにより, 周回積分を用いた一般化固有値問題の解法 [14] が得られる. まず, この方法の多項式固有値問題への適用について述べる.

行列 $A_0, A_1, \dots, A_l \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $A_l \neq O$ に対して

$$F(z) = \sum_{i=0}^l z^i A_i, \quad z \in \mathbb{C}$$

とする. ここで $F(z)$ は l 次の行列多項式である. $F(z)$ の行列式が恒等的に 0 でないとき, $F(z)$ は正則であるという. また, 係数がベクトルで与えられる多項式をベクトル多項式とよぶ.

行列多項式 $F(z)$ に対して, $F(\lambda)x = 0$ となるスカラー λ とベクトル x を求める多項式固有値問題を考える. ここで, 周回積分を用いた一般化固有値問題の解法が多項式固有値問題へ適用可能であることを示すために, 以下の定理を用いる.

定理 1 (Smith の標準形 [6]) $F(z)$ を $n \times n$ の正則な行列多項式とする. このとき, $F(z)$ は次のように表される.

$$P(z)F(z)Q(z) = D(z).$$

ここで, $D(z) = \text{diag}(d_1(z), d_2(z), \dots, d_n(z))$ であり, $d_i(z)$ は $d_{i-1}(z)$ で割り切れるモニックな多項式である. また, $P(z), Q(z)$ は正則である.

対角行列 $D(z)$ を Smith の標準形といい, 一意に定まる. 関数 $f(z)$ を, 式 (1) のかわりに行列多項式 $F(z)$ を用いて

$$f(z) := v^H F(z)^{-1} v \quad (2)$$

と定義する. このとき, 以下の定理が成り立つ.

定理 2 行列多項式 $F(z)$ に対する Smith の標準形を $D(z) = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ とし, $P(z)F(z)Q(z) = D(z)$ と表されるとする. $P(z), Q(z)$ はベクトル多項式によって

$$P(z)^H = (p_1(z), \dots, p_n(z)),$$

および

$$Q(z) = (q_1(z), \dots, q_n(z)),$$

と表されるとする. また,

$$\chi_j(z) := v^H H q_j(z) p_j(z)^H v, \quad 1 \leq j \leq n$$

とおく. このとき, 関数 $f(z)$ は次のように表される.

$$f(z) = \sum_{j=1}^n \frac{\chi_j(z)}{d_j(z)}.$$

この定理より, 関数 $f(z)$ は有理式であり, その分母は Smith の標準形で対角要素となる多項式 $d_1(z), \dots, d_n(z)$ であることが分かる. このことから, 一般化固有値問題に対する方法であった文献 [14] の方法と同様の手法が適用でき, 一般化固有値問題のときの $F(z) = zB - A$ を行列多項式

$$F(z) = \sum_{i=0}^l z^i A_i$$

に置き換えることで方法が拡張される.

$\Gamma \in \mathbb{C}$ を正の向きをもつ Jordan 曲線とし, $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ を Γ 内にある相異なる固有値とする. また, 複素モーメントを

$$\mu_k := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} z^k f(z) dz, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (3)$$

と定義し, μ_k から得られる Hankel 行列 H_m とその要素がシフトした Hankel 行列 $H_m^<$ を

$$H_m := [\mu_{i+j-2}]_{i,j=1}^m = \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{m-1} \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{m-1} & \mu_m & \cdots & \mu_{2m-2} \end{pmatrix},$$

および

$$H_m^< := [\mu_{i+j-1}]_{i,j=1}^m = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_m \\ \mu_2 & \mu_3 & \cdots & \mu_{m+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_m & \mu_{m+1} & \cdots & \mu_{2m-1} \end{pmatrix}$$

とする. このとき次の定理が成り立つ.

定理 3 $\chi_j(z) \neq 0, 1 \leq j \leq m$ のとき行列則 $H_m^< - \lambda H_m$ の固有値は $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ で与えられる.

