

## ソリトンの二次元相互作用 — 実験, 理論, 数値計算の比較

及川 正行 (Masayuki OIKAWA), 辻 英一 (Hidekazu TSUJI)  
九大・応力研 (Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu Univ.)

児玉 裕治 (Yuji KODAMA)  
Department of Mathematics, Ohio State University

### 1 はじめに

浅水波ソリトンの二次元相互作用は Benney & Luke[1] によって摂動法を用いて解析され, 最低次では異なる方向に伝わる Korteweg-de Vries(KdV) ソリトンの重ね合わせであることが示された. ただし, ソリトンの伝播方向が近いときには相互作用が強くなることが示唆された. Miles[2, 3] は再びこの問題を取り上げ, 摂動法が適用できる場合を弱い相互作用, ソリトンの伝播方向が近くてそれが破綻する場合を強い相互作用として区別し, 強い相互作用の場合も解析した. 強い相互作用の場合に Miles が解析したのは本質的に Kadomtsev & Petviashvili II(KPII) 方程式 [4] である. ただし, ある速度で走る系において定常な解のみを考察した. KPII 方程式は KdV 方程式の弱二次元的 ( $x$  方向 (主要な伝播方向) の変化のスケールに比べて,  $y$  方向の変化のスケールがずっと大きいという意味) 拡張であり, 可積分系であることがそのときすでに知られていた. とくに Satsuma[5] は  $N$  ソリトン解を得ていた. しかし, Miles はこの研究 [3] でソリトン共鳴という興味深い現象を発見し, これを当時実験的に知られていた浅水波ソリトンの Mach 反射を理論的に説明するために利用した.

この研究に刺激され, Yajima ら [6] は無衝突プラズマ中のイオン音波ソリトンについても同様のソリトン共鳴が近似的に生じることを理論的に示した. 彼らの扱った方程式は小振幅かつ長波長ならばソリトンの伝播方向のなす角に関係なく成り立つという点に特徴がある. また, Kako & Yajima[7] は Yajima らの導いた方程式について, Funakoshi[8] は浅水波に対する Boussinesq 方程式系について数値シミュレーションを行い, いずれも理論を支持する結果を得た. さらに, イオン音波については Folkes ら [9] および Nishida & Nagasawa[10] によって平面波ソリトンの二次元相互作用の実験が行われ, ソリトン共鳴の存在が確認された.

KPII 方程式に対する Lax 対は Dryuma[11] によって得られており, その後, 逆散乱法の定式化もなされたがあまり具体的な進展は見られなかった [12]. 二次元の逆散乱は一次元に比べて格段に難しいからである.

しかし, 最近になって KPII 方程式におけるソリトンの相互作用を表す解の研究が集中的に行われ, 解の理解や分類が進んだ [13, 14, 15, 16, 17, 18]. ここでは, こうした新しい理論的状況を踏まえ, イオン音波をモデルとして数値計算や過去の実験を再検討する.

### 2 イオン音波

磁場のない無衝突プラズマ中の二次元イオン音波を考える.

イオンの数密度：  $n_0 n$ , 電子数密度：  $n_0 n_e$ , イオンの速度：  $C_s \mathbf{u}$ ,  
 静電ポテンシャル：  $(e/T_e)\Phi$ , 二次元位置ベクトル：  $l\mathbf{x}$ , 時間：  $(l/C_s)t$

のように無次元量  $n, n_e, \mathbf{u}, \Phi, \mathbf{x}, t$  を導入する。ただし,  $n_0$  : プラズマの平衡数密度,  $C_s := (T_e/M)^{1/2}$ ,  $M$  : イオン質量,  $T_e$  : 電子温度 (eV で測る),  $l$  : 波の長さスケール,  $e$  : 素電荷, である。このとき, イオンの質量に比べて電子の質量を無視して, イオン音波を記述する方程式系は

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{u}) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} &= -\nabla\Phi, \\ \delta\nabla^2\Phi &= n_e - n, \\ n_e &= \exp\Phi \end{aligned} \quad (1)$$

となる。ここで,

$$\delta := \frac{\lambda_D^2}{l^2}, \quad \lambda_D^2 := \frac{T_e}{4\pi e^2 n_0} \quad (2)$$

であって,  $\lambda_D$  はデバイ長である。

weakly nonlinear, weakly dispersive ( $\delta \ll 1$ ) とし, さらに,  $\mathbf{u}$  は渦なしと仮定し,

$$\mathbf{u} = \epsilon\nabla f, \quad n = 1 + \epsilon\rho, \quad \Phi = \epsilon\varphi \quad (3)$$

とする。ここで,  $\epsilon \ll 1$  は振幅の目安で,  $\delta = O(\epsilon)$  と仮定する。すると

$$\varphi = \rho + \delta\nabla^2\rho - \frac{1}{2}\epsilon\rho^2 + O(\epsilon^2), \quad \rho = -\frac{\partial f}{\partial t} + O(\epsilon). \quad (4)$$

また,  $O(\epsilon^2)$  を無視して

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \nabla^2 f + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla f)^2 - \delta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 f = 0 \quad (5)$$

が得られる。Yajima らが理論的 [6] あるいは数值的 [7] に調べたのはこの方程式である。この方程式は微小振幅であれば, 相互作用するソリトンの伝播方向に関係なく使えるが, ここでは相互作用するソリトンの伝播方向が近いと仮定しよう。(1), (3) において

$$\xi = x - t, \quad \eta = \epsilon^{1/2}y, \quad \tau = \epsilon t \quad (6)$$

を導入し,

$$\begin{aligned} \rho &= n^{(1)} + \epsilon n^{(2)} + \dots, \\ f &= f^{(1)} + \epsilon f^{(2)} + \dots, \\ \varphi &= \varphi^{(1)} + \epsilon \varphi^{(2)} + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

