数理解析研究所講究録
第 1645 巻 2009 年 236-240

タコニス振動における
管の中の音場とエネルギーの流れ

阪大院　工　清水　大 (Dai SHIMIZU)
阪大院　基礎工　杉本　信正 (Nobumasa SUGIMOTO)
Graduate School of Engineering, Osaka University
Graduate School of Engineering Science, Osaka University

1. はじめに

開放端と閉端を持つ 1/4 波長管において，閉端を室温に保った状態で開放端を極低温にすることにより管壁に沿って温度勾配が発生し，結果として管内のヘリウムの気柱が不安定になり振動する現象が Taconis によって 1949 年に報告されている[1]．この管内の気柱の線形安定性解析は Rott によってなされ，ステップ状の温度分布を仮定することにより，臨界曲線が導出されている[2]．後に，矢崎ら[3]は実験によってこの臨界曲線を確かめ良い一致を見ることを報告している．

一方，境界層理論を応用することで，より現実的な連続分布である放物型温度分布に対する臨界曲線の導出に杉本・吉田は近年成功した[4]．しかしながら，これらはいずれも線形近似の下での解析であり，実際に観測される非線形自励振動に至る過渡現象を説明できるモデルが待望されていた．これを受け，杉本・清水は境界層理論を応用した非線形モデルを 2008 年に提案し，数値計算により，初期の不安定化から，振動の飽和，飽和後の定常的な自励振動の出現に至る過程がうまく説明できることを示した[5][6]．

本研究は，上記非線形モデルを用いて，増幅も減衰もしない中立振動時の温度比を数値的に求め，管内の音場を超過圧や流速のみならず，密度，温度，エントロピー，熱流束，境界層外縁の内向き法線方向速度にわたって詳細に調べたものである．管内のエネルギーの流れを調べることで，不安定化の発生や熱音響自励振動が維持される物理的メカニズムも明らかにされた．境界層内を流れるエネルギー（境界層内の欠損量の２次の項）に関しては本理論では求めることができないため，臨界振動に対して既に導かれている公式[7]を用いて議論された．本報告においては，これら結果の概要を記すにとどめる．

2．基礎方程式

既に示してきたように[5]，3 次元の連続の式，運動方程式，エネルギー方程式を管断面にわたり積分し，境界層と主流部を分けることにより，主流部に対して次の無次元基礎方程式が導出される：

$$\frac{1}{\gamma}\frac{\partial\hat{p}}{\partial\hat{t}}+\frac{\partial\hat{u}}{\partial\hat{x}}-\frac{2}{R}4L\hat{v}_b=X, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial\hat{u}}{\partial\hat{t}}+\frac{1}{\gamma\hat{\rho}_e}\frac{\partial\hat{p}}{\partial\hat{x}}=Y, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial\hat{S}}{\partial\hat{t}}+\frac{1}{\hat{T}_e}\frac{\mathrm{d}\hat{T}_e}{\mathrm{d}\hat{x}}\hat{u}=Z, \tag{2.3}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\hat{v}_b\equiv\frac{1}{4L}\sqrt{\Delta\nu_e}\left[-C\frac{\partial^{1/2}\hat{p}}{\partial\hat{t}^{1/2}}+C_T\frac{1}{\hat{T}_e}\frac{\mathrm{d}\hat{T}_e}{\mathrm{d}\hat{x}}\frac{\partial^{-1/2}\hat{u}}{\partial\hat{t}^{-1/2}}\right], && (2.4)\\
&X=\frac{2}{R}4L\hat{p}\hat{v}_b-\frac{1}{\gamma}\hat{u}\frac{\partial\hat{p}}{\partial\hat{x}}-\hat{p}\frac{\partial\hat{u}}{\partial\hat{x}}, && (2.5)\\
&Y=-\hat{u}\frac{\partial\hat{u}}{\partial\hat{x}}-\frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{\hat{\rho}_e+\hat{\rho}}-\frac{1}{\hat{\rho}_e}\right)\frac{\partial\hat{p}}{\partial\hat{x}}, && (2.6)\\
&Z=-\hat{u}\frac{\partial\hat{S}}{\partial\hat{x}}, && (2.7)\\
&\hat{\rho}=\left[\left\{(1+\hat{p})/\mathrm{e}^{\gamma\hat{S}}\right\}^{1/\gamma}-1\right]\hat{\rho}_e. && (2.8)
\end{aligned}\right.$$