この定理より, 行列多項式 $F(z)$ の Γ 内の固有値が Hankel 行列による行列束 $H_m - \lambda H_m$ の固有値として求められることがわかる. λ_j に対応する $H_m - \lambda H_m$ の固有ベクトルを w_j とすると, 行列多項式 $F(z)$ の固有ベクトルは

$$x_j = [s_0, s_1, \dots, s_{m-1}] w_j, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

によって求められる. ここで

$$s_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} z^k F(z)^{-1} v dz, \quad k = 0, 1, \dots, m-1 \quad (4)$$

である.

Smith の定理では行列の基本変換が証明の基本となる. この基本変換の操作の解析関数に対する拡張を考えることで, Smith の定理は解析関数に拡張できる. この結果を用いると, 周回積分を用いた固有値解法が, 解析関数を行列の要素にもつ非線形固有値問題に適用可能であることが示される.

周回積分は, 図 1 に示すように, ベクトル v に対するフィルターと見なすことができる. 入力したベクトルに含まれる固有ベクトル成分のうち, Γ 外部の成分は 0 となり, Γ 内部の成分だけが残る. さらに, $z^k, k = 0, 1, \dots$ によって複数のモーメントを観測することで Γ 内の固有ベクトルを抽出することが可能となる.

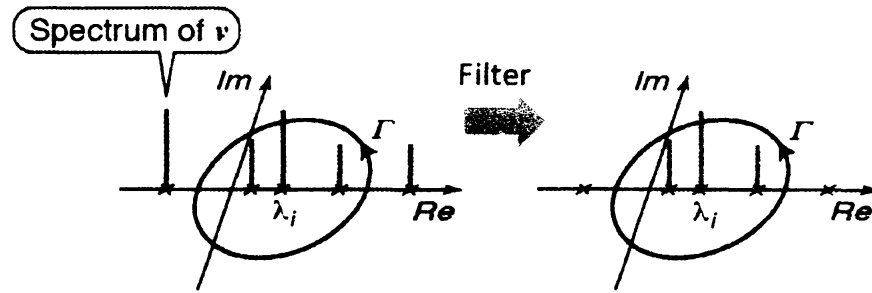


図 1 A filter of spectral for an input vector

3 数値積分による近似

積分路 Γ が, 中心 γ , 半径 ρ の円の場合には, 円周上に N 個の等間隔点

$$\omega_j := \gamma + \rho e^{\frac{2\pi i}{N}(j+1/2)}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1$$

をとり, この点での関数値

$$f(\omega_j) = \mathbf{v}^H F(\omega_j)^{-1} \mathbf{v}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1$$

を用いて, 数値積分を行う. このとき, 式 (3) は

$$\hat{\mu}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left(\frac{\omega_j - \gamma}{\rho} \right)^{k+1} f(\omega_j), \quad k = 0, 1, \dots$$

によって近似される. この $\hat{\mu}_k$ を用いて Hankel 行列を

$$\hat{H}_m := [\hat{\mu}_{i+j-2}]_{i,j=1}^m = \begin{pmatrix} \hat{\mu}_0 & \hat{\mu}_1 & \cdots & \hat{\mu}_{m-1} \\ \hat{\mu}_1 & \hat{\mu}_2 & \cdots & \hat{\mu}_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{\mu}_{m-1} & \hat{\mu}_m & \cdots & \hat{\mu}_{2m-2} \end{pmatrix},$$

および

$$\hat{H}_m^< := [\hat{\mu}_{i+j-1}]_{i,j=1}^m = \begin{pmatrix} \hat{\mu}_1 & \hat{\mu}_2 & \cdots & \hat{\mu}_m \\ \hat{\mu}_2 & \hat{\mu}_3 & \cdots & \hat{\mu}_{m+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{\mu}_m & \hat{\mu}_{m+1} & \cdots & \hat{\mu}_{2m-1} \end{pmatrix}$$

