数理解析研究所講究録
第 1640 巻 2009 年 85-103

Coincidence sets in quasilinear problems of logistic type *

工学院大学・工学部　竹内 慎吾　(Shingo Takeuchi)
Faculty of Engineering, Kogakuin University

1　はじめに

一般に，p-Laplace 作用素を主要項として含む方程式においては，たとえ非主要項がなめらかであっても，解の勾配がゼロとなって主要項が退化すれば，解にある種の特異性が現れることが知られている．本稿では，解の勾配がゼロにならず p-Laplace 作用素が退化しなくても，非主要項が相応の特異性をもてば，解に同種の特異性が現れることを報告する．本稿の詳細は論文 [14] を参照して欲しい．

区間 $I=(-1,1)$ 上で，次の 2 階常微分方程式の境界値問題を考える．

$$\begin{cases} -\varepsilon(\phi_p(u_x))_x = \phi_q(u)f(c(x)-u) & \text{in } I, \\ u \geq 0,\ u \not\equiv 0 & \text{in } I, \\ u(\pm 1) = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

ここで ε は正のパラメータ，$\phi_p(s)=|s|^{p-2}s$，$1<q\leq p<\infty$ であり，$f(s)$ は次の条件を満たす関数である．

*本研究は科研費（No. 20740094）の助成を受けたものである．

(H1) $f(s) \in C(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ かつ $f(0) = 0$.

(H2) $f(s)$ は $\mathbb{R}$ 上で狭義単調増加.

(H3) ある正の定数 θ, C が存在して $\displaystyle\lim_{s \to 0} \frac{f(s)}{\phi_{\theta+1}(s)} = C$.

方程式の右辺に現れる関数 $c(x) \in C^1(\bar{I})$ は正値であり,

$$(\phi_p(c_x(x)))_x = 0 \tag{1.2}$$

を I 上で超関数の意味で満たすとする．したがって $c(x)$ は (1.1) の方程式を満たすことに注意する．条件 (1.2) は，後に述べるように，本稿の研究対象である「一致集合」が存在するために必要な条件であり，$c(x)$ が 1 次関数

$$c(x) \equiv ax + b \tag{1.3}$$

であることと同値である．ここで定数 a, b は，$c(x)$ が正値なので $b - |a| =: 2d > 0$ を満たす（定理を述べるには (1.3) の方が都合がよい）.

境界条件 $u(\pm 1) = 0$ は $u(-1) = u(1) = 0$ を表す.

関数 $u(x)$ が境界値問題 (1.1) の解であるとは，$u(x) \in W_0^{1,p}(I) \cap L^\infty(I)$ であって (1.1) を満たすときをいう．Díaz と Saá の論文 [4] の定理によれば,

(i) $0 < \varepsilon < \varepsilon_c$ ならば (1.1) の解 $u_\varepsilon(x)$ が一意に存在し，I 上で正値であり,

(ii) $\varepsilon \geq \varepsilon_c$ ならば (1.1) の解は存在しない.

ここで ε_c は，$p > q$ の場合は $\varepsilon_c = \infty$ であり（すなわち，任意の $\varepsilon > 0$ に対して解が存在し），$p = q$ の場合は重み付き固有値問題

$$\begin{cases} -(\phi_p(u_x))_x = \lambda f(c(x))\phi_p(u) & \text{in } I, \\ u(\pm 1) = 0 \end{cases}$$

の主固有値

$$\lambda_{f(c)} = \inf_{u \in W_0^{1,p}(I),\ \neq 0} \frac{\displaystyle\int_I |u_x(x)|^p\, dx}{\displaystyle\int_I f(c(x))|u(x)|^p\, dx} \in (0, \infty)$$

を用いて，$\varepsilon_c = 1/\lambda_{f(c)}$ と表される定数である．

さて，問題 (1.1) の方程式は，数理生物学をはじめとする自然科学の様々な分野において，対象となる個体や物質が自己促進と自己抑制をともなって成長する様子を記述する際に用いられる．関数 $c(x)$ は例えば数理生態学では環境収容力と呼ばれ，解に上限を与える重要な関数である．特に $p = q = 2$, $f(s) = s$ かつ $c(x) \equiv b$（式 (1.3) で $a = 0$ とする）であるとき，(1.1) は

$$\begin{cases} -\varepsilon u_{xx} = u(b-u) & \text{in } I, \\ u(\pm 1) = 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

となり，対応する時間発展方程式とともに反応拡散方程式の基本とされている．とりわけ $\varepsilon > 0$ が十分小さいときは，領域の内部において拡散効果が微弱となり反応効果に支配される一方で，境界付近においては境界条件の制約があるため解が境界層を形成し，特異摂動やパターン形成など様々な観点から研究されている．

(1.4) は (1.1) で $p = q = 2$ として得られたが，もう少し一般的に $p = q > 1$ とすると境界層がよりはっきり現れる．数学的に述べよう．境界値問題

$$\begin{cases} -\varepsilon(\phi_p(u_x))_x = \phi_p(u)(b-u) & \text{in } I, \\ u(\pm 1) = 0 \end{cases} \tag{1.5}$$