ここで，ρ,u,p,S はそれぞれ，密度，軸方向の速度，圧力，エントロピーを表す．v_b は管の各断面における境界層外縁での内向き法線方向速度を表し，±1/2 階微分は以下の式で定義される：

$$\frac{\partial^{\pm1/2}p}{\partial t^{\pm1/2}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{t}\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\frac{\partial^{1/2\pm1/2}p(x,\tau)}{\partial\tau^{1/2\pm1/2}}\mathrm{d}\tau, \tag{2.9}$$

また，添え字 e は平衡状態における量を示し，[$\hat{}$]を付けた量は攪乱である．無次元化は室温での値を用いて行う．x,t に関しては入力波の代表波長 $4L$，代表周期 $\Delta=4L/a_L$ を用いて無次元化する．ただし，a_L は室温での音速，L は管長さである．ν は動粘性係数，γ は比熱比，C,C_T はプラントル数と比熱比で決定される定数である．なお，エネルギー方程式と状態方程式を用いて連続の式より超過圧に関する発展方程式を導出した．各方程式の非線形項を右辺にまとめ，それぞれ X,Y,Z で表す．

3．初期・境界値問題の設定

管に沿って滑らかな勾配を有する次の温度分布を考える：

$$\hat{T}_e=\frac{G(\hat{x})-G(0)}{1-G(0)}+\frac{1}{n}\left[\frac{1-G(\hat{x})}{1-G(0)}\right], \tag{3.1}$$

$$G(\hat{x}) = \frac{\tanh[\hat{\beta}(\hat{x}+\hat{x}_c)] - \tanh[\hat{\beta}(\hat{x}-\hat{x}_c)]}{\tanh[\hat{\beta}(1+\hat{x}_c)] - \tanh[\hat{\beta}(1-\hat{x}_c)]}, \tag{3.2}$$

ここでnは室温を最低温度で割った温度比，$\hat{x}_c$は勾配が最大となる位置，$\hat{\beta}$は勾配の大きさを決めるパラメータである．なお開放端を$\hat{x}=0$，閉端を$\hat{x}=1/4$とする．

時刻$\hat{t}=0$での初期条件としては，速度を与え超過圧力はゼロにとる：

$$\hat{u} = U(x),\ \ \hat{p} = 0. \tag{3.3}$$

一方，境界条件として，開放端では超過圧$\hat{p}=0$，閉端では，底での温度境界層を考慮して，

$$\hat{u} = \frac{C-1}{\gamma}\frac{\sqrt{\Delta\nu_e}}{4L}\frac{\partial^{1/2}\hat{p}}{\partial\hat{t}^{1/2}} \quad \text{at } \hat{x} = 1/4, \tag{3.4}$$

を与える．初期流速Uについては，温度勾配のない管で粘性を無視した場合の線形の基本最低次の固有 1/4 波長モードに相当して，流速で与え超過圧は零とする．振幅は3×10^{-3}とし，室温での音速の 0.3%とする．なお，管半径と長さはそれぞれ$R=0.01\,[\mathrm{m}]$，$l=2\,[\mathrm{m}]$とし，管内気体はヘリウムとする．

4．シミュレーションの結果

4.1 管内の音場

管全体にわたって比較的緩やかな勾配が存在する$\hat{\beta}=15$の場合に，振幅が減衰も増幅もしない中立振動は温度比$n=35.5$のときに発生する．この時，超過圧や局所音速に対する流速の 1 周期にわたる平均値は，僅かに 0 でない値を持つが，変動は概ね正負の偏りなくほぼ「対称」に振動する．これに対し，超過密度や温度，エントロピーの変動振幅は，超過圧の振幅に比べはるかに大きく，また正負の対称性も崩れる結果，平均値も局所的にゼロでないことが分かった．超過温度を例に取ると，開放端に近い側で負の平均値を示し，その振幅は最大で局所温度の 7 パーセントに達する．これは，中立振動時には開放端側の低温媒質が閉端側へ僅かに変位した状態で振動していることを意味している．

4.2 境界層から主流への押し込み仕事

次に，振動振幅の減衰，中立，増幅を決定付ける物理的メカニズムについて議論する．境界層が主流に対してする押し込み仕事を 1 周期にわたって平均した値をそれぞれの場合について調べると，いずれの場合も，開放端側で正，閉端側で負となることが分かる．これは開放端側で境界層は主流に仕事をし，閉端側で主流に仕事をされることを示す．つまり，熱浴からの熱エネルギーが，押し込み仕事として開放端側で主

流に入力され，閉端側で熱として出力されることを示している．これは，開放端側の境界層が原動機，閉端側がヒートポンプとして機能していることを意味する．更にこれらの値を空間方向に開放端側から積分すると，減衰，中立，増幅振動に対してそれぞれ負，概ね0，正の値となることが分かった．これにより，押し込み仕事の観点から減衰，中立，増幅の物理的メカニズムが説明できることが分かった．