と展開すれば,

$$n^{(1)} = \varphi^{(1)} = \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \xi} \quad (8)$$

および KP-II 方程式

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial n^{(1)}}{\partial \tau} + n^{(1)} \frac{\partial n^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 n^{(1)}}{\partial \xi^3} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 n^{(1)}}{\partial \eta^2} = 0 \quad (9)$$

を得る. ただし,  $\delta = \epsilon$  とした. これは  $l = \lambda_D / \sqrt{\epsilon}$  とすることにあたる.

$$n^{(1)} = u, \quad \tau = \frac{3\sqrt{3}}{2}T, \quad \xi = \sqrt{3}X, \quad \eta = \sqrt{3}Y \quad (10)$$

と変換すると, KP II 方程式 (9) は

$$\frac{\partial}{\partial X} \left( 4 \frac{\partial u}{\partial T} + 6u \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial^3 u}{\partial X^3} \right) + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = 0 \quad (11)$$

の形になる.

### 3 ソリトン共鳴

KP II 方程式を (11) の形で考える. ただし, 独立変数の記号は  $x, y, t$  を使うことにする:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( 4 \frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (12)$$

Hirota の方法 [19] で 2-ソリトン解まで求めるのは容易である.

$$u(x, y, t) = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log E(x, y, t) \quad (13)$$

によって, 関数  $E(x, y, t)$  を導入すると, bilinear form

$$(4D_x D_t + D_x^4 + 3D_y^2)E \cdot E = 0 \quad (14)$$

が得られる. ここで,  $D_x$  等は Hirota の bilinear operator で

$$D_x^n D_t^m E \cdot E := \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right)^n \left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'} \right)^m E(x, y, t) E(x', y, t') \right]_{x'=x, t'=t} \quad (15)$$

のように定義される. 1-ソリトン解に対する  $E$  は

$$E(x, y, t) = 1 + e^{2\Theta}, \quad \Theta = Kx + Ly - \Omega t + \Theta_0 \quad (16)$$

で与えられる. ただし,  $K, L, \Omega$  は

$$D(\Omega, K, L) := -16K\Omega + 16K^4 + 12L^2 = 0, \quad \Omega = K^3 + \frac{3L^2}{4K} \quad (17)$$

を満たす実定数 (ただし,  $K > 0$  とする),  $\Theta_0$  は任意の実定数である. これが 1-ソリトン解, 詳しく言えば, 1-line soliton 解

$$u = 2K^2 \operatorname{sech}^2 \Theta \quad (18)$$

を与える. (17) はソリトンの分散関係と呼ばれる.

(17) を満たす二組のパラメーター  $(\Omega_1, K_1, L_1), (\Omega_2, K_2, L_2)$  を用いて,

$$\Theta_i = K_i x + L_i y - \Omega_i t + \Theta_{i0}, \quad (i = 1, 2) \quad (19)$$

とすれば,

$$E(x, y, t) = 1 + e^{2\Theta_1} + e^{2\Theta_2} + A_{12} e^{2\Theta_1 + 2\Theta_2}, \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
A_{12} &= -\frac{D(\Omega_1 - \Omega_2, K_1 - K_2, L_1 - L_2)}{D(\Omega_1 + \Omega_2, K_1 + K_2, L_1 + L_2)} \\
&= \frac{4(K_1 - K_2)^2 - (L_1/K_1 - L_2/K_2)^2}{4(K_1 + K_2)^2 - (L_1/K_1 - L_2/K_2)^2} \\
&= \frac{4(K_1 - K_2)^2 - (\tan \psi_1 - \tan \psi_2)^2}{4(K_1 + K_2)^2 - (\tan \psi_1 - \tan \psi_2)^2}
\end{aligned} \tag{21}$$

が 2-ソリトン解に対する  $E$  である.  $\psi_i, (i = 1, 2)$  は  $x$  軸の正方向からソリトンの伝播方向  $(K_i, L_i)$  までの角度である (反時計回りを正とする). ここで,  $K_i, (i = 1, 2)$  は正としている.

KdV 方程式の 2-ソリトン解に対する関数  $E$  の構造も (20) と全く同じである. KdV の場合は常に  $A_{12} > 0$  であるが, KP II の場合は違っている. (21) から

$$(\tan \psi_1 - \tan \psi_2)^2 > 4(K_1 + K_2)^2 \implies A_{12} > 0 \tag{22}$$

$$(\tan \psi_1 - \tan \psi_2)^2 < 4(K_1 - K_2)^2 \implies A_{12} > 0 \tag{23}$$

$$4(K_1 - K_2)^2 < (\tan \psi_1 - \tan \psi_2)^2 < 4(K_1 + K_2)^2 \implies A_{12} < 0 \tag{24}$$

が成り立つが, (13) からわかるように,  $E$  が  $u$  の分母に現れるため,  $A_{12} < 0$  のときには, どこかで必ず  $u$  の分母が 0 となり,  $u$  は singular になる. つまり, (22) または (23) の条件が成り立つとき,  $u$  は regular, (24) の条件が成り立つとき,  $u$  は singular になる. ここでは (22), (23), (24) が成り立つパラメーター領域をそれぞれ, O-領域, P-領域, S-領域と呼ぶことにする. O-領域と P-領域の違いは O-領域では  $A_{12} > 1$ , P-領域では  $0 < A_{12} < 1$  が成り立つという点にある. このことはソリトンの相互作用における position phase shift の符号の違いに反映される. これを見るには解の漸近形を見ればよい. 話を明確にするために,  $L_1/K_1 = \tan \psi_1 > \tan \psi_2 = L_2/K_2$  を仮定すると, すぐわかるように