を考える．$0 < \varepsilon < \varepsilon_c = b/\lambda_1$ ならば，問題 (1.5) には一意正値解 $u_\varepsilon(x)$ が存在する．ここで λ_1 は後述する固有値問題 (2.1) の主固有値である．さらに $\varepsilon \to 0$ とすると，$u_\varepsilon(x)$ は I 上でコンパクト一様に b へと収束する．$1 < p \le 2$ の場合は，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $u_\varepsilon(x) < b$ である（問題 (1.4) はこのケース）．一方，$p > 2$ の場合は，十分小さい $\varepsilon > 0$ において，$u_\varepsilon(x)$ と $c(x) \equiv b$ との一致集合

$$I_\varepsilon = \{x \in I : u_\varepsilon(x) = c(x)\}$$

（今の場合は $c(x)$ が定数なので，I_ε 上では解のグラフが平坦になることからフ

ラットコアともよばれる）が存在し，

$$I_\varepsilon = [-1 + C_0\varepsilon^{1/p}, 1 - C_0\varepsilon^{1/p}]$$

と表される．ここで $C_0 > 0$ は

$$C_0 = \left(\frac{p-1}{p}\right)^{1/p} \int_0^b \frac{1}{(F(b)-F(s))^{1/p}}\,ds \quad \left(F(s) = \int_0^s \phi_p(t)(b-t)\,dt\right) \tag{1.6}$$

で与えられる定数である（$F(b) - F(s) = O((b-s)^2)$ $(s \to b)$ であるから，$p > 2$ のときに $C_0 < \infty$ である）．したがって境界層の厚さは厳密に $C_0\varepsilon^{1/p}$ である．$p > 2$ のときに限って一致集合が存在するこの現象は，Guedda と Véron が論文 [7] において，(1.5) を含む非線形固有値問題の分岐構造を調べた際に発見された．また $p \neq q$ の場合にも，正値解の個数が変化することもあるが，最大解に関して同じことがいえる．この場合については論文 [15] を参照されたい．

本稿で扱うのは常微分方程式であるが，同形の偏微分方程式でも同じ現象が報告されているので紹介しておく．$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ をなめらかな境界 $\partial\Omega$ をもつ有界領域とする．Kamin と Véron は論文 [9] において，(1.5) の多次元版である境界値問題

$$\begin{cases} -\varepsilon\,\mathrm{div}(\phi_p(\nabla u)) = \phi_p(u)f(b-u) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.7}$$

の正値解がフラットコアをもつことを証明し，論文 [7] の結果を多次元の場合に拡張した．ここで $f(s)$ は条件 (H1)–(H3) を満たす関数である（特に Ω が球で $f(s) = s$ の場合は，論文 [7] 以前に論文 [10] において，Kichenassamy と Smoller がフラットコアをもつ正値球対称解の存在を示している）．もう少し詳しく述べると，彼らの論文 [9]，そして García-Melián と Sabina de Lis の論文 [6] によって次のことが示されている：$\theta \geq p-1$ ならばフラットコアは存在しない；$0 < \theta < p-1$ ならば，十分小さい $\varepsilon \in (0, f(b)/\lambda_1)$ に対してフラットコア $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : u_\varepsilon(x) = b\}$ が存在し，ある定数 $C_1 > C_2 > 0$ に対して

$$\{x \in \Omega : \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) \geq C_1\varepsilon^{1/p}\} \subset \Omega_\varepsilon \subset \{x \in \Omega : \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) \geq C_2\varepsilon^{1/p}\},$$

特に

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-1/p}\,\mathrm{dist}(x,\Omega_\varepsilon)=C_0\quad \text{for all } x\in\partial\Omega$$

であり，C_0 は (1.6) で与えられた次元 N に無関係な定数である．より詳しい結果は，論文 [6] や Guo の論文 [8] を参照されたい．なお，関数 $c(x)$ が領域全体で定数ではなく複数の部分領域上で定数であるとしても，十分小さい $\varepsilon>0$ に対して解はそれぞれの部分領域においてフラットコアをもつ（論文 [12]）．

一致集合全般に関しては，例えば Díaz の書物 [3] を参考にして欲しい．

以上，関数 $c(x)$ が定数であるときに一致集合（フラットコア）が存在することを見てきた．それでは一般に $c(x)$ がいかなる条件を満たすときに一致集合が存在するのかを考えてみたい．一致集合

$$I_\varepsilon=\{x\in I: u_\varepsilon(x)=c(x)\}$$

が存在したとする．我々は特に I_ε が内点を含む場合に興味がある．このとき $c(x)$ は I_ε 上で (1.1) の方程式を満たすから，条件 (1.2)，またはそれと同値な (1.3) は必要条件である．したがって $c(x)$ は定数である必要はない．特に定数ではない場合（式 (1.3) で $a\neq 0$ の場合）を考えると，I_ε 上では $u_{\varepsilon,x}(x)=c_x(x)=a\neq 0$ となって方程式の主要項が退化しないので，逆に (1.2) が十分条件であるかどうかは自明なことではないだろう．

本稿では，しかるべき θ の範囲において，**条件 (1.2) は一致集合が存在し内点を含むための十分条件でもある**ことを報告する．

定理 1.1. $a\neq 0$ (*resp.* $a=0$) かつ $0<\theta<1$ (*resp.* $0<\theta<p-1$) とする．このとき，ある定数 $L>0$, $\varepsilon_0\in(0,\varepsilon_c)$ が存在し，$L\varepsilon_0{}^\kappa<1$，かつ任意の $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ に対して (1.1) の解 $u_\varepsilon(x)$ は

$$u_\varepsilon(x)=c(x)\quad \textit{if}\,|x|\le 1-L\varepsilon^\kappa,$$

したがって $|I\setminus I_\varepsilon|\le 2L\varepsilon^\kappa$ を満たす．ここで $\kappa:=\min\{1/p,1/2\}$ (*resp.* $\kappa:=1/p$).

