

人の反応速度を関数化した交通流モデルの安定性解析

東大・工 友枝 明保 (Akiyasu Tomoeda) *

東大・工, (独) 科学技術振興機構 さきがけ 西成 活裕 (Katsuhiko Nishinari)

1 Introduction

現代社会では、「渋滞」と呼ばれる現象がいたるところで見られる。特に車の渋滞現象は輸送効率の低下・エネルギー浪費・環境悪化など、様々な形で我々の生活・産業に損失を与え、その経済損失は年間 12 兆円にもものぼると言われている。しかし、車の渋滞現象のメカニズムは基本的な現象でさえ、未だ完全に解明されているとは言えない。その一つの原因が、車粒子の捉え方の問題である。車粒子というのは作用反作用や慣性の法則が成り立たない自己駆動粒子であるため、その振る舞いが従来の物理法則に従わず、挙動を記述することが困難となる。この際に有効となるのが、ルールベースによるダイナミクスの記述という方法であり、セルオートマトンモデルが最も有効である。その一方、自己駆動粒子といえども集団となるとニュートン粒子のように振る舞うことも知られており、捉える渋滞現象によっては従来の物理法則に従って記述できるとも考えられ、この場合には、微積分をはじめとした強力な数学的解析手法を利用できるというメリットがある。そのため、一次元交通流現象を記述するモデルはその車粒子の捉え方・注目する現象によって様々なモデル化手法があり、数多くのモデルが提案されている [1, 2, 3].

現在、一次元交通流を記述するモデルとして、セルオートマトンモデル [4, 5, 6] や追従モデル [7] (特に、最適速度 (Optimal Velocity, OV) モデル [8]), 流体モデル [9, 10, 11] と呼ばれるモデルが主流となっている。前者二つのモデルは各車を離散的な粒子として扱い、個々の車の挙動を記述したミクロなレベルでのモデルである。それに対して後者の流体モデルでは、車個々の粒子を一次元連続体として捉え、車の流れのマクロ量である系の平均速度や平均密度に焦点をあてたマクロなレベルでのモデルである。このように多岐に渡るアプローチでモデルが提案されているが、モデル化において重要なことは、一次元交通流におけるどういった現象を再現できれば交通流モデルとして“良い”モデルであるかということである。そこで交通流の特性を示す基本的な図として、図 1 のような基本図と呼ばれるものがある。図 1 は首都高速道路における実際のデータであり、横軸に車の占有率 (密度)、縦軸に車の流量をプロットしたものである。この基本図からわかることは、車が少ない間はスムーズに流れているので、車の数が増えてきても流量はほぼ線形に増加している。しかし、ある臨界密度を超えると車の台数が増えるにしたがって右下がりなプロットになっており、車の速度が減少し渋滞していることを意味している。この基本図において最も重要なこと

* Email : tt67055@mail.ecc.u-tokyo.ac.jp

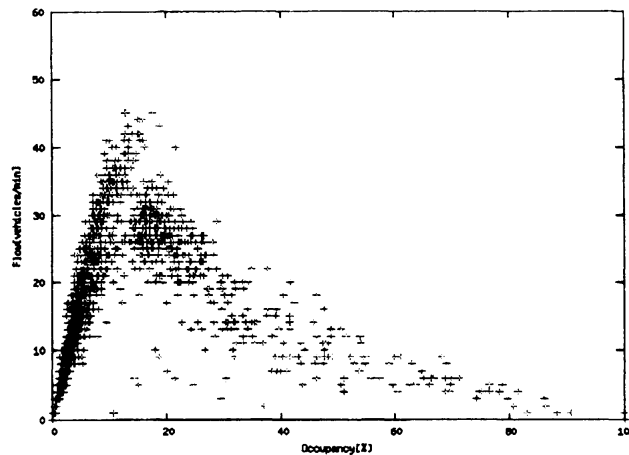


図1 The fundamental diagram of Metropolitan Expressway. The data of a day are plotted per minute.