$\Theta_1 \simeq 0$  :

$$\left. \begin{aligned}
\Theta_2 \rightarrow -\infty (y \rightarrow +\infty) &\implies u \sim 2K_1^2 \operatorname{sech}^2 \Theta_1 \\
\Theta_2 \rightarrow +\infty (y \rightarrow -\infty) &\implies u \sim 2K_1^2 \operatorname{sech}^2 (\Theta_1 + \Delta_{12})
\end{aligned} \right\} \tag{25}$$

$\Theta_2 \simeq 0$  :

$$\left. \begin{aligned}
\Theta_1 \rightarrow -\infty (y \rightarrow -\infty) &\implies u \sim 2K_2^2 \operatorname{sech}^2 \Theta_2 \\
\Theta_1 \rightarrow +\infty (y \rightarrow +\infty) &\implies u \sim 2K_2^2 \operatorname{sech}^2 (\Theta_2 + \Delta_{12})
\end{aligned} \right\} \tag{26}$$

ここで,

$$\Delta_{12} = \frac{1}{2} \log A_{12} \tag{27}$$

であって,  $\Delta_{12}$  は O-領域では正, P-領域では負である.

regular と singular の境界は (21) から

$$D(\Omega_1 \pm \Omega_2, K_1 \pm K_2, L_1 \pm L_2) = 0 \tag{28}$$

となる. (28) で負号のとき,  $E = 1 + e^{\Theta_1} + e^{\Theta_2}$  で,  $u$  の漸近形は

$$u \sim \begin{cases} 2K_1^2 \operatorname{sech}^2 \Theta_1 & (\Theta_1 \simeq 0, \Theta_2 \rightarrow -\infty) \\ 2K_2^2 \operatorname{sech}^2 \Theta_2 & (\Theta_2 \simeq 0, \Theta_1 \rightarrow -\infty) \\ 2(K_1 - K_2)^2 \operatorname{sech}^2 (\Theta_1 - \Theta_2) & (\Theta_1 - \Theta_2 \simeq 0, \Theta_1 \rightarrow +\infty, \Theta_2 \rightarrow +\infty). \end{cases} \tag{29}$$

(28) で正号のとき,  $E = 1 + e^{\Theta_1} + e^{-\Theta_2}$  で,  $u$  の漸近形は

$$u \sim \begin{cases} 2K_1^2 \operatorname{sech}^2 \Theta_1 & (\Theta_1 \simeq 0, \Theta_2 \rightarrow +\infty) \\ 2K_2^2 \operatorname{sech}^2 \Theta_2 & (\Theta_2 \simeq 0, \Theta_1 \rightarrow -\infty) \\ 2(K_1 + K_2)^2 \operatorname{sech}^2(\Theta_1 + \Theta_2) & (\Theta_1 + \Theta_2 \simeq 0, \Theta_1 \rightarrow +\infty, \Theta_2 \rightarrow -\infty). \end{cases} \quad (30)$$

これらは通常の 2-ソリトン解の X 字パターンではなく, Y 字パターンである. (28) は形式的には線形波の 3 波共鳴相互作用の条件と同じである. 従って, このような相互作用をソリトンの共鳴相互作用というのであった.

## 4 (2,2)-ソリトン解

Wronski 行列式で与えられる次の関数  $E$

$$E = \begin{vmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_N \\ g'_1 & g'_2 & \cdots & g'_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_1^{(N-1)} & g_2^{(N-1)} & \cdots & g_N^{(N-1)} \end{vmatrix}, \quad g_n^{(j)} := \frac{\partial^j g_n}{\partial x^j} \quad (31)$$

は  $g_1, g_2, \dots, g_N$  が線形系

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial g}{\partial t} = -\frac{\partial^3 g}{\partial x^3} \quad (32)$$

の一次独立な解であるとき, (13) を通じて KP II 方程式 (12) の解を与える [20].

(32) を満たす簡単な例として

$$e^{\theta_j}, \quad \theta_j = k_j x + k_j^2 y - k_j^3 t + \theta_{j0} \quad (33)$$

の一次結合がある. ここで,  $k_j, \theta_{j0}$  は定数である.

$N = 1$ ,  $g_1 = e^{\theta_i} + e^{\theta_j}$ , ( $k_i < k_j$ ) としよう. このとき,

$$E = g_1 = e^{\theta_i} + e^{\theta_j}. \quad (34)$$

phase  $\theta_i$  を持つ項あるいは phase  $\theta_j$  を持つ項のいずれかが卓越する領域では  $u \simeq 0$  であって, line:  $\theta_i = \theta_j$  に沿って line soliton

$$u = \frac{1}{2}(k_j - k_i)^2 \operatorname{sech}^2 \frac{1}{2}(\theta_j - \theta_i) \quad (35)$$

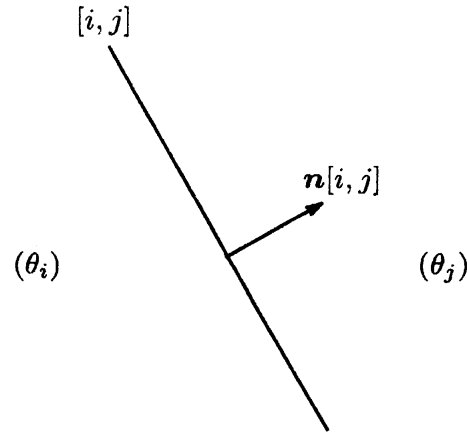
がある. これを  $[i, j]$ -ソリトンと呼ぼう. このソリトンの振幅を  $\alpha[i, j]$ , 傾き  $\frac{dx}{dy}$  を  $\beta[i, j]$  とすると

$$\alpha[i, j] = \frac{1}{2}(k_j - k_i)^2 (= 2K^2), \quad \beta[i, j] := \frac{dx}{dy} = -(k_i + k_j) \left( = -\frac{L}{K} \right) \quad (36)$$

である. 後者はソリトンの伝播方向の傾き  $\gamma[i, j]$  で言えば

$$\gamma[i, j] = k_i + k_j \left( = \frac{L}{K} \right) \quad (37)$$

である.