この定理の $p = 2$ の場合はすでに著者の論文 [13] において（偏微分方程式に対して）示されている（このときは θ の範囲が a の値によらず常に $0 < \theta < 1$ である）．定理 1.1 において，$a = 0$ のときに課す条件 $0 < \theta < p - 1$ は $p \neq 2$ の場合の条件として自然であろうが，$a \neq 0$ のときに課す条件 $0 < \theta < 1$ は p に依存せず，一見不自然に思えるかもしれない．しかしこれは，$a \neq 0$ のときは (1.1) の主要項が I_ε 上で退化特異性をもたない点で $p = 2$ の場合と似ていることを考えると，合点がいくであろう．実際，この条件は次の意味で最適である．

定理 1.2. $a \neq 0$ (*resp.* $a = 0$) かつ $\theta \geq 1$ (*resp.* $\theta \geq p - 1$) とする．このとき任意の $\varepsilon \in (0, \varepsilon_c)$ に対して $u_\varepsilon(x) < c(x)$，したがって $I_\varepsilon = \emptyset$ である．

これらの定理は第 3 章で証明する．定理 1.1 の証明では，$\varepsilon \to 0$ として解 $u_\varepsilon(x)$ を $c(x)$ に近づけた後，$c(x)$ に接するような局所比較関数を構成し，$u_\varepsilon(x)$ と比較する．このような比較関数の構成は，第 2 章において，Díaz らの論文 [5]，[3]，[1] によって開発された「局所エネルギー法」を用いて行う．定理 1.2 の証明では，第 2 章で Vázquez 型の強最大値原理（論文 [16] を参照）を準備し，それを適用する．

我々のアプローチでは，主要項 $-\varepsilon(\phi_p(v_x))_x$ を $c(x)$ を中心にして考えるため，関数

$$\Phi(v_x) = \phi_p(v_x - c_x) + \phi_p(c_x)$$

を導入する．このとき作用素 $v \mapsto -\varepsilon(\Phi(v_x))_x$ は単調であり，$\Phi(0) = 0$，そして条件 (1.2) によって $-\varepsilon(\Phi(v_x))_x$ は平行移動 $-\varepsilon(\phi_p(v_x - c_x))_x$ を表していることに注意する．$\Phi(v_x)$ の $v_x = 0$ におけるオーダーは c_x の値に依存し（補題 2.1），このことが，a の値によって θ の条件が異なる原因となる．

注意 1.1. 多次元の場合は別の機会に譲るが，上記の Φ の代わりに，x 依存の

$$\Phi(x, \nabla v) = \phi_p(\nabla v - \nabla c(x)) + \phi_p(\nabla c(x))$$

を導入することに注意しておく．

2 準備

本章では，定理 1.1，定理 1.2 を証明するための準備として，(1.1) に関連するいくつかの問題の解の性質を調べる．本章を通じて，C は ε と δ とは無関係な定数を表す.

命題 2.1. $u(x)$ を (1.1) の解とし，$Z = \{x \in I : u_x(x) = 0\}$ とする．このとき $u \in C^\alpha(\bar{I}) \cap C^\beta(\bar{I} \setminus Z)$ である．ここで $\alpha = \min\{\langle \frac{p}{p-1} \rangle - 1, \langle q \rangle, \langle \theta \rangle + 1\}\ (\geq 1)$, $\beta = \min\{\langle q \rangle, \langle \theta \rangle + 1\}\ (\geq 2)$，そして

$$\langle r \rangle = \begin{cases} \infty & \textit{if } r \textit{ is an even integer,} \\ \min\{n \in \mathbb{Z} : n \geq r\} & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

さらに，もし $p > 2$ かつ I 上で $u(x) < c(x)$ であれば，u は I 上で 2 階微分可能ではない.

注意 2.1. (i) $p > 2$ (resp. $1 < p \leq 2$) ならば $\alpha = 1$ (resp. $\alpha \geq 2$). したがって特に $u \in C^1(\bar{I})$ (resp. $C^2(\bar{I})$).

(ii) $p = \frac{2m+2}{2m+1}$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ であり，q と θ がともに偶数であれば，$u \in C^\infty(\bar{I})$.

(iii) $p > 2$，そして $a \neq 0$ (resp. $a = 0$) かつ $\theta \geq 1$ (resp. $\theta \geq p - 1$) とする．このとき，定理 1.2 により I 上で $u(x) < c(x)$ である．したがって u は I 上で 2 階微分可能ではない.

証明 (命題 2.1). 前半の証明は Ôtani の論文 [11] と同様なので省略する.

後半を示す．$p > 2$ とし，$u(x)$ は I 上で 2 階微分可能であるとする．このとき (1.1) の方程式は

$$-\varepsilon(p-1)|u_x(x)|^{p-2}u_{xx}(x) = \phi_q(u(x))f(c(x) - u(x)) \quad \text{for all } x \in I$$

とできる．$u(x)$ が最大となる点を $x_0 \in I$ とする：$u_x(x_0) = 0$ かつ $u(x_0) > 0$. ゆえに $u(x_0) = c(x_0)$ となり，$u(x) < c(x)$ であることに反する. □

固有値問題

$$\begin{cases} -(\phi_p(z_x))_x = \lambda\phi_p(z) & \text{in } I, \\ u(\pm 1) = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

の主固有値を λ_1 とし，対応する固有関数のうち $\|z\|_\infty = \max\{z(x) : x \in I\} = 1$ であるものを $z(x)$ とする．$z(x) > 0$ であることはよく知られている．この $z(x)$ を用いて，(1.1) の解 $u_\varepsilon(x)$ が $\varepsilon \to 0$ のとき I 上でコンパクト一様に $c(x)$ へと収束することを示す．

$I(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}$, $I(r) = I(0, r)$ と表す．特に $I(1) = I$ である．

命題 2.2. 任意の $\delta \in (0, 2d)$ に対して，次を満たす定数 $K > 0$, $\varepsilon_* \in (0, \varepsilon_c)$ が存在する：$K\varepsilon_*^{1/p} < 1$ であり，かつ $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*)$ ならば

$$c(x) - \delta \le u_\varepsilon(x) \le c(x) \quad \textit{for all } x \in I(1 - K\varepsilon^{1/p}).$$

