数理解析研究所講究録
第 1640 巻 2009 年 47-55

Local existence of solutions for a model related to the motion of a slime mould

東北大学大学院博士課程　物部治徳 (Harunori Monobe)
Mathematical Institute, Tohoku University

1 序

次の自由境界問題を考える:

$$
\text{(P)}\begin{cases}
u_t=\Delta u+k_1\left(C_0-\int_{\Omega(t)}udx\right)-k_2u & \text{in } Q_T,\\
u=1+A\kappa+BV & \text{on } \Gamma_T,\\
V=-\nabla u\cdot\mathbf{n}+g\left(C_0-\int_{\Omega(t)}udx\right) & \text{on } \Gamma_T,\\
u(x,0)=\phi(x) & \text{in } \Omega(0).
\end{cases}
$$

ここで, $\Omega(t)$ を時刻 t における $\mathbb{R}^2$ の有界領域, $\partial\Omega(t)$ を $\Omega(t)$ の境界とする. また, 領域 Q_T と境界 Γ_T はそれぞれ,

$$
Q_T:=\bigcup_{0<t<T}\Omega(t)\times\{t\},\quad \Gamma_T:=\bigcup_{0<t<T}\partial\Omega(t)\times\{t\},
$$

と定義する. ϕ を初期データとし, $\kappa=\kappa(x,t)$ は, $\partial\Omega(t)$ の曲率, $V=V(x,t)$ は $\partial\Omega(t)$ の外向き法線速度, $\mathbf{n}=\mathbf{n}(x,t)$ は $\partial\Omega(t)$ の外向き単位法線ベクトルを表す. g は $C^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\mathbb{R}^2\times[0,T])$ に属する与えられた関数とし, パラメータ k_1,k_2,A,B,l_1,C_0 はそれぞれ正定数とする.

方程式 (P) は, 神戸大学の梅田民樹氏によって提唱された細胞性粘菌の運動を記述した数理モデルを簡略化して得られた自由境界問題である. 自由境界問題は時刻によって領域が変化するため, ある時刻において領域の位相が変化したり, 境界の滑らかさが退化する可能性がある. そのため, 固定領域に比べ解の存在を示すことは困難であると考えられる. 一方, 梅田氏は, 二次元において進行波解に類似した解を数値シミュレーションによって観測している. これは, 自由境界問題 (P) において大域的な解が存在することを示唆している. しかし, 厳密な解析においては, 大域解の存在はおろか局所可解性ですら示されていない. そこで, 本稿では自由境界問題 (P) の局所可解性を研究する.

1.1 関連する問題

Stefan 問題は氷と水の界面の動きを熱の分布によって表した自由境界問題として知られており, これまで多くの結果が得られている. その中で Hanzawa [3] は, 一相 Stefan 問題に対して, non-cylindrical な領域を管状領域に変形させる Hanzawa 微分同相写像とよばれる写像を作り, Nash-Moser の陰関数定理を適用することで, 局所的に古典解の一意存在を示した. また, X.Chen と F.Reitch [2] は二相 Stefan 問題に対し, 同様に古典解の一意存在を示した. 彼らが扱った二相 Stefan 問題では, 曲率と法線速度の影響が境界条件に含まれている. 彼らは曲率と法線速度, 両方が含まれた境界条件から境界の近似列を構成し, 縮小写像の原理を用いることで, 解の存在を示している. その際, Hanzawa 微分同相写像を用いて管状領域に変化させる手法を用いている.

そこで, 我々は彼らの結果を改良することで, 次のような初期境界, 初期データと同等の正則性を持つ古典解の局所可解性を得た.