とする. これから得られる行列束 $\hat{H}_m^< - \lambda \hat{H}_m$ の固有値を近似固有値 $\hat{\lambda}_j$ とする. 対応する固有ベクトルは

$$\hat{\mathbf{x}}_j = [\hat{\mathbf{s}}_0, \hat{\mathbf{s}}_1, \dots, \hat{\mathbf{s}}_{m-1}] \hat{\mathbf{w}}_j, \quad j = 1, \dots, m$$

によって求められる. ここで $\hat{\mathbf{w}}_j$ は $\hat{H}_m^< - \lambda \hat{H}_m$ の $\hat{\lambda}_j$ に対応する固有ベクトルで,

$$\hat{\mathbf{s}}_k := \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left(\frac{\omega_j - \gamma}{\rho} \right)^{k+1} F(\omega_j)^{-1} \mathbf{v} dz, \quad k = 0, 1, \dots, m-1$$

である。

数値積分では、積分路 Γ の近くに固有値があると積分誤差が大きくなり、それを十分に小さくするためには分点数 N を大きくする必要がある。しかし、実際には以下のようにすることで、 N をそれほど大きくすることなく十分な精度の固有対が得られる。 M を m 以上の整数とし、 $\hat{\mu}_0, \dots, \hat{\mu}_{2M-1}$ を要素にもつ Hankel 行列を \hat{H}_M とする。その特異値を $\sigma_1, \dots, \sigma_M$ とする。適当な小さな値 δ に対して、

$$\sigma_i \geq \delta (1 \leq i \leq K) \quad \text{and} \quad \sigma_i < \delta (i > K) \quad (5)$$

となる K を求める。 $K \times K$ の \hat{H}_K および $\hat{H}_K^<$ を用いることで積分誤差の影響が小さくなり、 N をそれほど大きくする必要がなくなる [16]。

ブロック版では、ベクトル v のかわりに、適当な整数 L に対して行列 $V \in \mathbb{C}^{n \times L}$ を用い、

$$f(z) := V^H F(z)^{-1} V \quad (6)$$

とする。ここで V の各列ベクトルは互いに独立であるとする。 f は $L \times L$ の行列となる。モーメント μ_k は $L \times L$ の行列

$$\hat{M}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left(\frac{\omega_j - \gamma}{\rho} \right)^{k+1} V^H F(\omega_j)^{-1} V, \quad k = 0, 1, \dots$$

となり、 $\hat{\mu}_k$ のかわりに \hat{M}_k を Hankel 構造に並べたブロック Hankel 行列とする。ブロックでないときと同様に、 $\hat{H}_K, \hat{H}_K^<$ を特異値分解を用いて条件 (5) を満たすように決める。また、 $\hat{S} = [\hat{S}_1, \dots, \hat{S}_M]$ とする。このとき M を K/L よりも大きくなるようにあらかじめ設定しておく。図 2 にアルゴリズムを示す。

Algorithm:

Input: $V \in \mathbb{C}^{n \times L}$, N , M , γ , ρ , δ

Output: $(\hat{\lambda}_i, \hat{x}_i)$, $i = 1, \dots, K$

Step 1. Set $\omega_j \leftarrow \gamma + \rho \exp(2\pi i(j + 1/2)/N)$, $j = 0, \dots, N - 1$

Step 2. Solve $F(\omega_j)Y_j = V$, $j = 0, \dots, N - 1$ for Y_j

Step 3. Compute \hat{S}_k and \hat{M}_k , $k = 0, 1, \dots, 2M - 1$

Step 4. Evaluate K such that the condition (5) is satisfied, and set \hat{H}_K and $\hat{H}_K^<$

Step 5. Compute eigenpairs $(\hat{\zeta}_j, \hat{w}_j)$ of the matrix pencil $\hat{H}_K^< - \lambda \hat{H}_K$