証明． $\overline{u}(x) = c(x)$ が (1.1) の優解であることは (1.2) から明らか．

劣解を構成する．$\bar{I}$ で $c(x)$ は一様連続であるから，ある $r > 0$ が存在して，各 $x_0 \in I$ に対して $f(c(x) - u) \ge \sigma = f(\delta/2)$ がすべての $x \in I(x_0, r) \cap I$ と $u \in [0, c(x_0) - \delta]$ に対して成り立つ．定数 $K > 0$ を $K^p > \lambda_1 \|c\|_\infty^{p-q}/\sigma$ となるようにとり，次いで $\varepsilon_* \in (0, \varepsilon_c)$ を $K\varepsilon_*^{1/p} < r$ となるようにとる．

任意の $\varepsilon < \varepsilon_*$ と $x_0 \in I(1 - K\varepsilon^{1/p})$ をとる．このとき関数 $\underline{z}(x) = z((x - x_0)/(K\varepsilon^{1/p}))$ は次を満たす．

$$\begin{cases} -\varepsilon(\phi_p(\underline{z}_x))_x = \dfrac{\lambda_1}{K^p}\phi_p(\underline{z}) & \text{in } I(x_0, K\varepsilon^{1/p}), \\ \underline{z}(x_0 \pm K\varepsilon^{1/p}) = 0. \end{cases}$$

したがって，関数

$$\underline{u}(x) = \begin{cases} (c(x_0) - \delta)\underline{z}(x), & x \in I(x_0, K\varepsilon^{1/p}), \\ 0, & x \in I \setminus I(x_0, K\varepsilon^{1/p}) \end{cases}$$

は (1.1) に対する非負値の劣解である．実際，$c(x_0) \geq 2d > \delta$ であるから，任意の $\varphi \in W_0^{1,p}(I)$, $\varphi \geq 0$ に対して

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(c(x_0)-\delta)^{q-1}}\left(\varepsilon\int_I \phi_p(\underline{u}_x)\varphi_x\,dx - \int_I \phi_q(\underline{u})f(c(x)-\underline{u})\varphi\,dx\right)\\
&\quad\leq -\varepsilon\int_{I(x_0,K\varepsilon^{1/p})}(c(x_0)-\delta)^{p-q}(\phi_p(\underline{z}_x))_x\varphi\,dx - \sigma\int_{I(x_0,K\varepsilon^{1/p})}\phi_q(\underline{z})\varphi\,dx\\
&\quad= \int_{I(x_0,K\varepsilon^{1/p})}\left(\frac{\lambda_1(c(x_0)-\delta)^{p-q}}{K^p}|\underline{z}|^{p-q}-\sigma\right)\phi_q(\underline{z})\varphi\,dx\\
&\quad\leq \left(\frac{\lambda_1\|c\|_\infty^{p-q}}{K^p}-\sigma\right)\int_{I(x_0,K\varepsilon^{1/p})}\phi_p(\underline{z})\varphi\,dx \leq 0.
\end{aligned}$$

$\underline{u} < \overline{u}$ であるから，(1.1) の解 u^* で $\underline{u} \leq u^* \leq \overline{u}$ となるものが存在する（例えば Deuel と Hess の論文 [2] を参照）．第 1 章で述べたように，(1.1) の解は一意的である．ゆえに $u^* = u_\varepsilon$ であるから $\underline{u} \leq u_\varepsilon \leq \overline{u}$. 特に $c(x_0) - \delta \leq u_\varepsilon(x_0) \leq c(x_0)$ が任意の $x_0 \in I(1 - K\varepsilon^{1/p})$ に対して成り立つ． □

第 3 章で見るように，問題 (1.1) に対する局所比較関数を構成する際に，関数

$$\Phi_a(\eta) = \phi_p(\eta - a) + \phi_p(a)$$

が重要な役割を果たす．ここで a は関数 $c(x)$ の勾配，今の場合は 1 次関数 (1.3) の傾き（定数）である．次の補題は，関数 $\Phi_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の $\eta = 0$ におけるオーダーが，$a \neq 0$ のときは 1，$a = 0$ のときは $p-1$ であることを示している．

補題 2.1. $a \neq 0$ ならば，任意の $\eta \in \mathbb{R}$ に対して

$$\Phi_a(\eta)\eta \geq \min\{p-1, 2^{2-p}\}(|\eta - a| + |a|)^{p-2}|\eta|^2, \tag{2.2}$$

$$|\Phi_a(\eta)| \leq \max\{p-1, 2^{2-p}\}(|\eta - a| + |a|)^{p-2}|\eta|. \tag{2.3}$$

$a = 0$ ならば $|\Phi_0(\eta)| = |\eta|^{p-1}$.

証明. $|\Phi_0(\eta)| = |\eta|^{p-1}$ は明らかなので，以下 $a \neq 0$ とする．平均値定理より

$$\Phi_a(\eta)\eta = (p-1)|\eta|^2\int_0^1 |t\eta - a|^{p-2}\,dt, \tag{2.4}$$

$$|\Phi_a(\eta)| = (p-1)|\eta|\int_0^1 |t\eta - a|^{p-2}\,dt. \tag{2.5}$$

任意の $t \in [0,1]$ に対して $|t\eta - a| = |t(\eta - a) - (1-t)a| \le |\eta - a| + |a|$ であるから，$1 < p \le 2$ であれば (2.4) より (2.2) が従い，$p \ge 2$ であれば (2.5) より (2.3) が従う．