1.2 主定理

定理 1. 初期境界 $\partial\Omega(0) \in C^{3+\alpha}$ は単純閉曲線であるとする. さらに, 初期データ ϕ は $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega(0)})$ であり, 次の両立条件を満たすとする:

$$\phi = 1 + A\kappa + B\left[-\nabla\phi\cdot\mathbf{n} + l_1\left(C_0 - \int_{\Omega(0)} udx\right)\right] \quad \text{on } \partial\Omega(0). \tag{1}$$

このとき, ある定数 $T_* > 0$ が存在して, (P) を満たす解

$$u \in C^{2+\alpha,\ (2+\alpha)/2}(\overline{Q_{T_*}}), \qquad \Gamma_{T_*} \in C^{3+\alpha,\ (3+\alpha)/2}$$

が一意に存在する.

以下では, 証明の概略を述べる. ここでは, [2] で用いられた手法を応用する. そのために, まず彼らの手法に従い初期境界近くに帯状領域を構成する. 次に境界条件 $u = 1 + A\kappa + BV$ に着目し, 左辺の u を $C^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}$ 級関数 u_1 で置き換えることにより, この境界条件はある準線形放物型問題に帰着することができ, 結果, 局所時間において閉曲線の動きを決定することができる. この閉曲線の動きを境界とする問題 (P_1) に対して解 u_2 を得る. ここで, (P_1) は問題 (P) における境界条件 $u = 1 + A\kappa + BV$ を除いたものである. 得られた解 u_2 を再び $u = 1 + A\kappa + BV$ の u として置き換えることにより, (P) の境界および解 u_3 を得る. 同様に, 帰納法を用いることにより近似解の列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ と近似境界の列 $\{\Gamma_T^n\}_{n=1}^{\infty}$ を構成する. これらの近似列に対する評価を用いることにより, u_n から u_{n+1} への写像が縮小であることが確認でき, 不動点を見つけることにより解の一意存在を示す.

2 証明

2.1 帯状領域の構成

この節では, 初期境界に十分近い帯状領域を構成し, その領域内で曲率, 法線速度, 法線ベクトルを等高面法により具体的に表示する. まず, $\partial\Omega(0)$ に十分近い滑らかな曲線 $\partial\Omega(0)_\epsilon$ をとってくる. $\mathcal{M}$ を $\partial\Omega(0)_\epsilon$ に等長となる 1 次元多様体とする. これより,

$$X^0(s_1) : \mathcal{M} \to \partial\Omega(0)_\epsilon$$

を満たす C^∞ 微分同相写像 X^0 が存在する. また, $N(s_1)$ を点 $X^0(s_1) \in \partial\Omega(0)_\epsilon$ における外向き単位法線ベクトルとする. このとき, $C^{3+\alpha}$ 微分同相写像 $X(s_1, s_2) : \mathcal{M} \times [-L, L] \to \mathbb{R}^2$ を次のように定義する:

$$X(s_1, s_2) = X^0(s_1) + s_2 N(s_1).$$

ここで, L は X が微分同相写像となるような十分小さい正定数とする. このような点 X の集合 $\{X(s_1, s_2) \mid s_1 \in \mathcal{M},\ s_2 \in [-L, L]\}$ を帯状領域と呼ぶ. このとき, T をある正定数とし, 帯状領域内において超曲面族 $\{\Gamma_t\}_{0\le t\le T}$ を

$$\Gamma_t := \{X(s_1, s_2) | s_2 = \Lambda(s_1, t), s_1 \in \mathcal{M}\}, \quad 0 \le t \le T$$

と定義する. ただし, Λ は

$$\Lambda : \mathcal{M} \times [0, T] \to [-L, L], \quad \Lambda \in C^{2,1}(\mathcal{M} \times [0, T])$$