Step 6. Set $\hat{\lambda}_i \leftarrow \gamma + \hat{\zeta}_i$, $i = 1, \dots, K$

Step 7. Set $\hat{x}_i \leftarrow \hat{S}(:, 1 : K) \hat{w}_i$, $i = 1, \dots, K$

図 2 The block SS method for nonlinear eigenvalue problems

大規模固有値問題の反復解法では、従来法のほとんどは近似固有ベクトルを与えて部分空間を生成し、それを用いて近似固有ベクトルを更新する。これは、部分空間を生成する内部反復、および近似固有ベクトルを繰り返し更新する外部反復から構成される。そのため、各反復ループ内の細粒度の並列性となる。それに対して、SS 法では近似固有ベクトルを更新する反復プロセスが存在しない。また、数値積分では、分点の関数値は互いに独立に計算可能である。このために分散した並列計算環境むぎの実装が可能である。

4 数値例

周回積分を用いた固有値解法を非線形固有値問題に適用した数値例を示す。計算は MATLAB を用い、倍精度演算によって行った。連立一次方程式は MATLAB のコマンド \ を用いた。疎行列に対しては疎行列向きの直接解法が適用される。計算環境は、OS は MacOSX, CPU は Core2Duo 2.8GHz, メモリーは 4GB である。非線形固有値問題のテスト行列を集めたソフトウェア [3] に収録されている問題を用いた。

数値例 1 コンクリートの構造物の振動解析で現れる 2 次の固有値問題 [5]

$$F(z) = (1 + \mu i)A_0 + zA_1 + z^2A_2.$$

行列の次元は $n = 2,472$ である。 $\mu = 0.04$ とした。

円を中心 $\gamma = 0.02i$, 半径 $\rho = 0.01$ とし、パラメータは $N = 64, M = 12, L = 24, \delta = 10^{-10}$ とした。計算時間は、連立一次方程式を解くために 25.50 秒、すべての計算時間は 33.08 秒であった。2 次の多項式のため、コンパニオン行列を用いた場合には 4,944 次元の固有値問題を解く必要があるが、提案手法では次元が増大することはない。表 1 に得られた固有値と残差を示す。

表 1 Numerical residuals in Example 1.

i	$\hat{\lambda}_i$	$\ F(\hat{\lambda}_i)\hat{x}_i\ _2$
1	$-0.0000216863278276 + 0.0154115677104255i$	7.76e-11
2	$-0.0000197833477396 + 0.0119993297821835i$	1.02e-10
3	$-0.0000151957730035 + 0.0101166442602377i$	1.21e-10
4	$-0.0000118594665225 + 0.0113230898062915i$	1.99e-10
5	$-0.0000057431971483 + 0.0107092282098408i$	7.60e-11
6	$-0.0000029134370364 + 0.0099064458503810i$	3.66e-10
7	$-0.0000018483290137 + 0.0146810510171077i$	3.09e-10
8	$-0.0000008792205185 + 0.0254753480275083i$	9.62e-10
9	$-0.0000003548552326 + 0.0278060013664378i$	9.72e-10
10	$-0.0000001411075830 + 0.0274761863363541i$	6.54e-10

数値例 2 Schrödinger 作用素 $Hf(x) = f''(x) + (\cos(x) - e^{-x^2})f(x)$ に関連した 2 次の固有値問題 [4]. 問題は

$$F(z) = A_0 - 2zA_1 + z^2A_2$$

と表され、行列の次元は 1,998 次元である。 $[-1/2, 2] \times [-10^{-1}, 10^{-1}]$ の領域に分布する固有値が H の固有値に非常に近いことが知られている。