4.3 中立振動時の平均音響エネルギー流束

主流及び境界層内のエネルギーの流れは臨界振動に対して導かれた公式を用いることにより，圧力振幅の関数として計算することができる(7)．本報告では，中立振動時の35周期にわたる振動をフーリエ変換し，その最低次の値から圧力振幅を求め，各種平均エネルギーの計算に用いる．

一方，主流部及び境界層内の平均音響エネルギー流束は公式を用いなくとも数値計算の結果のみから計算することができる．主流部では正，境界層内では負の値を示し，それぞれ，平均音響エネルギー流束が開放端から閉端へ，境界層内では逆に閉端から開放端へエネルギーが流れていることを示す．またこれらの合計である管断面にわたる平均音響エネルギー流束は，管の中央付近から開放端及び閉端に向かって流れ，温度分布が放物型であった以前の結果と一致する(7)．それらの結果について，漸近公式を用いた結果と比較すると，閉端で僅かに誤差が出るが，全ての位置において良く一致する．これは，公式の有効性を示し，数値計算の結果からでは算出できない境界層内の2次量を含むエンタルピー流束や熱流束の見積もりにも有効であることが期待できる．

4.4 エンタルピー流束と熱流束

主流部における超過エンタルピー流束は，線形の場合，音響エネルギー流束と最低次において一致する．しかしながら，温度勾配が最大となる位置$\hat{x} = \hat{x}_c$付近で，高次の非線形性に伴う対流熱流束が現れることが分かった．また，境界層内のエンタルピー流束と対流熱流束は閉端付近の僅かな領域を除いて負の値となり，主流の値と比較すると遥かに大きいことが分かった．これは，エンタルピーと熱流束が，熱粘性効果が支配的な境界層内で主に流れていることを示す．

次に管壁から管内に流れる伝導熱流束を計算する．既に示してきた線形の伝導熱流束ではなく(4)，超過エンタルピーを管断面にわたって積分することにより計算すると，伝導熱流束は管の中央付近で正となり，開放端及び閉端付近で負となり開放端で最小となる．これは管中央付近を通して伝導熱流束が気体に流れ，その一部は閉端に向かて流れ，残りは開放端に向かって流れ，系外に流出することを示す．しかしながら，伝導熱流束の管全体にわたる合計は中立振動の場合，概ね0となることが分かった．

5. 結論

臨界振動が発生する温度比の場合に，各物理量の詳細な時空間場の変動を調べ，超過圧や流速に比べて，密度，温度，エントロピーの変動が極めて顕著である事が明らかになった．初期の気体の不安定化やその後に発生する自励振動が維持されるメカニズムは押し込み仕事の観点から説明できることを示した．また，自励振動が発生しているときに，主流部及び境界層内を定常的に流れる平均エネルギーを求め，管全体にわたるエネルギー流れを明らかにした．

参考文献

(1) K. W. Taconis, J. J. M. Beenakker, A. O. C. Nier and L. T. Aldrich, "Measurements concerning the vapour-liquid equilibrium of solutions of He^3 in He^4 below 2.19°K", *Physica.* 15, 733-739 (1949).

(2) N. Rott, "Thermally driven acoustic oscillations, Part II: stability limit for helium", *Z. Angew. Math. Phys.* 20, 54-72 (1973).

(3) T. Yazaki, A. Tominaga and Y. Narahara, "Experiments on thermally driven acoustic oscillations of gaseous helium," *J. Low Temp. Phys.*, 41, 45-60 (1980).

(4) N. Sugimoto and M. Yoshida, "Thermoacoustic oscillations of a gas in a tube. Part 1. Derivation of marginal condition of instability", *Phys. Fluids*, 19, 074101 (2007).

(5) N. Sugimoto and D. Shimizu, "Boundary-layer theory for Taconis oscillations in a helium-filled tube," *Phys. Fluids*, 20, 104102 (2008).

(6) D. Shimizu and N. Sugimoto, "Numerical simulations of self-excited thermoacoustic oscillations in a framework of the boundary-layer theory," in Nonlinear Acoustics — Fundamentals and Applications, *AIP Conference Proceedings*, 1022, 371-374 (2008).

(7) N. Sugimoto, D. Shimizu and Y. Kimura, "Evaluation of mean energy fluxes in thermoacoustic oscillations of a gas in a tube," *Phys. Fluids*, 20, 024103 (2008).