を満たすとする. また, X が微分同相写像であることから

$$(s_1, s_2) = (S_1(x), S_2(x))$$

を満たすような逆写像 S_1, S_2 が存在する. これより関数 S_1, S_2 を用いて,

$$\Phi(x, t) = S_2(x) - \Lambda(S_1(x), t)$$

と置くことにより, Γ_t は $\Phi(x, t) = 0$ を満たす点 (x, t) の集合になる. 以上から, Γ_T における法線速度 $V(s_1, t)$, 曲率 $\kappa(s_1, t)$ と法線ベクトル $n(s_1, t)$ が計算でき,

$$V(s_1, t) = -\left.\frac{\Phi_t}{|\nabla_x \Phi|}\right|_{x=X(s_1,\Lambda(s_1,t))}, \quad \kappa(s_1, t) = \operatorname{div}\left(\frac{\nabla_x \Phi}{|\nabla_x \Phi|}\right)\Bigg|_{x=X(s_1,\Lambda(s_1,t))},$$
$$n = \left.\frac{\nabla_x \Phi}{|\nabla_x \Phi|}\right|_{x=X(s_1,\Lambda(s_1,t))},$$

と表すことが出来る．このとき，$\kappa(s_1,t)$ を展開すると

$$\kappa(s_1,t) = -\frac{1}{|\nabla_x \Phi|}\left(a\left(s_1,\Lambda,\frac{\partial \Lambda}{\partial s_1}\right)\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial s_1^2}(s_1,t) + b\left(s_1,\Lambda,\frac{\partial \Lambda}{\partial s_1}\right)\right)$$

となる．ここで，

$$\alpha_i(s_1,s_2) = \begin{pmatrix} \partial S_i(x)/\partial x_1 \\ \partial S_i(x)/\partial x_2 \end{pmatrix}, \quad \beta_i(s_1,s_2) = \begin{pmatrix} \partial^2 S_i(x)/\partial x_1 \partial x_1 & \partial^2 S_i(x)/\partial x_1 \partial x_2 \\ \partial^2 S_i(x)/\partial x_2 \partial x_1 & \partial^2 S_i(x)/\partial x_2 \partial x_2 \end{pmatrix},$$

$$a(p_1,p_2,p_3) = \alpha_1 \cdot \alpha_1 - \frac{p_3^2(\alpha_1 \cdot \alpha_1)^2}{1+p_3^2|\alpha_1|^2},$$

$$b(p_1,p_2,p_3) = p_3 Tr(\beta_1) - Tr(\beta_2) - \frac{p_3^2(\alpha_1^T \beta_1 \alpha_1)}{1+p_3^2|\alpha_1|^2} + \frac{p_3^3(\alpha_1^T \beta_1 \alpha_1)}{1+p_3^2|\alpha_1|^2}$$

を表す．方程式 (P) の境界条件に着目する．このとき，境界条件

$$u = 1 + A\kappa + BV$$

は，次のような準線形放物型方程式に対する初期値問題

$$(*)\begin{cases} \dfrac{\partial \Lambda(s_1,t)}{\partial t} = \dfrac{A}{B} a\left(s_1,\Lambda,\dfrac{\partial \Lambda}{\partial s_1}\right)\dfrac{\partial^2 \Lambda}{\partial s_1^2} \\ \qquad\qquad + \dfrac{A}{B} b\left(s_1,\Lambda,\dfrac{\partial \Lambda}{\partial s_1}\right) + c\left(s_1,\Lambda,\dfrac{\partial \Lambda}{\partial s_1}\right) v(s_1,t) \quad \text{in } \mathcal{M}\times(0,T), \\ \Lambda(s_1,0) = \Lambda_0(s_1) \quad \text{in } \mathcal{M}. \end{cases}$$

となる．ただし，

$$c(p_1,p_2,p_3) = -\frac{1}{B}\left(1+|p_3\alpha_1|^2\right), \qquad v(s_1,t) = u(X(s_1,\Lambda(s_1,t)),t).$$

とする．以後，任意の $x \in \partial\Omega(0)$ に対して，

$$x = X^0(s_1) + \Lambda_0(s_1)N(s_1),$$
$$|\Lambda_0| \le L/6, \quad \Lambda_0 \in C^{3+\alpha}(\mathcal{M})$$