図1  $[i, j]$ -ソリトン

$N = 2$  で,  $g_1, g_2$  が

$$\begin{aligned} g_1 &= a_{11}e^{\theta_1} + a_{12}e^{\theta_2} + a_{13}e^{\theta_3} + a_{14}e^{\theta_4} \\ g_2 &= a_{21}e^{\theta_1} + a_{22}e^{\theta_2} + a_{23}e^{\theta_3} + a_{24}e^{\theta_4} \end{aligned} \quad (38)$$

で与えられるとしよう. ここで,  $\theta_j$  は (33) であって,

$$k_1 < k_2 < k_3 < k_4 \quad (39)$$

と仮定する. このとき

$$\begin{aligned} E &= \begin{vmatrix} g_1 & g_2 \\ g'_1 & g'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_1 & g'_1 \\ g_2 & g'_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^4 a_{1j}e^{\theta_j} & \sum_{j=1}^4 k_j a_{1j}e^{\theta_j} \\ \sum_{j=1}^4 a_{2j}e^{\theta_j} & \sum_{j=1}^4 k_j a_{2j}e^{\theta_j} \end{vmatrix} = \det(AV), \end{aligned} \quad (40)$$

ここで,  $A$  は (38) の係数行列で

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} e^{\theta_1} & k_1 e^{\theta_1} \\ e^{\theta_2} & k_2 e^{\theta_2} \\ e^{\theta_3} & k_3 e^{\theta_3} \\ e^{\theta_4} & k_4 e^{\theta_4} \end{pmatrix} \quad (41)$$

である. 従って, 行列の積の行列式に関する Binet-Cauchy の公式により

$$E = \sum_{1 \leq r < s \leq 4} (k_s - k_r) A(r, s) \exp(\theta_r + \theta_s) \quad (42)$$

となる. ここで,  $A(r, s)$  は  $A$  の第  $r$  列と第  $s$  列からなる  $2 \times 2$  小行列式である.  $u$  が singular でないためには, これらの小行列式は非負である必要がある.

一般に, この  $E$  関数が生じる解は  $y \rightarrow -\infty$  で漸近形として2つのソリトンをもち,  $y \rightarrow +\infty$  で漸近形としてやはり2つのソリトンをもつ [13, 15]. それゆえ, この解は (2,2)-ソリトンと呼ばれる.

$G$  を正則な  $2 \times 2$  定数行列として,  $A$  を  $GA$  で置き換えると  $\det(GAV) = \det(G)\det(AV)$  だから,  $A$  を  $GA$  で置き換えても  $u$  は不変である. 従って,  $A$  を reduced row-echelon form (RREF) に選べる. また,  $A$  の第  $j$  列に任意の正数を掛けることは位相定数  $\theta_{j0}$  をずらすことと等価である.

$A$  の 1 つの行がただ 1 つの非零要素 (第  $m$  列とする) をもつとしよう. このとき, 零でない小行列式は必ず  $A$  の第  $m$  列を含む. 従って,  $E = e^{\theta_m} E_0$  の形になり,  $u$  は  $E_0$  が生じるものと同じである. これは, はじめからパラメーター  $k_m$  を含まない場合に帰着する. このような場合を除外するためには,  $A$  の行はピボット (最初の非零要素) の他に少なくとも 1 つの非零要素を含む必要がある.

これらのことを考慮して (2,2)-ソリトンは 7 つの異なるタイプに分類されることが示された [18]. さらに  $y \rightarrow \pm\infty$  でどのようなソリトンが現れるかは置換  $\pi = (\pi(1), \pi(2), \pi(3), \pi(4))$  と関係している [18]. 24 個の置換の中, すべての要素が異なる要素にうつるような置換 (derangement と呼ばれる) が 9 個ある. また,  $\pi(i) > i$  であるような  $i$  を  $\pi$  の excedance という. 2 個の excedance をもつ derangement は 7 個であり, その 7 個が異なる (2,2)-ソリトンのタイプに対応する.