は、臨界密度付近で右下がりなプロットに遷移していくが、その一方で右上に伸びているオーバーシュート部分が存在することである。この領域が意味することは、車が徐々に混んできているにも関わらずドライバーはスピードを速く保ったまま運転しているという非常に緊張感の高まった状態が存在していることを意味している。実際の交通流において、この状態は数分程度しか観測されず、最終的には低流量部側に遷移することも知られている。この自由相から渋滞相へのジャンプ現象がまさに交通流の本質である流れの不安定性に起因するものであり、この特徴を再現できるモデルが交通流モデルとして“良い”モデルと言える。

数多くあるモデルの中でも、流体モデルの一つである Payne モデル [10] は上記の一様流不安定性を持ったモデルとして有名である。Payne モデルは“Dynamical Wave”の理論に基づき、車の台数の保存則（連続の式）と車粒子の運動方程式による連立微分方程式系で次のように記述される。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\tau} (V_{\text{opt}}(\rho) - v) - \frac{a^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (2)$$

$$\text{ただし, } a^2 = -\frac{1}{2\tau} \frac{\partial V_{\text{opt}}(\rho)}{\partial \rho} > 0 \quad (3)$$

ここで、 $\rho(x, t), v(x, t)$ はそれぞれ場所 x , 時刻 t における粒子の密度と速度を表しており、 τ はドライバーの反応遅れ時間を表す定数である。また、 $V_{\text{opt}}(\rho)$ は最適速度関数と呼ばれるものであり、Payne モデルの文献 [10] では *Greenshield* の観測結果 [12]

$$V_{\text{opt}} = V_0 \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\text{max}}}\right) \quad (4)$$

を用いている。 V_0 は自由走行時の速度を表しており、 ρ_{max} は完全に車が止まってしまうときの密度を表す。Payne モデルは一様流不安定性を示すという点では良いモデルであるが、不安定解を数

値計算すると発散することも知られている。実際の車の流れでは、不安定な流れが安定な流れへと相転移し、安定な衝撃波として伝播するため、Payne モデルそのものでは交通流を記述するモデルとしては不十分である。そのため、Payne モデルに拡散項を導入することで安定化に成功した Kerner-Konhäuser モデル [11] も提案されているが、このモデルも不十分であると言わざるをえない。拡散項というのは等方性を示すものであり、非等方性を持つ車の挙動のダイナミクスに拡散項を導入すると、ある車の擾乱の影響が前後両方に伝播してしまうため、現実的な交通流モデルとは言えないのである。

そこで本研究では、拡散項を入れることなく擾乱が安定化するモデルの構築を目指し、そのアイデアとして Payne モデルのドライバーの反応遅れ時間を表す τ に注目する。本稿では、まず最初に実験の実測データに基づいてドライバーの反応遅れ時間 τ を定数から関数へと拡張し、新しいモデルとして提案し、このモデルに対して逓減擾動法を用いることで、微小擾乱がどのように伝播するのかを理論的に解析したので報告する。

2 New Dynamical Model based on Experimental Data

我々は実際的高速道路の追従走行実験により、図 2 のようなそれぞれの車の速度に関する時系列データを得た。

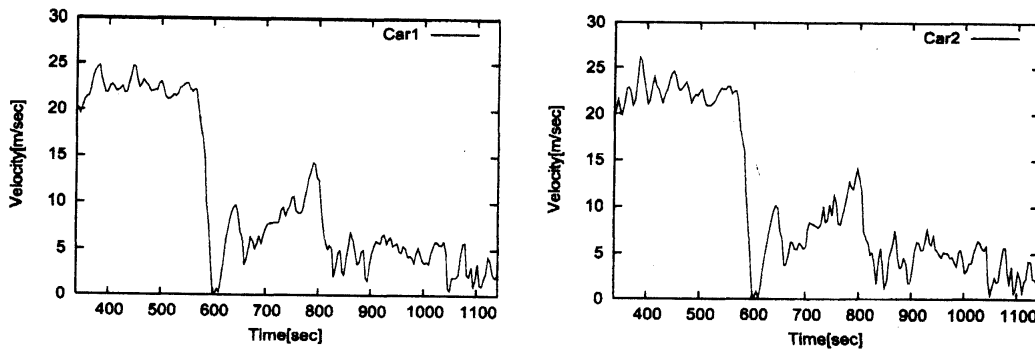


図 2 Time-series data on the velocity of each car. Car1 is leading vehicle and Car2 is following vehicle.

これらの時系列データから自由走行時と混雑時の二つのフェーズに分類し、各フェーズにおいて反応時間の相関を調べる。 i 番目 ($i \in \{1, 2\}$) の車の時刻 t での速度を $v_i(t)$ とおき、反応時間に関する相関係数 $r(\tau)$ を次のように定義する。

$$r(\tau) = \langle v_i(t)v_{i+1}(t+\tau) \rangle_t \quad (5)$$

$$= \frac{\sum_k (v_i(t^{(k)}) - \bar{v}_i) (v_{i+1}(t^{(k)} + \tau) - \bar{v}_{i+1})}{\sqrt{\sum_k (v_i(t^{(k)}) - \bar{v}_i)^2} \sqrt{\sum_k (v_{i+1}(t^{(k)} + \tau) - \bar{v}_{i+1})^2}}, \quad (6)$$