を満すとする．実際，上の条件を満たすものは存在する [5]．このとき，問題 (*) において次のような結果を得ることができる．

補題 2.1. $v_1 \in C^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{\Omega(0)_\epsilon}\times[0,T])$ とする．このとき，初期値 $\Lambda_0 \in C^{3+\alpha}(\mathcal{M})$ に対して，ある正定数 T_* と，問題 (*) を満たす解

$$\Lambda_1 \in C^{3+\alpha,(3+\alpha)/2}(\mathcal{M}\times[0,T_*])$$

が一意に存在し, 次の評価を満たす:

$$\|\Lambda_1\|_{C^{3+\alpha,(3+\alpha)/2}(\mathcal{M}\times[0,T_*])} \leq Cm.$$

ただし, C は正定数とし,

$$m = \|v\|_{C^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\mathcal{M}\times[0,T_*])} + 2$$

とした.

証明 . 証明は, a が一様放物型条件を満たし, a, b, c は Hölder 空間 $C^{\alpha,\alpha/2}(\mathcal{M}\times[0,T])$ のノルムが一様有界とであることを用いて, 解の存在を示す. ([2] を参照)

2.2 Non-cylindrical domain から管状領域へ

この節では, 管状領域である $\overline{\Omega(0)}\times[0,T]$ から non-cylindrical domain へ変換する微分同相写像 Y を構成する. 補題 2.1 によって得られた解 Λ_1 を用いて, 次のような曲面

$$\Gamma_T^1 := \{X(s_1,\Lambda_1(s_1,t)) \mid s_1\in\mathcal{M},\ t\in[0,T]\ \}.$$

を構成する. これより, 境界が Γ_T^1 となるような領域 Q_T^1 が構成できる. このとき,

$$Y : \overline{\Omega(0)}\times[0,T] \longrightarrow Q_T^1,$$

となる微分同相写像 Y の存在について次のような結果をえることができる.

補題 2.2. $\overline{\Omega(0)}\times[0,T]$ から Q_T^1 への $C^{3+\alpha,(3+\alpha)/2}$ 微分同相写像 Y が存在する.

証明 . まず, 次の領域を準備する:

$$Q \equiv Q(0)\times[0,T].$$

ただし, $Q(0) := \{X(s_1.L)\,|\,s_1\in\mathcal{M}\}$ とした. このとき, 次のように微分同相写像 Y を定義する:

$$Y : Q \longrightarrow Q \quad s.t.$$

$$Y(y,t) = \begin{cases} y & \textit{if } \textit{dist}(y,\Omega(0)) > \dfrac{3}{4}L, \\ X^0(s_1) + (s_2+\chi(s_2)\Lambda(s_1,t))N(s_1) & \textit{if } \textit{dist}(y,\Omega(0)) \leq \dfrac{3}{4}L. \end{cases} \tag{2}$$

ここで,

$$(s_1, s_2) = (S^1(y), S^2(y)),$$

$$\chi(\lambda) \in C^\infty([-L, L]) \quad s.t. \ \chi(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{if } |\lambda| > \frac{3}{4}L, \\ 1 & \text{if } |\lambda| < \frac{1}{4}L. \end{cases}$$

とした. 上の写像は $C^{3+\alpha,(3+\alpha)/2}$ 微分同相写像であることがわかる. このような微分同相写像 Y は我々が求めていたものであると容易に分かる.