残りのケースを調べる．$t_0 = |a|/(|\eta - a| + |a|) \in (0,1]$ とすれば

$$|t\eta - a| \ge |t|\eta - a| - (1-t)|a|| = (|\eta - a| + |a|)|t - t_0|.$$

$p > 2$ (resp. $1 < p < 2$) のとき，任意の $t_0 \in (0,1]$ に対して $\int_0^1 |t - t_0|^{p-2}\,dt \ge$ (resp. $\le$) $2\int_0^{1/2} z^{p-2}\,dz = 2^{2-p}/(p-1)$ である．よって (2.4) (resp. (2.5)) より (2.2) (resp. (2.3)) が従う． □

局所比較関数が $c(x)$ に接することを示すための補助関数を構成する．Λ を正の定数とする．$x_0 \in I$, $\delta > 0$ と $\varepsilon \in (0,1)$ を，$I(x_0,R) \subset I$, $R = \varepsilon^\kappa/\delta^\theta$ となるようにとる．ここで

$$\kappa = \begin{cases} \min\{1/p, 1/2\} & \text{if } a \ne 0, \\ 1/p & \text{if } a = 0. \end{cases}$$

以上の設定の下で，次の境界値問題を考える．

$$\begin{cases} -\varepsilon(\Phi_a(w_x))_x + \Lambda w^\theta = 0 & \text{in } I(x_0,R), \\ w(x_0 \pm R) = \delta. \end{cases} \tag{2.6}$$

Φ_a の単調性に注意すれば，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，(2.6) の解 $w \in C^1(\overline{I(x_0,R)})$ は一意的に存在し，$I(x_0,R)$ 上で $0 \le w \le \delta$ を満たす（証明は省略する）．次の補題は $w_x(x)$ の L^∞ 評価を与える．

補題 2.2. $w(x)$ を (2.6) の解とする．このとき

$$|a| \le |w_x(x) - a| + |a| \le C\varepsilon^{-\frac{1-\kappa}{p-1}} \quad \textit{for all } x \in I(x_0,R).$$

ここで C は a, p, Λ にのみ依存する定数である．

証明． 第 1 の不等式は明らかなので，第 2 の不等式を示す．解 $w(x)$ が最小となる点を $y \in I(x_0, R)$ とする：$w_x(y) = 0$．方程式を y から x まで積分して

$$\phi_p(w_x(x) - a) = -\phi_p(a) + \frac{\Lambda}{\varepsilon}\int_y^x w(\xi)^\theta \, d\xi.$$

ゆえに

$$|w_x(x) - a|^{p-1} + |a|^{p-1} \leq 2|a|^{p-1} + \frac{2\Lambda}{\varepsilon^{1-\kappa}} \leq C\varepsilon^{-(1-\kappa)}.$$

これから問題の不等式を得る． □

問題 (2.6) の境界値 $\delta > 0$ を十分小さくとると，解 $w(x)$ にデッドコア $\{x \in I : w(x) = 0\}$ が存在することを証明する．領域の半径 $R = \varepsilon^\kappa/\delta^\theta$ はそれに応じて大きくなり，デッドコアは任意の $\varepsilon > 0$ に対して存在することに注意する．

命題 2.3. $w(x)$ を (2.6) の解とする．

(i) $a \neq 0$ かつ $0 < \theta < 1$ ならば，ε, δ, x_0 に無関係な定数 $M > 0$ が存在して，任意の $x \in I(x_0, (1 - M\delta^k)R)$ に対して $w(x) = 0$ が成り立つ．ここで

$$k = \theta + 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\theta + 1}\right)^{-1}.$$

(ii) $a = 0$ かつ $0 < \theta < p - 1$ ならば，ε, δ, x_0 に無関係な定数 $M > 0$ が存在して，任意の $x \in I(x_0, (1 - M\delta^k)R)$ に対して $w(x) = 0$ が成り立つ．ここで

$$k = \theta + 1 - \left(\frac{p-1}{p} + \frac{1}{\theta + 1}\right)^{-1}.$$

いずれの場合も，$\delta < M^{-1/k}$ ならば $w(x_0) = 0$．

証明． 一般性を失うことなく $x_0 = 0$ と仮定してよい．解 $w(x)$ に対して，区間 $(0, R)$ 上の拡散エネルギー関数 $E_D(\rho)$ と吸収エネルギー関数 $E_A(\rho)$ を

$$E_D(\rho) = \int_{-\rho}^{\rho} \Phi_a(w_x(\xi)) w_x(\xi) \, d\xi,$$

$$E_A(\rho) = \int_{-\rho}^{\rho} w(\xi)^{\theta+1} \, d\xi$$

と定義し，総エネルギー関数 $E_T(\rho)$ を

$$E_T(\rho) = \varepsilon E_D(\rho) + \Lambda E_A(\rho)$$

と定義する．$E_T(R)$ は有限値であることに注意する．実際，(2.6) の方程式の両辺に非負値関数 $\delta - w \in W_0^{1,p}(I(R))$ をかけて，区間 $[-R, R]$ において積分すると

$$E_T(R) \leq 2\Lambda\delta^{\theta+1}R = C\delta\varepsilon^{\kappa} \tag{2.7}$$

を得る．

さて，(2.6) の方程式の両辺に w をかけて，区間 $[-\rho, \rho]$ において積分すると，

$$E_T(\rho) = \varepsilon(\Phi_a(w_x(\rho))w(\rho) - \Phi_a(w_x(-\rho))w(-\rho)). \tag{2.8}$$

まず (i) の場合．(2.8) とシュワルツの不等式により

$$\begin{aligned} E_T(\rho)^2 &\leq \varepsilon^2(|\Phi_a(w_x(\rho))|w(\rho) + |\Phi_a(w_x(-\rho))|w(-\rho))^2 \\ &\leq \varepsilon^2(|\Phi_a(w_x(\rho))|^2 + |\Phi_a(w_x(-\rho))|^2)(w(\rho)^2 + w(-\rho)^2). \end{aligned} \tag{2.9}$$