ここで、平均記号 $\langle * \rangle$, $\bar{*}$ はそれぞれアンサンブル平均と時間平均を表すものである。(6) に従って

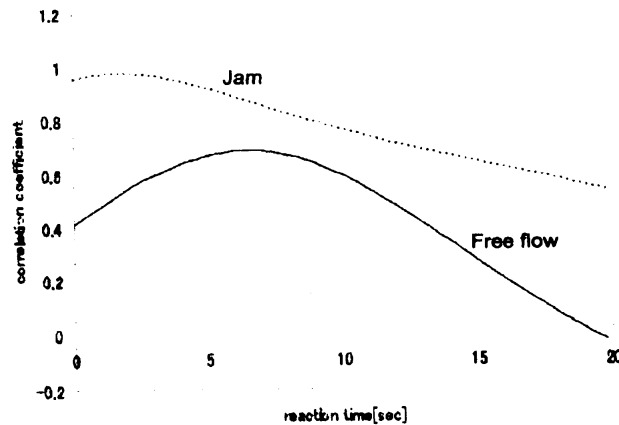


図3 Correlation coefficient are plotted for given each reaction time τ .

各 τ に対する相関係数を導出し、プロットしたものが図3であり、縦軸、横軸はそれぞれ速度の相関係数とドライバーの反応時間を示している。この図から自由走行時と渋滞時では明らかにドライバーの反応時間 τ が異なっており、自由走行時よりも渋滞時の方が反応時間が速くなっていることがわかる。これは、自由走行時のスムーズに走っているときよりも、渋滞時の流れの方が追突する危険性が高くなるため、ドライバーが前の車の挙動に対してより敏感に反応していることを示唆している。

ここで経験的に反応度関数は速度変化に依存していると仮定することで、Payneモデルの運動方程式(2),(3)における τ を関数化し、次のような運動方程式に改良する。

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\tau \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)} \left[V_{\text{opt}}(\rho) - v \tau' \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - v \right] - \frac{a^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (7)$$

$$\text{ただし, } a^2 = -\frac{1}{2\tau \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)} \frac{\partial V_{\text{opt}}(\rho)}{\partial \rho} > 0 \quad (8)$$

ここで、(7)式の右辺の括弧内に新しい項が加わっているが、これは追従モデルからの導出の際に、 τ を関数化したことによって生じる項であることを注意しておく。以上のことから、質量保存則である(1)と(7)を連立することで、交通流を記述する新しい圧縮性流体モデルとして提案する。

3 Linear Stability Analysis

ドライバーの反応時間を関数化した新しいモデルに対する線形安定性解析を行う。一様流解に微小擾乱を加え、

$$\begin{cases} \rho = \rho_0 + \varepsilon \rho_1 \\ v = V_{\text{opt}}(\rho_0) + \varepsilon v_1 \end{cases} \quad (9)$$

とおき, さらに, フーリエ成分を

$$\rho_1, v_1 \sim \exp(i(kx + \omega t)) \quad (10)$$

と定義すると, 分散関係式は

$$\omega + kV_{opt} = \frac{i}{2\tau(0)} \left\{ 1 \pm \sqrt{(1 + 2k^2\tau(0)V'_{opt}(\rho_0)) - 4ik\rho_0\tau(0)V'_{opt}(\rho_0)} \right\} \quad (11)$$

となる. ただし,

$$\tau(0) = \tau \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) \Big|_{\partial v / \partial t = 0} \quad (12)$$

$$V'_{opt}(\rho_0) = \frac{dV_{opt}(\rho)}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_0} \quad (13)$$

を表す. 分散関係式におけるプラス符号は擾乱が前方に伝わることを意味しているが, (10) からプラス符号は減衰する波であることがわかる. つまり, 微小擾乱の伝播方向は本質的に後方のみであり, 車の物理現象と一致していることがわかる. さらに, 分散関係式より安定性条件は以下のように求められる.

$$\frac{1}{2\tau(0)} + \rho_0^2 \frac{dV_{opt}(\rho)}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_0} > 0 \quad (14)$$

図4が坂東らの最適速度関数 [8] を用いた安定性のプロットである. この図から, 反応度関数を導入した新しいモデルでも低密度と高密度領域で安定性を示し, 中密度領域で不安定性を示しており, 実際の交通流の物理現象と対応していることが示された.