次に, 以下の問題 (P_1) を考える:

$$(\mathrm{P}_1)\begin{cases} u_t = \Delta u + k_1 \left(C_0 - \int_{\Omega^1(t)} w_1 \, dx \right) - k_2 u & \text{in } Q^1_T, \\ u_1 = -\nabla u \cdot n_1 + g(x,t) \left(C_0 - \int_{\Omega^1(t)} w_1 \, dx \right) & \text{on } \Gamma^1_T, \\ u = \phi & \text{in } \Omega(0). \end{cases}$$

ここで, 前節と同様に

$$\Gamma^1_T = \{X(s_1, \Lambda_1(s_1, t)) \,|\, \Lambda_1 : \text{補題 } 2.1 \text{ の解}, \ s_1 \in \mathcal{M}, \ 0 \le t \le T\}$$

とし, $\Omega^1(t)$, v_1, n_1 はそれぞれ, Γ^1_T によって決まる領域, 法線速度, 外向き単位法線ベクトルとする. また, w_1 は $C^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(Q^1_T)$ に属する与えられた関数とする. このときに, 問題 (P_1) に対して (2) を使って変数変換を行い, cylinder 領域に変換する. そこで放物型方程式を解くことができる ([4] を参照). 具体的には

$$v(y,t) := u(Y^{-1}(y,t), t).$$

とし, 問題 (P_1) は次のような問題になる (以後, (P^*_1) とおくことにする):

$$\begin{cases} v_t = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} a_{i,j}(y,t) \frac{\partial^2 v}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{i=1}^{2} b_i(y,t) \frac{\partial v}{\partial y_i} + k_1 \int_{\Omega^1(t)} w_1 \, dx - k_2 v & \text{in } \Omega(0) \times [0,T], \\ -\nabla_y v \cdot \hat{n}(y,t) + l_1 g \displaystyle\int_{\Omega^1(t)} w_1 dx = V(Y^{-1}(y,t), t) & \text{on } \partial\Omega(0) \times [0,T], \\ v = \phi(Y^{-1}(y,t)) & \text{in } \Omega(0). \end{cases}$$

ここで,

$$\begin{cases} a_{i,j}(y,t) = \nabla_x Y_i(x,t) \cdot \nabla_x Y_j(x,t)|_{x=Y^{-1}(y,t)}, \\ b_i(y,t) = \Delta_x Y_i(x,t) - \left.\dfrac{\partial Y_i}{\partial t}\right|_{x=Y^{-1}(y,t)}, \\ \hat{n}(y,t) = (\nabla_x Y_1 \cdot n_1(x,t), \nabla_x Y_2 \cdot n_1(x,t))\,|_{x=Y^{-1}(y,t)}, \end{cases}$$

とした. これより, 次の補題を得ることができる.

補題 2.3. 初期データ $\phi \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega(0)})$ は (1) を満たすとする. このとき, 問題 (P_1) は解 $u_1 \in C^{2+\alpha,(2+\alpha)}(\overline{Q_T^1})$ を一意に持つ.

2.3 近似列の構成

補題 2.1 より v_1 から Λ_1 が求まり, 補題 2.3 では Λ_1 から u_1 を求めることができた. 次のような空間 S^1, S^2 を準備する:

$$\begin{aligned} S^1 &:= \{v \in C^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{\Omega(0)} \times [0,T]) \mid \|v\|_{C^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{\Omega(0)} \times [0,T])} \le m-2\}, \\ S^2 &:= \{\Lambda \in C^{3+\alpha,(3+\alpha)/2}(\mathcal{M} \times [0,T]) \mid \|\Lambda\|_{C^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\mathcal{M} \times [0,T])} \le L/6, \\ &\qquad \|\Lambda\|_{C^{3+\alpha,(3+\alpha)/2}(\mathcal{M} \times [0,T])} \le Cm\}. \end{aligned}$$

ここで, C は正定数とした. このとき, $v_1 \in S^1$ から $\Lambda_1 \in S^2$ への作用素を

$$\mathcal{H}_1 : S^1 \longrightarrow S^2$$

と定める. 同様に, $\Lambda_1 \in S^2$ から $u_1 \in C^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{\Omega(0)} \times [0,T])$ への作用素を

$$\mathcal{H}_2 : S^2 \longrightarrow C^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{\Omega(0)} \times [0,T]),$$

と定める.