2 個の excedance を  $i, j$  とするとき,

$[i, \pi(i)], [j, \pi(j)] : y \rightarrow +\infty$  でのソリトン

それ以外を  $k, \ell$  とすると

$[\pi(k), k], [\pi(\ell), \ell] : y \rightarrow -\infty$  でのソリトン

となる. これは図 2 の open chord ダイアグラムで示される. T-type の関数  $E$  は 6 個の指数関数

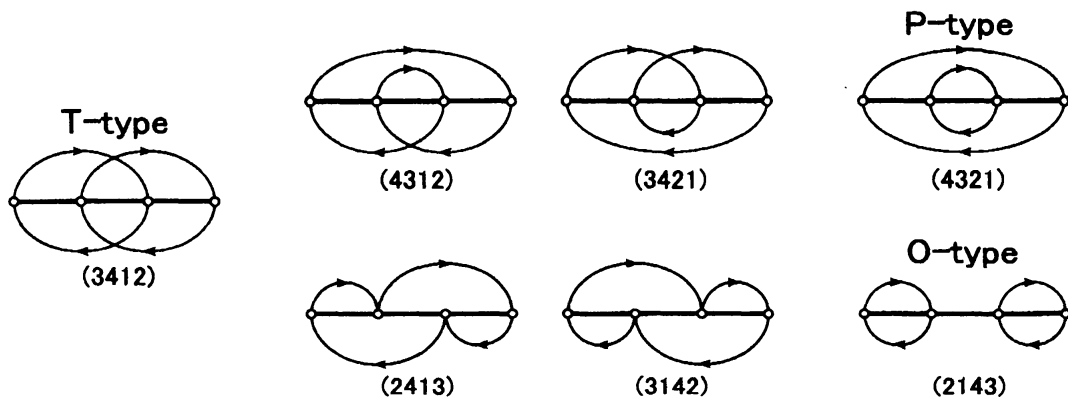


図 2 7 個の (2,2)-ソリトンのタイプに対応する open chord ダイアグラム

項からなり, 中央の 4 個の関数  $E$  は 5 個の指数関数項からなり, O-type, P-type の関数  $E$  は 4 個の指数関数項からなる. O-type, P-type, T-type は  $y \rightarrow \pm\infty$  で同じ振幅と方向をもつ漸近的ソリトンが現れるので, elastic と言われることがある. 中央の 4 個は,  $y \rightarrow +\infty$  での漸近的ソリトンと  $y \rightarrow -\infty$  での漸近的ソリトンが異なる. これらは inelastic と言われることがある.

O-type の 2-ソリトン解, P-type の 2-ソリトン解はそれぞれ O-領域, P-領域で regular な解として存在し, それぞれのパラメーター領域における従来の 2-ソリトン解であり, T-type の 2-ソリトン解は S-領域で存在する (regular である) [17]. O-type, P-type の解は (適当な並進座標系において) 定常な解であるが, 他はすべて非定常な解である. これらの非定常解は最近見出された新

しい解である.

とくに興味深い T-type の 2-ソリトン解と (3142)-type の (2,2)-ソリトン解について少し詳しく述べる.

**T-type の 2-ソリトン解**

最も左のコード図の場合である.  $y \rightarrow \pm\infty$  での漸近的ソリトンは [1,3]-ソリトンと [2,4]-ソリトンである. 係数行列  $A$  は

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -c & -d \\ 0 & 1 & a & b \end{pmatrix},$$

ここで,  $a, b, c, d > 0$  は  $ad - bc > 0$  を満たす自由なパラメーター. 6 個の小行列式  $A(r, s)$  がすべて正なので, 関数  $E$  は 6 個の指数関数項からなる. 関数  $E$  は

$$E = (k_3 - k_1)e^{\theta_1 + \theta_2} + (k_3 - k_1)ae^{\theta_1 + \theta_3} + (k_4 - k_1)be^{\theta_1 + \theta_4} + (k_3 - k_2)ce^{\theta_2 + \theta_3} + (k_4 - k_2)de^{\theta_2 + \theta_4} + (k_4 - k_3)De^{\theta_3 + \theta_4} \quad (43)$$

で与えられる. ここで,  $D := ad - bc > 0$  であって,  $\theta_j$  は (33) で  $\theta_{j0} = 0$  とした

$$\theta_j = k_j x + k_j^2 y - k_j^3 t \quad (44)$$

である. 図 3 に  $y$  軸に関して対称的な場合の鳥瞰図を例示する. また, 図 4 は T-type 2-ソリト

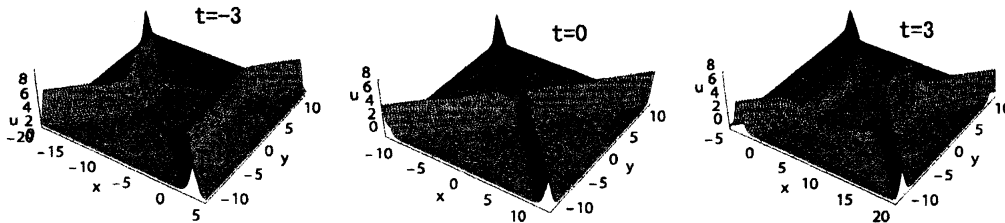


図 3 T-type 2-ソリトン解.  $k_1 = -2, k_2 = -1, k_3 = 1, k_4 = 2, a = 2, b = c = d = 1$ . 左:  $t = -3$ , 中央:  $t = 0$ , 右:  $t = 3$ .

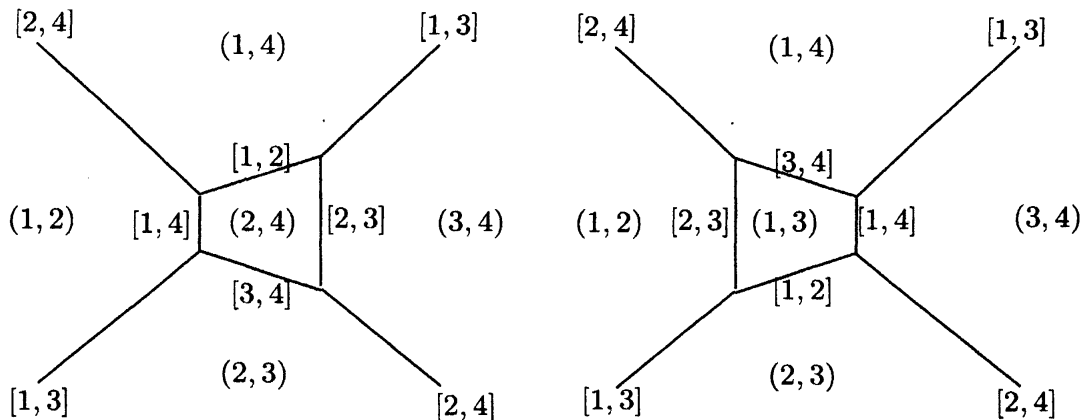


図 4 T-type 2-ソリトン解の平面模式図. 左図は  $t < 0$  に, 右図は  $t > 0$  に対応.