円の中心を $\gamma = 0.75$, 半径を $\rho = 1.25$ とし、区間 $[-1/2, 2]$ を含む円を設定した。パラメータは $N = 32, M = 16, L = 32, \delta = 10^{-10}$ とした。この結果、区間 $[-1/2, 2]$ にある 58 個の固有値が求まった。計算時間は、連立一次方程式を解くために 3.80 秒、すべての計算時間は 8.02 秒であった。行列の非零要素数は 11,980 であり、疎行列むきの解法を用いているために、問題の次元数に対して計算時間が比較的少ない。表 2 に得られた結果を示す。なお、固有値の数が多いため一部

表 2 Numerical residuals in Example 2.

i	$\hat{\lambda}_i$	$\ F(\hat{\lambda}_i)\hat{x}_i\ _2$
1	$-0.495972570102936 + 0.000000000015191i$	7.8e-10
2	$-0.472207941012386 - 0.000000000028753i$	5.6e-10
3	$-0.454979533449726 - 0.000000000031954i$	3.4e-10
4	$-0.431724473734018 - 0.000000000028027i$	5.0e-10
5	$-0.417302343361454 - 0.000000000015235i$	3.6e-10
6	$-0.394722075615477 - 0.00000000002448i$	4.9e-10
7	$-0.383980355421506 + 0.000000000052304i$	4.5e-10
8	$-0.363078016141593 - 0.000000000067237i$	1.3e-09
9	$-0.357799207867688 + 0.000000000158477i$	9.2e-10
10	$-0.316761991519511 + 0.000000000103911i$	3.7e-10
\vdots	\vdots	\vdots
50	$1.345236737357678 - 0.00000000004717i$	1.2e-10
51	$1.364369719140265 + 0.00000000001480i$	8.0e-11
52	$1.370499499018130 - 0.00000000004055i$	7.1e-11
53	$1.385864713144721 - 0.00000000000797i$	6.8e-11
54	$1.392438512938752 + 0.00000000000939i$	4.2e-11
55	$1.402015867020737 - 0.00000000000593i$	4.7e-11
56	$1.407289721123107 + 0.00000000001093i$	4.4e-11
57	$1.410740876419676 - 0.00000000000524i$	4.3e-11
58	$1.528749871999364 - 0.00000000002573i$	4.6e-11

の固有値のみ示している。図 3 に得られた固有値分布を示す。0.5 近傍にバンドギャップがあることがわかる。

数値例 3 高速列車によって振動を受ける鉄道のレールの振動解析から現れる 2 次の固有値問題 [12]

$$F(z) = A_0 + zA_1 + z^2A_0^T.$$

ここで行列 A_0 は

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{1005 \times 1005}$$

で、 $A \in \mathbb{C}^{201 \times 67}$ である。そのため、 A_0 は rank が 67 となり、原点と無限遠点に数多くの固有値がある。

円を中心 $\gamma = 0.02i$ 、半径 $\rho = 0.01$ とした。パラメータは $N = 64$ 、 $M = 12$ 、 $L = 24$ とした。 $\|A_0\|_1 = 3.07 \times 10^{10}$ 、 $\|A_1\|_1 = 1.90 \times 10^{11}$ である。表 3 に結果を示す。このように原点や無限遠点に多くの固有値があるような問題であっても適用可能であることが分かる。

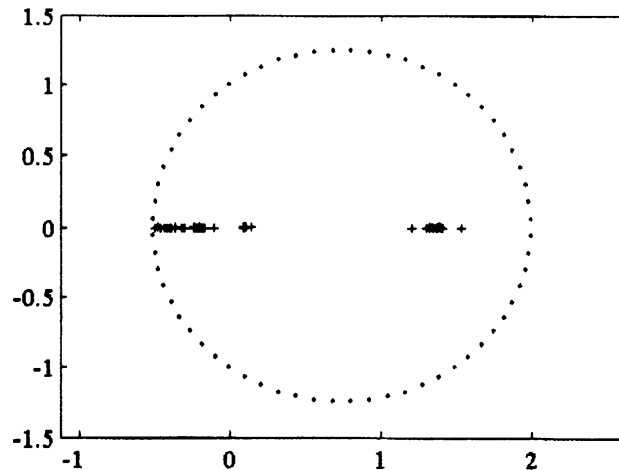


図 3 Distribution of eigenvalues in Example 2

数値例 4 加速器の設計において現れる平方根を含む行列 [11]

$$F(z) = K - zM + i\sqrt{z - \sigma_1^2}W_1 + i\sqrt{z - \sigma_2^2}W_2.$$

ここで, $n = 9,956$ であり, $K, M, W_1, W_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は対称で, M は正定値である. $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 0.043551$ とした.