上の作用素 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ に対して, いくつかの評価をえることことができる. その結果, 補題 2.3 で得られた解 u_1 に対して,

$$v_2 := u_1$$

とおくことができ, 再び補題 2.1, 補題 2.3 を繰り返すことで, 近似列を構成することができる. 以下では, そのときに用いた評価の結果のみを示す.

補題 2.4. $v_1, v_2 \in C^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{\Omega(0)} \times [0,T])$ とする. このとき, ある正定数 $C = C(m)$ が存在し,

$$\|\mathcal{H}_1(v_1) - \mathcal{H}_1(v_2)\|_{C^{3+\alpha,(3+\alpha)/2}(\mathcal{M} \times [0,T])} \le C\|v_1 - v_2\|_{C^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\mathcal{M} \times [0,T])}$$

を満たす.

同様に, 問題 (P_1) に対していくつかの評価をえる. この評価は, 証明の中で重要となる.

補題 2.5. $Y_{\Lambda_i}^{-1}(y,t)$ を $\Lambda_i = \mathcal{H}_1(v_i)$ によって構成された微分同相写像 Y^{-1} であるとする. また, 問題 $(\mathrm{P}^*{}_i)$ に対して, $w_1(Y_{\Lambda_i}^{-1}(y,t),t)$ が Lemma 2.1 における v_i に等しいとする (ただし, $i = 1, 2$). このとき, 次の評価をみたすような正定数 $C = C(m)$ が存在する:

$$\begin{aligned}&\|\mathcal{H}_2(\Lambda_1) - \mathcal{H}_2(\Lambda_2)\|_{C^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{\Omega(0)_\epsilon}\times[0,T])}\\ &\le C\{\|\Lambda_1 - \Lambda_2\|_{C^{3+\alpha,(3+\alpha)/2}(\mathcal{M}\times[0,T])} + \|v_1 - v_2\|_{C^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{\Omega(0)_\epsilon}\times[0,T])}\}.\end{aligned}$$

以上の評価などを用いることにより, 最終的に, $\mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_1$ が縮小写像であることを示すことが出来, 問題 (P) に対して解の存在と一意性を同時に示すことができる.

3　解の性質と今後の目標

問題 (P) を球対称で考えるとき, パラメータと初期値に対していくつかの仮定をすると, ある時刻までは, 次のような結果を導くことができる:

$$\int_{\Omega(t)} u\,dx > 0.$$

モデルの意味で考えた場合でも, u は F-アクチンの密度なので, 上の積分量が正であることは望ましい結果だと言える. このことから, ある時刻まで弱最大値原理が成り立つことが確認できる. 今後の予想としては, 比較原理などが成り立ち, 大域的な解が存在するのではないかと考察している. また, モデルそのものがまだ複雑なので, たとえば 1 次元モデルとして見ることができるなど, 形式的なモデルの簡略化をする必要性があると思われる.

参考文献

[1] B.Alberts, D.Bray, J.Lewis, M.Raff, K.Roberts, J.D.Watson, Molecular biology of the cell, 監訳; 中村桂子, 秋山秋佐夫, 松原謙一, *Newton Press*, 1995.

[2] X.Chen and F.Reitch, Local existence and uniqueness of the Stefan problem with surface tension and kinetic undercooling, *J. Math. Anal. and Appl.* **164** (1992), 350–362.

[3] E.Hanzawa, Classical solution of stefan problem, *Tohoku Math. J.* **(2) 33** (1981), 297-335.

[4] O.A.Ladyzenskaya V.A.Solonnikov and N.N.Uralceva, Linear and quasilinear equation of parabolic type, vol.**23**, *Amer. Math. Soc, Providence, R. I,* 1968.

[5] W.Merz and P.Rybka, A free boundary problem describing reaction-diffusion problem in chemical vapor infiltration of pyrolytic carbon, *J.Math.Anal.Appl* **292** (2004), 571-588.