右辺の $|\Phi_a(w_x(\pm\rho))|^2$ を評価しよう．補題 2.1 と補題 2.2 から

$$\begin{aligned} \varepsilon|\Phi_a(w_x(\pm\rho))|^2 &\leq C\varepsilon(|w_x(\pm\rho) - a| + |a|)^{2(p-2)}|w_x(\pm\rho)|^2 \\ &\leq C\varepsilon(|w_x(\pm\rho) - a| + |a|)^{p-2}\Phi_a(w_x(\pm\rho))w_x(\pm\rho) \\ &\leq C\varepsilon^{\ell}\Phi_a(w_x(\pm\rho))w_x(\pm\rho). \end{aligned} \tag{2.10}$$

ここで $\ell = \min\{1 - \frac{1-\kappa}{p-1}(p-2), 1\} = \min\{2/p, 1\} = 2\kappa$ である．(2.10) と

$$\begin{aligned} \frac{dE_D(\rho)}{d\rho} &= \Phi_a(w_x(\rho))w_x(\rho) + \Phi_a(w_x(-\rho))w_x(-\rho), \\ \frac{dE_A(\rho)}{d\rho} &= w(\rho)^{\theta+1} + w(-\rho)^{\theta+1} \end{aligned}$$

であることに注意すると，(2.9) は結局，

$$\begin{aligned} E_T(\rho)^2 &\le C\varepsilon^{2\kappa+1}(\Phi_a(w_x(\rho))w_x(\rho) + \Phi_a(w_x(-\rho))w_x(-\rho))(w(\rho)^2 + w(-\rho)^2) \\ &\le C\varepsilon^{2\kappa+1}\frac{dE_D(\rho)}{d\rho}\left(\frac{dE_A(\rho)}{d\rho}\right)^{\frac{2}{\theta+1}} \\ &\le C\varepsilon^{2\kappa}\left(\frac{dE_T(\rho)}{d\rho}\right)^{1+\frac{2}{\theta+1}} \end{aligned}$$

と評価できる．ゆえに $E_T(\rho)$ に関する微分不等式

$$\frac{dE_T(\rho)}{d\rho} \ge C\varepsilon^{-\kappa\nu}E_T(\rho)^{\nu} \tag{2.11}$$

を得る．ここで

$$\nu = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\theta+1}\right)^{-1} < 1 \quad \text{because } 0 < \theta < 1.$$

区間 $[\rho, R]$ $(0 < \rho < R)$ において (2.11) の両辺を積分してから，(2.7) を用いると

$$\begin{aligned} E_T(\rho)^{1-\nu} &\le E_T(R)^{1-\nu} - (1-\nu)C\varepsilon^{-\kappa\nu}(R-\rho) \\ &\le C\delta^{1-\nu}\varepsilon^{\kappa(1-\nu)} - C\varepsilon^{-\kappa\nu}(R-\rho) \\ &= C\varepsilon^{-\kappa\nu}(\rho - (1 - M\delta^{\theta+1-\nu})R). \end{aligned}$$

ここで $M > 0$ は ε, δ によらない定数である．したがって $E_T((1-M\delta^{\theta+1-\nu})R) = 0$，すなわち $w(x) = 0$ が任意の $x \in I((1 - M\delta^{\theta+1-\nu})R)$ に対して成り立つ．

次に (ii) の場合．このとき $\Phi_0(\eta) = \phi_p(\eta)$ かつ $\kappa = 1/p$ である．(2.8) とヘルダーの不等式により

$$\begin{aligned} E_T(\rho)^p &\le \varepsilon^p(|\Phi_0(w_x(\rho))|w(\rho) + |\Phi_0(w_x(-\rho))|w(-\rho))^p \\ &\le \varepsilon^p(|w_x(\rho)|^p + |w_x(-\rho)|^p)^{p-1}(w(\rho)^p + w(-\rho)^p) \\ &\le C\varepsilon^p\left(\frac{dE_D(\rho)}{d\rho}\right)^{p-1}\left(\frac{dE_A(\rho)}{d\rho}\right)^{\frac{p}{\theta+1}} \\ &\le C\varepsilon\left(\frac{dE_T(\rho)}{d\rho}\right)^{p-1+\frac{p}{\theta+1}}. \end{aligned}$$

よって

$$\frac{dE_T(\rho)}{d\rho} \geq C\varepsilon^{-\frac{\nu}{p}} E_T(\rho)^\nu. \tag{2.12}$$

ここで

$$\nu = \left(\frac{p-1}{p} + \frac{1}{\theta+1}\right)^{-1} < 1 \quad \text{because } 0 < \theta < p-1.$$

(2.12) は (2.11) で $\kappa = 1/p$ とした式だから，証明の残りは (i) と同様である． □

最後に Vázquez 型の強最大値原理を準備する．

命題 2.4. 関数 $g(s)$ は連続で単調非減少，かつ $g(0) = 0$, $g(s) > 0$ $(s > 0)$, そして

$$\int_{0+} \frac{ds}{G(s)^{1/2}} = \infty \quad if\, a \neq 0,\ and \int_{0+} \frac{ds}{G(s)^{1/p}} = \infty \quad if\, a = 0 \tag{2.13}$$