ン解の平面模式図である.  $[i, j]$  は  $[i, j]$ -ソリトンを表し,  $(i, j)$  は  $\theta_i + \theta_j$  が dominant phase であ



るような領域を表す. 4点でソリトンの相互作用が起こっているが, それらはすべてソリトン共鳴であって, T-type 2-ソリトン解は fully resonant solution[13] の一例である.

**(3142)-type (2,2)-ソリトン解**

下段中央のコード図の場合である.  $y \rightarrow +\infty$  で, [1,3], [3,4]-ソリトンが,  $y \rightarrow -\infty$  で, [1,2], [2,4]-ソリトンが現れる. 係数行列  $A$  は

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & -c \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix},$$

ここで,  $a, b, c > 0$  は自由なパラメーター.  $A(1, 2) = 0$  である. 関数  $E$  はこれに対応する項を除く 5 個の指数関数項からなる. 関数  $E$  は

$$E = (k_3 - k_1)e^{\theta_1 + \theta_3} + (k_4 - k_1)be^{\theta_1 + \theta_4} + (k_3 - k_2)ae^{\theta_2 + \theta_3} + (k_4 - k_2)abe^{\theta_2 + \theta_4} + (k_4 - k_3)ce^{\theta_3 + \theta_4} \quad (45)$$

で与えられる.  $y$  軸に関して対称な場合の一例を図 5 に示す. また, 図 6 に  $t > 0$  の場合の平面

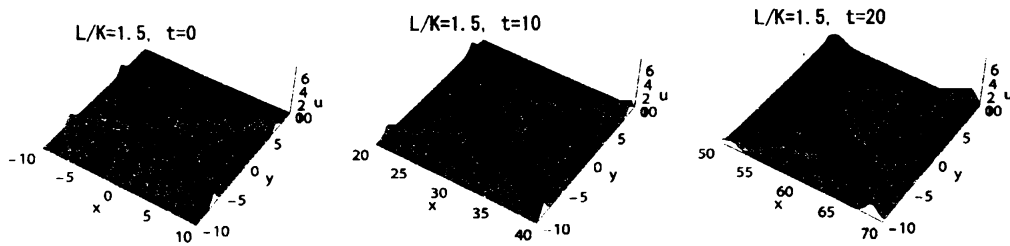


図 5 (3142)-type (2,2)-ソリトン解.  $k_1 = -7/4, k_2 = -1/4, k_3 = 1/4, k_4 = 7/4, a = 4, b = 4/7, c = 4/3$ . 左:  $t = 0$ , 中央:  $t = 10$ , 右:  $t = 20$ .

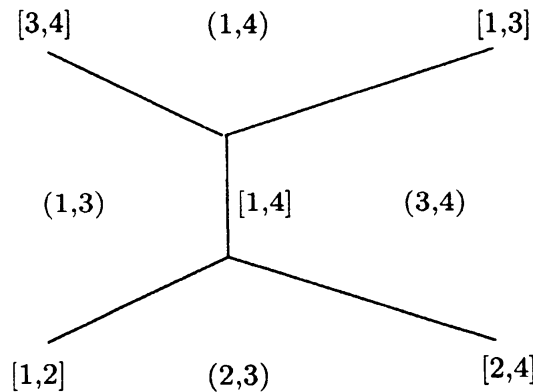


図 6 (3142)-type (2,2)-ソリトン解の平面模式図.  $t > 0$  に対応.

模式図を示す. この解では [1,4]-ソリトンが生成され, 成長していく.

図 5 のように [1,3]-ソリトンと [2,4]-ソリトンが振幅が等しく, 方向が  $y$  軸に関して対称としよう. すなわち

$$\alpha[1, 3] = \alpha[2, 4] =: \alpha, \quad -\gamma[1, 3] = \gamma[2, 4] =: \gamma. \quad (46)$$

このとき,

$$k_3 - k_1 = \sqrt{2\alpha}, \quad k_1 + k_3 = -\gamma, \quad (47a)$$

$$k_4 - k_2 = \sqrt{2\alpha}, \quad k_2 + k_4 = \gamma. \quad (47b)$$

従って

$$k_1 = -\frac{\gamma}{2} - \sqrt{\frac{\alpha}{2}}, \quad k_2 = \frac{\gamma}{2} - \sqrt{\frac{\alpha}{2}}, \quad k_3 = -\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\frac{\alpha}{2}}, \quad k_4 = \frac{\gamma}{2} + \sqrt{\frac{\alpha}{2}}. \quad (48)$$

この場合,  $k_1 < k_2 < k_3 < k_4$  の条件は

$$\gamma < \sqrt{2\alpha} \quad (49)$$

となり, これは (24) において,  $\tan \psi_1 = -\tan \psi_2 = \gamma$ ,  $K_1 = K_2 = \sqrt{\alpha/2}$  としたものと一致する. このことは (3142)-type (2,2)-ソリトン解は (少なくとも今考えているような対称的な場合には) [1,3]-ソリトンと [2,4]-ソリトンからなる従来の 2-ソリトン解が singular であるような領域 (S-領域) において regular な解として存在するというを意味する.

## 5 数値計算との比較

Kako & Yajima[7] は (5) を用いて数値シミュレーションを行ったが, その当時は T-type 2-ソリトン解や (3142)-type (2,2)-ソリトン解のような S-領域で regular な解は知られていなかった. ソリトン共鳴だけが頼りだったのである. 彼らは X 字型の初期値を用いて, T-type 2-ソリトン解に近いパターンを得ていることが注目される.