複素平面上に 7 個の円領域を設定し, それぞれの領域内の固有値を求めた. この問題では, 虚部が正の固有値が必要となるため, 円の中心を実軸からずらして配置している. パラメータは $N = 64, M = 12, L = 16, \delta = 10^{-10}$ とした. 図 4 に得られた固有値の平方根 $\sqrt{\lambda_j}$ の複素平面上での分布を示す. 図において, 円状に並んだ点は周回積分に用いた Γ 上の分点を表し, +記号は得られた固有値を表している. 得られた固有対の残差 $\|F(\hat{\lambda}_j)\hat{x}_j\|_2$ の最大値は 1.6×10^{-9} であった. 与えられた領域内の固有値を網羅的に求めることが可能であることが分かる.

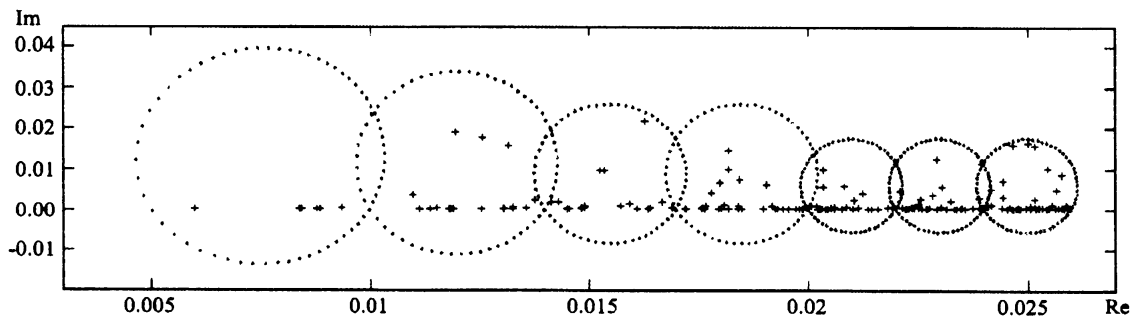


図 4 Distribution of $\sqrt{\lambda_j}$ and circles in Example 4

5 おわりに

本論文では, 周回積分を用いた固有値解法である Block SS 法を, 非線形固有値問題に拡張する方法について述べた. この方法は行列多項式だけでなく解析関数などのより広いクラスの問題に適用可能である. また, 与えられた円領域内の固有値をすべて求めることができる. 非線形固有値問題の数値解法を前提としたモデリング手法の開拓や応用問題へ適用したときの有効性の検証が今後の課題となる.

表 3 Numerical residuals in Example 3.

i	$\hat{\lambda}_i$	$\ F(\hat{\lambda}_i)\hat{x}_i\ _2$
1	$-1.2448793687877855 - 0.3937089787755421i$	2.92e-06
2	$-1.1404126005689024 + 0.0932972575772002i$	1.58e-05
3	$-0.8710458001257497 - 0.0712603353692954i$	1.88e-05
4	$-0.7302495670236613 + 0.2309507398810384i$	1.38e-06
5	$-0.0780419569966502 + 0.9673551191631106i$	8.01e-07
6	$-0.0828588331597064 - 1.0270618460832583i$	1.08e-06
7	$0.7618682937403589 + 0.6689990648545343i$	3.35e-04
8	$9.2404837606172681 - 1.2374080387736570i$	4.71e-05
9	$13.7675115768959611 + 11.9164816778304488i$	2.76e-06
10	$38.2638839019738199 - 12.0561271576858058i$	1.65e-05
11	$217.3945739471618879 - 89.7528979101970066i$	3.27e-05