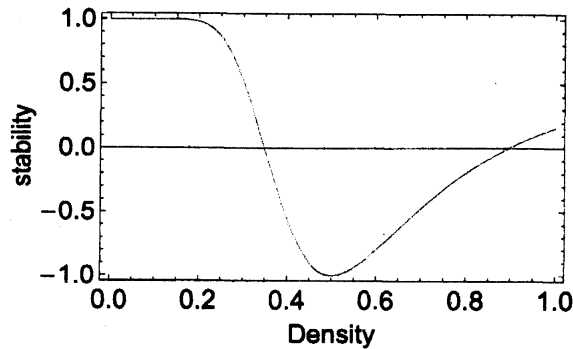


図4 Stability plot under the optimal velocity function [8].

4 Higher Order Approximation

ここでは微小擾乱が従う方程式系を導出することで, 線形安定性解析よりも詳細な非線形効果まで考慮した解析を行う. 長波擾動 ($k \sim 0$) に対して, 以下のような空間 x と時間 t に関する変数変

換を導入する.

$$x \sim \varepsilon \quad (X = \varepsilon(x - c_g t)) \quad (15)$$

$$t \sim \varepsilon^2 \quad (T = \varepsilon^2 t) \quad (16)$$

さらに, 摂動展開

$$\rho \sim \rho_0 + \varepsilon \rho_1 + \varepsilon^2 \rho_2 + \varepsilon^3 \rho_3 + \dots \quad (17)$$

$$v \sim v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \varepsilon^3 v_3 + \dots \quad (18)$$

を反応度関数を導入した新しいモデルに適用し, (1) と (7) のそれぞれについて ε の各べきに対して整理する. 連続の式 (1) から

$$\varepsilon^2: \frac{\partial}{\partial X} (\rho_1(v_0 - c_g) + \rho_0 v_1) = 0 \quad (19)$$

$$\varepsilon^3: \frac{\partial \rho_1}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X} (\rho_2(v_0 - c_g) + \rho_2 v_1 + \rho_0 v_2) = 0 \quad (20)$$

$$\varepsilon^4: \frac{\partial \rho_2}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X} (\rho_3(v_0 - c_g) + \rho_2 v_1 + \rho_1 v_2 + \rho_0 v_3) = 0 \quad (21)$$

が得られ, 運動方程式 (7) から

$$\varepsilon^0: V_{\text{opt}} = v_0, \quad (22)$$

$$\varepsilon^1: V'_{\text{opt}} = \frac{v_1}{\rho_1}, \quad (23)$$

$$\varepsilon^2: (v_0 - c_g) \frac{\partial v_1}{\partial X} = \frac{1}{2\tau(0)} (V''_{\text{opt}} \rho_1^2 + 2V'_{\text{opt}} \rho_2 - 2v_2) + \frac{1}{2\tau(0)\rho_0} V'_{\text{opt}} \frac{\partial \rho_1}{\partial X}, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^3: \frac{\partial v_1}{\partial T} + (v_0 - c_g) \frac{\partial v_2}{\partial X} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial X} \\ = \frac{1}{\tau(0)} \left(\frac{1}{6} V'''_{\text{opt}} \rho_1^3 + V''_{\text{opt}} \rho_1 \rho_2 + V'_{\text{opt}} \rho_3 - v_3 \right) \\ + \frac{1}{2\tau(0)} \left(V'_{\text{opt}} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_2}{\partial X} + V''_{\text{opt}} \frac{\rho_1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial X} - V'_{\text{opt}} \frac{\rho_1}{\rho_0^2} \frac{\partial \rho_1}{\partial X} \right). \end{aligned} \quad (25)$$

が得られる. (20) と (24) から二次の摂動量 ρ_2, v_2 を消去することで, 一次の摂動量 ϕ_1 が支配する方程式として次のような Burgers 方程式が得られる.

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial T} = \left(\frac{2(v_0 - c_g)}{\rho_0} - V''_{\text{opt}} \rho_0 \right) \phi_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial X} + \left(\frac{v_0 - c_g}{2\rho_0} - \tau(0)(v_0 - c_g)^2 \right) \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial X^2} \quad (26)$$