を満たすとする．ここで $G(s) = \int_0^s g(t)\,dt$ である．さらに関数 $u(x) \in C^1(I)$ は $u(x) \geq 0$，かつ

$$-\varepsilon(\Phi_a(u_x))_x + g(u) \geq 0 \quad in\ I$$

を満たすとする．このとき I 上で $u(x) \equiv 0$ か，または I 上で $u > 0$ である．

証明． まず $a \neq 0$ の場合．背理法で示す．$u \not\equiv 0$ が I のある点でゼロになったとしよう．そうすると，集合 $P(u) = \{x \in I : u(x) > 0\}$ は $P(u) \subsetneq I$，すなわち $\partial P(u) \cap I \neq \emptyset$ を満たす．このとき $x_0 \in \partial P(u)$ と $r > 0$ が存在し，$u(x_0) = 0$ かつ区間 $(x_0, x_0 + r]$ または $[x_0 - r, x_0)$ において $u > 0$ である．一般性を失うことなく $(x_0, x_0 + r]$ において $u > 0$，そして x_0 は $u_x(x_0) = 0$ となる内点だとしてよい．

次の補助的な境界値問題を考える．

$$\begin{cases} -\varepsilon(\Phi_a(v_x))_x + g(v) = 0 & \text{in } (x_0, x_0 + r), \\ v(x_0) = 0,\ v(x_0 + r) = u(x_0 + r). \end{cases} \tag{2.14}$$

任意の $\varepsilon > 0$ に対して，(2.14) には一意解 $v \in C^1([x_0, x_0 + r])$ が存在し，$[x_0, x_0 + r)$ において $0 \leq v < u(x_0 + r)$ が成り立つ．

任意の $x \in (x_0, x_0+r]$ に対して $v(x) > 0$ であることを示す．(2.14) の方程式により $\Phi_a(v_x(x))$ は非減少，すなわち $\Phi_a(v_x(x)) \geq 0$，そして $[x_0, x_0+r]$ において $v_x(x) \geq 0$ である．x_1 を $v(x) = 0$ となる最小の x としよう．このとき $0 \leq x_1 < x_0 + r$ であり，v は $[x_1, x_0+r]$ から $[0, u(x_0+r)]$ への全単射であり，

$$\int_{x_1}^{x_0+r} \frac{v_x(x)}{G(v(x))^{1/2}}\,dx = \int_0^{v(x_0+r)} \frac{ds}{G(s)^{1/2}} = \infty. \tag{2.15}$$

ここで (2.13) の前者を用いた．

いま，$v_x(x_1) = 0$ とする．$(G(v))_x = g(v)v_x = \varepsilon(\Phi_a(v_x))_x(v_x - a) + \varepsilon a(\Phi_a(v_x))_x$ だから

$$(G(v))_x = \varepsilon\left(\frac{p-1}{p}|v_x - a|^p + a\Phi_a(v_x)\right)_x.$$

x_1 から x まで積分すると

$$\begin{aligned}
G(v) &= \varepsilon\left(\frac{p-1}{p}(|v_x - a|^p - |a|^p) + a\Phi_a(v_x)\right) \\
&= \varepsilon\int_0^1 \frac{d}{dt}\left(\frac{p-1}{p}|tv_x - a|^p + a\phi_p(tv_x - a)\right)dt \\
&= \varepsilon(p-1)|v_x|^2\int_0^1 t|tv_x - a|^{p-2}\,dt.
\end{aligned}$$

こうして次を得る．

$$G(v) \geq \kappa\varepsilon(p-1)(|v_x - a| + |a|)^{p-2}|v_x|^2. \tag{2.16}$$

ここで $\kappa = \min\{1/p, 1/2\}$ である．実際，$1 < p \leq 2$ の場合は，$|tv_x - a| = |t(v_x - a) - (1-t)a| \leq |v_x - a| + |a|$ が任意の $t \in [0,1]$ について成り立つから (2.16) を得る；$p > 2$ の場合は，補題 2.1 の証明のように $t_0 = |a|/(|v_x - a| + |a|) \in (0,1]$ とすれば $|tv_x - a| \geq (|v_x - a| + |a|)|t - t_0|$ となるから，$\int_0^1 t|t - t_0|^{p-2}\,dt \geq \int_0^1 t|1-t|^{p-2}\,dt = 1/p$ により (2.16) を得るからである．$v \in C^1([x_1, x_0+r])$ だから，関数 $|v_x(x) - a| + |a|$ は上に有界である．よってある定数 $A > 0$ が存在して，(2.16) はさらに $G(v) \geq A|v_x|^2$ となり，これより

$$\int_{x_1}^{x_0+r} \frac{v_x(x)}{G(v(x))^{1/2}}\,dx \leq \frac{r}{A^{1/2}} < \infty$$

を得る．これは (2.15) に反する．

したがって $v_x(x_1) > 0$ であるが，それには $x_1 = x_0$ でなくてはならない．すなわち $v_x(x_0) > 0$ だから $v(x) > 0$ が $(x_0, x_0 + r]$ において成り立つ．

弱比較定理により $[x_0, x_0 + r]$ において $v \le u$ であり，$v_x(x_0) > 0$ であるから，

$$\liminf_{t \to 0^+} \frac{u(x_0 + t) - u(x_0)}{t} > 0.$$

ゆえに $u_x(x_0) > 0$ であるが，これは $u_x(x_0) = 0$ と矛盾する．こうして $a \neq 0$ の場合が示された．

次に $a = 0$ の場合．(2.16) の代わりに $G(v) \ge \varepsilon(p-1)|v_x|^p/p$ を用いれば，(2.13) の後者と矛盾する． □

