数理解析研究所講究録
第 1646 巻 2009 年 18-22

デファイナブルC^rG多様体とその部分多様体の同時コンパクト化について

川上　智博

640-8510 和歌山市栄谷 930

和歌山大学教育学部数学教室

kawa@center.wakayama-u.ac.jp

1. 序文

ここでは、実数体の通常の構造 $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, >)$ の順序極小拡張 $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, +, \cdot, >, \ldots)$ において、デファイナブル C^rG 多様体とそのデファイナブル C^rG 部分多様体の同時コンパクト化について考察する。このような構造 $\mathcal{M}$ は、[9] により、非可算無限個存在することが知られている。もっと一般的に、実閉体上でも議論することができるが、ここでは、$\mathcal{M}$ に制限して考える。デファイナブルカテゴリーに関しては、[2], [3] などに性質がまとめられている。また、[10] では、少し一般化された形でまとめられている。

ここでは、デファイナブル集合は、すべてパラメータつきとし、$1 \leq r < \infty$ とする。

2. デファイナブル C^r 多様体とデファイナブル C^rG 多様体

デファイナブル C^r 多様体とデファイナブル C^rG 多様体について、[5], [6] などにおいて考察されている。

2000 *Mathematics Subject Classification*. 14P10, 14P20, 57S10, 57S15, 03C64.
Keywords and Phrases. 順序極小構造, デファイナブル C^r 群, デファイナブル C^rG 多様体, 同時デファイナブル C^rG コンパクト化.

C^r 多様体 X がデファイナブル C^r 多様体とは、X が有限個からなる局所座標近傍系をもっており、それらのはり合わせ写像がデファイナブル C^r 微分同相写像となることである。

群 G がデファイナブル C^r 群とは、G がデファイナブル C^r 多様体であり、群演算 $G\times G \to G, G \to G$ がデファイナブル C^r 写像となることである。

定義 2.1. G をデファイナブル C^r 群とし、X をデファイナブル C^r 多様体とする。群作用 $\phi : G\times X \to X$ がデファイナブル C^r 写像となるとき、ϕ を G のデファイナブル C^r 作用という。X と ϕ の組 (X, ϕ) をデファイナブル C^rG 多様体という。以下、略して X と書く。

定義 2.2. G をデファイナブル C^r 群, X をコンパクトでないデファイナブル C^rG 多様体とする。X がデファイナブル C^rG コンパクト化可能とは、境界 ∂Y をもったコンパクトデファイナブル C^rG 多様体 Y とデファイナブル C^rG 微分同相写像 $f : X \to Int\ Y$ が存在することである。ただし、$Int\ Y$ は Y の多様体としての内部を表すものとする。

[注意] ここでは、コンパクト化は境界をつけたものを考えることとする。開区間 $(0,1)$ のコンパクト化として、閉区間 $[0,1]$ と単位円周 S^1 が存在するが、ここでは、前者のみを考える。

G をデファイナブル C^r 群とする。群準同型写像 $\theta : G \to O_n(\mathbb{R})$ がデファイナブル C^r 写像のとき、θ を G の表現という。θ によって導かれた直交作用をもった $\mathbb{R}^n$ を G の表現空間という。ここでは、直交表現のみを考える。G の表現空間 Ω の G 不変デファイナブル C^r 部分多様体を Ω のデファイナブル C^rG 部分多様体という。デファイナブル C^rG 多様体 X がアフィンとは、X がある Ω のあるデファイナブル C^rG 部分多様体とデファイナブル C^rG 微分同相となることである。

定理 2.3 ([5]). G をコンパクトデファイナブル C^r 群, X をコンパクトでないアフィンデファイナブル C^rG 多様体とするとき、X はデファイナブル C^rG コンパクト化可能である。

上の定理において、X のデファイナブル C^rG 部分多様体も考えて、同時デファイナブル C^rG コンパクト化をするのがここでの目的である。

定義 2.4. X を C^r 多様体, $X_1, \dots, X_n$ を X の C^r 部分多様体とする。$X_1, \dots, X_n$ が一般の位置にあるとは、任意の $i \in \{1, \dots, n\}, J \subset \{1, \dots, n\} - \{i\}$ に対して、X_i と $\cap_{j\in J} X_j$ が横断的に交わることである。