さらに次のべきから (21) と (25) から三次の摂動量 ρ_3, v_3 を消去することで, 二次の摂動量 ϕ_2 を考慮した摂動量 $\Phi = \phi_1 + \varepsilon \phi_2$ が支配する方程式として, 以下のような Higher Burgers 方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial T} = & \left(\frac{2(v_0 - c_g)}{\rho_0} - V''_{\text{opt}} \rho_0 \right) \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial X} + \left(\frac{v_0 - c_g}{2\rho_0} - \tau(0)(v_0 - c_g)^2 \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} \\ & + \varepsilon \left\{ - \left(\frac{3}{2} V''_{\text{opt}} + \frac{1}{2} V'''_{\text{opt}} \rho_0 \right) \Phi^2 \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right. \\ & - \left(\frac{2(v_0 - c_g)^2 \tau(0)}{\rho_0} - 2\tau(0)\rho_0(v_0 - c_g)V''_{\text{opt}} + \frac{1}{2} V''_{\text{opt}} \right) \frac{\partial}{\partial X} \left(\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right) \\ & \left. - \left(\frac{\tau(0)(v_0 - c_g)^2}{\rho_0} - 2(v_0 - c_g)^3 \tau(0)^2 \right) \frac{\partial^3 \Phi}{\partial X^3} \right\} \end{aligned} \quad (27)$$

が得られることがわかった。

5 Conclusion

本稿では、交通流の本質である一様流不安定性を持った Payne モデルにおける反応定数 τ を実験データに基づいて関数化することで、従来の Payne モデルを拡張した新しいモデルを提案した。この反応度関数を導入した新しい交通流モデルの線形安定性解析から、一様流不安定性を持つことが示され、現実の交通流の物理現象を再現していることがわかった。さらに、微小擾乱がどのように伝播するのかを理論的に解析するために、逓減摂動法を用いて微小擾乱が支配される方程式を導出した。この解析により、長波近似において一次の微小擾乱は Burgers 方程式によって記述され、二次の微小擾乱は Higher Burgers 方程式によって記述されることも示せた。

一方、一様流不安定性から生じる自然渋滞の解析は安定状態から不安定状態に変わる近傍、いわば中立安定点近傍での解析であると言える。すなわち、分散関係式を

$$\omega \sim c_0 + c_1 k + c_2 k^2 + c_3 k^3 + \dots \quad (28)$$

と波数展開したときの $c_2 \sim 0$ の近傍での解析であり、 $\omega \sim k^3$ である分散スケーリングが本質となる可能性がある。そこで、拡散スケーリングを用いて導いた支配方程式に対して中立安定条件を導入した支配方程式と、分散スケーリングを用いて導いた支配方程式の擾乱の伝播する性質を詳細に解析する必要がある。しかし、今回提案した新しい交通流モデルの分散関係式 (11) を波数 k で展開した式は

$$\omega + kV'_{opt} = \frac{i}{2\tau(0)} \left[1 \pm \left\{ 1 + \left(4\tau(0)^2 a_0^2 \rho_0 i \right) k \right. \right. \\ \left. \left. + \left(-4\tau(0)^2 a_0^2 \left\{ 1 - 4\tau(0)^2 a_0^2 \rho_0^2 \right\} \right) k^2 + \left(48\tau(0)^4 a_0^4 \rho_0 \left(1 - 4\tau(0)^2 a_0^2 \rho_0^2 \right) i \right) k^3 \dots \right\} \right]$$

となり、中立安定条件を満たす

$$1 - 4\tau(0)^2 a_0^2 \rho_0^2 = 0 \quad (29)$$

に対して、 k の高次項の係数も 0 となってしまう異常な系になっており、逓減摂動法を現在のまま適用することは不可能である。そのため、この問題を解決し、分散スケーリングのもとでの理論解析を行い、本稿で導出した散逸系方程式との詳細な比較解析を行うことが今後の課題である。

参考文献

- [1] D. Chowdhury, L. Santen and A. Schadschneider, Phys. Rep. **329** (2000), 199.
- [2] D. Helbing, Rev. Mod. Phys. **73** (2001), 1067.
- [3] T. Nagatani, Rep. Prog. Phys. **65** (2002), 1331.
- [4] K. Nagel and M. Schreckenberg, J. Phys. I France **2** (1992), 2221.
- [5] K. Nishinari and D. Takahashi, J. Phys. A: Math. Gen., **32** (1999), 93.

- [6] M.Kanai, K.Nishinari and T.Tokihiro, *PHYS. REV. E* **72** (2005), 035102.
- [7] G. F. Newell, *Oper. Res.* **9** (1961), 209.
- [8] M. Bando *et al.*, *PHYS. REV. E* **51** (1995), 1035.
- [9] G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves* (John Wiley and Sons, New York, 1974)
- [10] H. J. Payne, in *Mathematical Models of Public Systems*, edited by G. A. Bekey (1971), 51.
- [11] B. S. Kerner and P. Konhauser, *Phys. Rev. E* **48** (1993), R2355.
- [12] B. D. Greenshields, in *Proceedings of the Highway Research Board*, Washington, D. C., **14** (1935), pp.448.