われわれはいくつかのモデル方程式でソリトンの二次元相互作用について調べてきた [21, 22, 23, 24]. それらのモデル方程式は一次元の可積分方程式を弱二次元化したもので, 二次元化することで可積分性が失われるようなものであった. 従って, 数値計算によって相互作用の性質を調べた. その際, 図 7 のような対称的な V 字型初期値を用いた. これはマッハ反射を模擬したいと

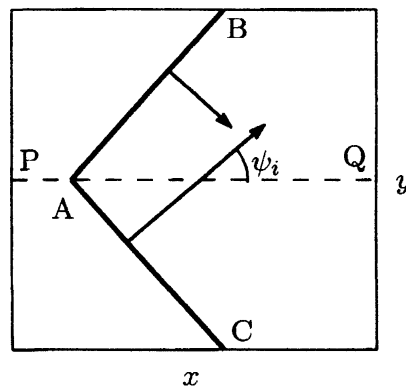


図 7 V 字型初期値の平面模式図. AB, AC が初期に対称に配置された振幅の等しいソリトン.

いう理由と解の漸近的な挙動を調べたいという理由からであった. 計算法は AB, AC に対応するソリトンが無限に長いということを模擬するものである. このような計算では初期ソリトンの振幅  $\alpha$  が 2 のとき,  $\gamma > 2$  ならば, 等角反射が起こり,  $\gamma < 2$  ならば, マッハ反射が起こる (実際

には  $\gamma$  が 2 の付近は数値計算で判別するのは困難だが). このマッハ反射を漸近的に記述するのが (3142)-type と考えられる. 例えば, 図 8 は  $\alpha = 2, \gamma = 1.5$  の対称な V 字パターンから出発

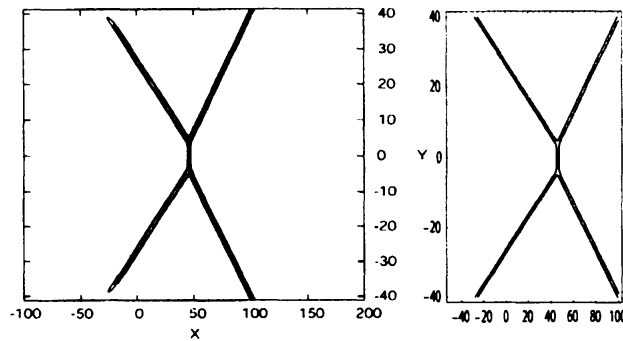


図 8 V 字の初期値に対する数値解 (左側) と (3142)-type (2,2)-ソリトン解 (右側) のパターンの比較.  $\alpha = 2, \gamma = 1.5, t = 15$ .

した数値計算の  $t = 15$  におけるパターンと同じ時刻の (3142)-type 解を比較したものであり, 両者は非常によい一致している. . . この理論解はまさに図 5 に掲げたものである. パターンだけでなく, [1,4]-ソリトンの振幅の理論値と計算値, また, [1,4]-ソリトンの長さの時間発展, 断面の形状, [3,4]-ソリトンの振幅や形状なども非常に良く一致しているのが見出された. われわれは  $\gamma = 1.5$  の他に,  $\gamma = 1.748, 1.898, 2.5$  についても計算したが, いずれも理論解と良い一致をみた. もちろん,  $\gamma = 2.5$  は等角反射 (O-type) に対応するするのであるが.

## 6 実験についての検討

平面イオン音波の二次元相互作用の実験は Folkes ら [9] および Nishida & Nagasawa [10] によって行われた. いずれも double-plasma device を用いて, アルゴンガスを使い,  $T_e = 2 - 2.5 \text{ eV}$ ,  $T_e/T_i = 10 - 20$ ,  $n_0 = (1 - 10) \times 10^8 \text{ cm}^{-3}$  程度の条件で行われた. どちらの実験も図 7 のような V 字パターンを初期値としている. 両者の最も大きな違いは Langmuir probe の大きさの違いである. 前者は大きさ  $1 \times 8 \text{ mm}^2$  の平面型を, 後者は直径  $0.1 \text{ mm}$ , 長さ  $1 \text{ mm}$  の細い probe を用いた. どちらの実験もソリトン共鳴の存在は確認している.

論文に示されている波形から見ると Folkes らの実験では著者らも認めているようになり波の減衰が強いように思われる. 一方, Nishida & Nagasawa の実験では減衰効果をさけるよう十分注意深く測定したことが述べられている. しかし, 波形そのものは示されていないが. ここでは, 主として, Nishida & Nagasawa の実験に焦点をあてる (以下, 彼らの論文を “論文 NN” と呼ぶ).

実験条件では,  $K_1 = K_2 = K, L_1 = -L_2 = L$  だから, (21) と変換式 (6), (10) 等から

$$A_{12} = \frac{L^2/K^2}{L^2/K^2 - 4K^2} = \frac{\epsilon L^2/K^2}{\epsilon L^2/K^2 - 4\epsilon K^2} = \frac{\tan^2(\psi/2)}{\tan^2(\psi/2) - 2a} \quad (50)$$

である. ここで,  $a$  はイオン音波の振幅 (イオン数密度の摂動の無次元量),  $\psi$  は 2 つの初期ソリトンの伝播方向の間の角度である. すると共鳴条件は

$$\tan^2(\psi/2) = 2a \quad (51)$$

である。  $\tan^2(\psi/2) > 2a$  が O-領域に、  $\tan^2(\psi/2) < 2a$  が S-領域に対応する。 彼らの実験では  $\psi = 43^\circ$  が共鳴にあたるであろうということが推測されている。 われわれはこの情報から、  $\epsilon$  を定めた。  $\psi = 43^\circ$  と (51) から、  $a = 0.07758 \dots$  が得られ、これを数値計算での振幅  $\alpha = 2K^2 = 2$  が得られ、さらに  $\epsilon = 0.03879 \dots$  が得られる。