参考文献

- [1] J. Asakura, T. Sakurai, H. Tadano, T. Ikegami, and K. Kimura, A linearization method for polynomial eigenvalue problems using a contour integral, International Workshop on Accurate Solution of Eigenvalue Problems VII (IWASEP7), Dubrovnik, June 10, 2008.
- [2] 朝倉順子, 櫻井鉄也, 多田野寛人, 池上努, 木村欣司, 周回積分を用いた非線形固有値問題の数値解法, 日本応用数理学会平成 20 年度年会, 2008 年 9 月 17 日.
- [3] T. Betcke, N. J. Higham, V. Mehrmann, C. Schröder, and F. Tisseur, NLEVP: A collection of nonlinear eigenvalue problems, MIMS EPrint 2008.40 (2008).
- [4] L. Boulton, and M. Levitin, On approximation of the eigenvalues of perturbed periodic Schrödinger operators, *J. Phys. Math. Theor.* **40**, (2007) 9319–9329.
- [5] A. Feriani, F. Perotti, and V. Simoncini, Iterative system solvers for the frequency analysis of linear mechanical systems, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **190** (2000), 1719–1739.
- [6] I. Gohberg, P. Lancaster, and F. Rodman, *Matrix Polynomials*, Academic Press, New York, 1982.
- [7] T. Ikegami, T. Sakurai, and U. Nagashima, A filter diagonalization for generalized eigenvalue problems based on the Sakurai-Sugiura projection method, Technical Report CS-TR-08-13, Tsukuba, 2008.
- [8] 木村欣司, 朝倉順子, 櫻井鉄也, 多田野寛人, 池上努, グレブナー基底を用いない連立代数方程式の非線形固有値問題への変換法と非線形固有値問題の解法について, 第 37 回数値解析シンポジウム, 秋田, 2008 年 6 月 14 日.
- [9] P. Kravanja, T. Sakurai, and M. Van Barel, On locating clusters of zeros of analytic functions, *BIT* **39** (1999), 646–682.

- [10] P. Kravanja, T. Sakurai, H. Sugiura, and M. Van Barel, A perturbation result for generalized eigenvalue problems and its application to error estimation in a quadrature method for computing zeros of analytic functions, *J. Comput. Appl. Math.* **161** (2003), 339–347.
- [11] B. Liao, *Subspace Projection Methods for Model Order Reduction and Nonlinear Eigenvalue Computation*, PhD thesis, Department of Mathematics, University of California at Davis, 2007.
- [12] D. S. Mackey, N Mackey, C. Mehl, and V Mehrmann, Structured polynomial eigenvalue problems: Good vibrations from good linearizations, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* **28** (2006) 1029–1051.
- [13] T. Sakurai, P. Kravanja, H. Sugiura, and M. Van Barel, An error analysis of two related quadrature methods for computing zeros of analytic functions, *J. Comput. Appl. Math.* **152** (2003), 467–480.
- [14] T. Sakurai, and H. Sugiura, A projection method for generalized eigenvalue problems, *J. Comput. Appl. Math.* **159** (2003), 119–128.
- [15] T. Sakurai, and H. Tadano, CIRR: a Rayleigh-Ritz type method with contour integral for generalized eigenvalue problems, *Proc. The First China-Japan-Korea Joint Conference on Numerical Mathematics, Special Issue of Hokkaido Mathematical Journal*, **36** (2007), 745–757 .
- [16] T. Sakurai, H. Tadano, T. Ikegami, and U. Nagashima, A parallel eigensolver using contour integration for generalized eigenvalue problems in molecular simulation, Technical Report CS-TR-08-14, Tsukuba, 2008.