3 定理の証明

以下では，解 $u_\varepsilon(x)$ を単に $u(x)$ と略記する．

証明 (定理 1.1). $\delta \in (0, d)$ を $M\delta^k < 1$ を満たすようにとり固定する．ここで M と k は命題 2.3 に現れる定数である．条件 (1.2) により，関数 $v(x) = c(x) - u(x)$ は $-\varepsilon(\Phi_a(v_x))_x = -\phi_q(c(x) - v)f(v)$ を超関数の意味で満たす．また

$$\phi_q(c(x) - s)f(s) \ge d^{q-1}Cs^\theta =: \Lambda_1 s^\theta \quad \text{for all } x \in I \text{ and } s \in [0, \delta] \tag{3.1}$$

であり，命題 2.2 によって $\max\{v(x) : x \in I(1 - K\varepsilon^{1/p})\} \le \delta$ が任意の $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*)$ に対して成り立つから，合わせると

$$-\varepsilon(\Phi_a(v_x))_x + \Lambda_1 v^\theta \le 0 \quad \text{in } I(1 - K\varepsilon^{1/p}). \tag{3.2}$$

$\varepsilon_0 \in (0, \varepsilon_*)$ を，$\varepsilon_0 < 1$ かつ $K\varepsilon_0^{1/p} + \varepsilon_0^\kappa/\delta^\theta < 1$ となるように十分小さくとる．任意に $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ と $x_0 \in I(1 - K\varepsilon^{1/p} - R)$ をとる．ただし $R = \varepsilon^\kappa/\delta^\theta$ である．関

数 $w(x)$ を，$\Lambda = \Lambda_1$ のときの (2.6) の解とする：

$$\begin{cases} -\varepsilon(\Phi_a(w_x))_x + \Lambda_1 w^\theta = 0 & \text{in } I(x_0, R), \\ w(x_0 \pm R) = \delta. \end{cases} \tag{3.3}$$

$I(x_0,R) \subset I(1-K\varepsilon^{1/p})$ かつ $v(x_0 \pm R) \le \delta = w(x_0 \pm R)$ であるから，(3.2) より，$v(x)$ は (3.3) の劣解である．ゆえに弱比較定理から $I(x_0,R)$ において $v(x) \le w(x)$ が成り立つ．命題 2.3 を用いれば $0 \le v(x_0) \le w(x_0) = 0$，したがって $u(x_0) = c(x_0)$ がすべての $x_0 \in I(1 - K\varepsilon^{1/p} - R) = I(1 - L\varepsilon^\kappa)$ に対して成り立つ．ここで L は δ に依存する定数である．以上で定理 1.1 が示された． □

証明 (定理 1.2). $u(x)$ を (1.1) の解とする．関数 $v = c - u \ge 0, \not\equiv 0$ は

$$-\varepsilon(\Phi_a(v_x))_x + \Lambda_2 v^\theta \ge 0$$

を満たす．ここで $\Lambda_2 > 0$ はある定数である．$g(s) = \Lambda_2 s^\theta$ とおくと，その原始関数は $G(s) = O(s^{\theta+1})$ $(s \to 0)$ を満たす．よって $\theta \ge 1$ $(a \ne 0)$, $\theta \ge p-1$ $(a = 0)$ のいずれの場合も (2.13) が成り立つ．したがって，命題 2.4 によって，I 上で $v(x) > 0$，すなわち $u(x) < c(x)$ である． □

参考文献

[1] S.N. Antontsev, J.I. Díaz and S. Shmarev, *Energy methods for free boundary problems. Applications to nonlinear PDEs and fluid mechanics*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 48. Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 2002.

[2] J. Deuel and P. Hess, A criterion for the existence of solutions of non-linear elliptic boundary value problems, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **74** (1974/75), 49–54.

[3] J.I. Díaz, *Nonlinear partial differential equations and free boundaries. Vol. I. Elliptic equations*, Research Notes in Mathematics, 106. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1985.

[4] J.I. Díaz and J.E. Saá, Existence et unicité de solutions positives pour certaines équations elliptiques quasilinéaires, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **305** (1987), 521–524.

[5] J.I. Díaz and L. Véron, Local vanishing properties of solutions of elliptic and parabolic quasilinear equations, *Trans. Amer. Math. Soc.* **290** (1985), 787–814.

[6] J. García-Melián and J. Sabina de Lis, Stationary profiles of degenerate problems when a parameter is large, *Differential Integral Equations* **13** (2000), 1201–1232.

[7] M. Guedda and L. Véron, Bifurcation phenomena associated to the p-Laplace operator, *Trans. Amer. Math. Soc.* **310** (1988), 419–431.

[8] Z. Guo, Uniqueness and flat core of positive solutions for quasilinear elliptic eigenvalue problems in general smooth domains, *Math. Nachr.* **243** (2002), 43–74.

[9] S. Kamin and L. Véron, Flat core properties associated to the p-Laplace operator, *Proc. Amer. Math. Soc.* **118** (1993), 1079–1085.

[10] S. Kichenassamy and J. Smoller, On the existence of radial solutions of quasilinear elliptic equations, *Nonlinearity* **3** (1990), 677–694.

[11] M. Ôtani, On certain second order ordinary differential equations associated with Sobolev-Poincaré-type inequalities, *Nonlinear Anal.* **8** (1984), 1255–1270.

[12] S. Takeuchi, Partial flat core properties associated to the p-Laplace operator, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 2007, Suppl., 965–973.

[13] S. Takeuchi, Coincidence sets in semilinear elliptic problems of logistic type, *Differential Integral Equations* **20** (2007), 1075–1080.

[14] S. Takeuchi, Coincidence sets associated with second order ordinary differential equations of logistic type, *Differential Integral Equations* **22** (2009), 587–600.

[15] S. Takeuchi and Y. Yamada, Asymptotic properties of a reaction-diffusion equation with degenerate p-Laplacian, *Nonlinear Anal.* **42** (2000), 41–61.

[16] J.L. Vázquez, A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations, *Appl. Math. Optim.* **12** (1984), 191–202.