前節で述べた、  $\gamma = 1.5, 1.748, 1.898$  はこの情報から選んだものであり、実験の  $\psi = 33^\circ, 38^\circ, 41^\circ$  にあたる。

論文 NN の FIG.2 に  $\psi = 41^\circ$  のときの相互作用の時間発展のパターンが示されている。 理論的には S-領域なので、(3142)-type が現れると予測されるが、このパターンをそれを判断するのは難しい。 理論的にも [3,4],[1,2]-ソリトンにあたるソリトンと [1,3],[2,4]-ソリトンとの方向があまり変わらないからである。 しかし、[1,4]-ソリトンが生成されて延びてきて、しかも初期振幅との振幅比が理論値 3.8 に近い 3.6 を計測していることから、(3142)-type と言ってもいいかもしれない。

計測されている共鳴条件は実験と理論でよく一致している (論文 NN の FIG.4(b))。 理論的には初期振幅との最大振幅の比が最大で 4 となることが知られているが、実験でかなりそれに近い値を得ている。 その角度  $\psi$  に対する分布は理論的には 図 9 のようになるのであるが、Nishida &

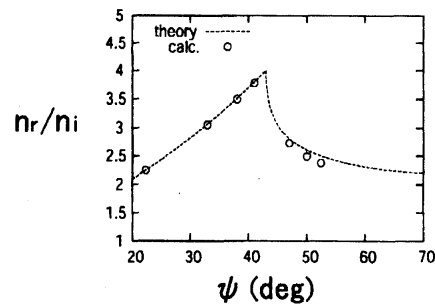


図 9 最大振幅の初期振幅に対する比.

Nagasawa は論文 NN の FIG.4(a) のような破線を補っている。

また、彼らは (position) phase shift にこだわっている。 論文 NN の FIG.3(a) である。 S-領域では [1,3],[2,4]-ソリトンと [3,4],[1,2]-ソリトンの方向が変わるので phase shift は原理的に意味がなくなるはずである。 むしろ、生成される [1,4]-ソリトンの長さを測るべきであろう。 実際にはそれに近いことをやっているのかもしれない。 その図の黒点は [1,4]-ソリトンが直線的に延びていることを示しているように思われる。

これらの実験では (3142)-type を確信させるまでにはいたらない。 もっと精度のよい実験が望まれるが、現在はイオン音波の実験をやるのは難しいようだ。 われわれは浅水波の実験を準備している。

## 7 まとめ

本論文では、ソリトンの二次元的相互作用について、とくに、KP-II 方程式に関する最近の新しい研究から見出された解に基づいて、KP-II 方程式の数値計算との比較やイオン音波に関する実験について述べた。理論と数値計算は非常に良く一致するが、実験は新理論がまだない 1980 年に行われたものであり、当時の理論や数値シミュレーションの影響が強い。現在の理論を踏まえた新しい実験が実施されることが望まれている。

## 参考文献

- [1] Benney, D. J. and Luke, J. C. : J. Math. and Phys. **43** (1964) 309.
- [2] Miles, J. W. : J. Fluid Mech. **79** (1977) 157.
- [3] Miles, J. W. : J. Fluid Mech. **79** (1977) 171.
- [4] Kadomtsev, B. B. and Petviashvili, V. I. : Sov. Phys.- Doklady **15** (1970) 539.
- [5] Satsuma, J. : J. Phys. Soc. Jpn. **40** (1976) 286.
- [6] Yajima, N., Oikawa, M. and Satsuma, J. : J. Phys. Soc. Jpn. **44** (1978) 1711.
- [7] Kako, F. and Yajima, N. : J. Phys. Soc. Jpn. **49** (1980) 2063.
- [8] Funakoshi, M. : J. Phys. Soc. Jpn. **49** (1980) 2371.
- [9] Folkes, P. A., Ikezi, H. and Davis, R. : Phys. Rev. Lett. **45** (1980) 902.
- [10] Nishida, Y. and Nagasawa, T. : Phys. Rev. Lett. **45** (1980) 1626.
- [11] Dryuma, V. S. : Sov. Phys. JETP Lett. **19** (1974) 387.
- [12] Ablowitz, M. J. and Clarkson, P. A. : *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*, (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991)
- [13] Biondini, G. and Kodama, Y. : J. Phys. A **36** (2003) 10519.
- [14] Kodama, Y. : J. Phys. A **37** (2004) 11169.
- [15] Biondini, G. and Chakravarty, S. : J. Math. Phys. **47** (2006) 033514.
- [16] Biondini, G. and Chakravarty, S. : Math. Comput. Simul. **74** (2007) 237.
- [17] Biondini, G. : Phys. Rev. Lett. **99** (2007) 064103.
- [18] Chakravarty, S. and Kodama, Y. : J. Phys. A **41** (2008) 275209.
- [19] Hirota, R. : "Direct method of finding exact solutions of nonlinear evolution equations", in *Bäcklund Transformations, the Inverse Scattering Method, Solitons, and Their Applications* ed. by R. Miura, (Springer-Verlag, Berlin, 1976).
- [20] Freeman, N. C. and Nimmo, J. J. C. : Phys. Lett. A **95** (1983) 1.
- [21] Tsuji, H. and Oikawa, M. : Fluid Dyn. Res. **29** (2001) 251.
- [22] Tsuji, H. and Oikawa, M. : J. Phys. Soc. Jpn. **73** (2004) 3034.
- [23] Tsuji, H. and Oikawa, M. : J. Phys. Soc. Jpn. **76** (2007) 084401.
- [24] Oikawa, M. and Tsuji, H. : Fluid Dyn. Res. **38** (2006) 868.