[注意] 一般の位置にあるという条件は、部分多様体の共通部分が部分多様体となる十分条件である。この条件は、S. Akbulut and H. King [1] によって導入されたものである。また、帰納法で結論を証明する際に、都合のよい条件である。

一般には、多様体の共通部分や和集合は、多様体とは限らない。

G をコンパクトデファイナブル C^r 群, X をコンパクトでないアフィンデファイナブル C^rG 多様体とするとき、[5] により、X はある G の表現空間 Ω 内の有界デファイナブル C^rG 部分多様体と仮定してよい。この仮定の下で、以下の定義を考える。

定義 2.5. $X_1, \ldots, X_n$ を X のデファイナブル C^rG 部分多様体とする。$(X; X_1, \ldots, X_n)$ がフロンティア条件を満たすとは、各 i に対して、$\overline{X_i} - X_i \subset \overline{X} - X$ を満たすことである。ただし、$\overline{X_i}$ *(resp.* $\overline{X}$*)* は、Ω における X_i *(resp.* X*)* の閉包を表すものとする。

定義 2.6. G をデファイナブル C^r 群、X をコンパクトでないデファイナブル C^rG 多様体、$X_1, \ldots, X_n$ をコンパクトでない X のデファイナブル C^rG 部分多様体で、一般の位置にあるとする。$(X; X_1, \ldots, X_n)$ が同時デファイナブル C^rG コンパクト化可能とは、境界 ∂Y をもったコンパクトデファイナブル C^rG 多様体 Y, それぞれ、境界 $\partial Y_1, \ldots, \partial Y_n$ をもった, Y のコンパクトデファイナブル C^rG 部分多様体 $Y_1, \ldots, Y_n$ とデファイナブル C^rG 微分同相写像 $f : X \to Int\ Y$ が存在して、以下の 3 つの条件を満たすことである。

(1) 各 i に対して、$f(X_i) = Int\ Y_i$。

(2) 各 i に対して、$\partial Y_i \subset \partial Y$。

(3) $Y_1, \ldots, Y_n, \partial Y$ が一般の位置にある。

得られた結果は以下である。

定理 2.7 ([8]). G をコンパクトデファイナブル C^r 群、X をコンパクトでないアフィンデファイナブル C^rG 多様体、$X_1, \ldots, X_n$ をコンパクトでない X のデファイナブル C^rG 部分多様体で、一般の位置にあり、$(X; X_1, \ldots, X_n)$ はフロンティア条件を満たすとする。このとき、$(X; X_1, \ldots, X_n)$ は同時デファイナブル C^rG コンパクト化可能である。

定理 2.7 の証明のアイデアは、部分的デファイナブル C^rG 自明性 [5] を用いることである。

今後の課題は以下である。

(1) 応用例を考える。

実は一部できており、以下のデファイナブル C^2 多様体とそのデファイナブル C^2 部分多様体の微分可能性の同時格上げについての結果を得ている。

定理 2.8 ([8]). X をデファイナブル C^2 多様体、$X_1, \dots, X_n$ を X のデファイナブル C^2 部分多様体で、一般の位置にあるとする。また、$2 \leq r < \infty$ とする。

このとき、$X, X_1, \dots, X_n$ がコンパクトであるか、または、$X, X_1, \dots, X_n$ がコンパクトでなく、$(X; X_1, \dots, X_n)$ はフロンティア条件を満たすならば、デファイナブル C^r 多様体 Y, Y のデファイナブル C^r 部分多様体 $Y_1, \dots, Y_n$ とデファイナブル C^2 微分同相写像 $(X; X_1, \dots, X_n) \to (Y; Y_1, \dots, Y_n)$ が存在する。

定理 2.8 の同変版も課題である。

通常の多様体の微分可能性の格上げについては、[4] により、よく知られている。しかし、デファイナブルカテゴリーでは、その方法は適用できない。

(2) 実数体の順序極小拡張から、実閉体の順序極小拡張上に結果を拡張する。このときは、コンパクトは、デファイナブリーコンパクトとして、拡張する。

(3) G のコンパクト性 (デファイナブリーコンパクト性) の条件をはずせないか。

(4) X のアフィン性の条件をはずせないか。

(5) 同時デファイナブル C^rG コンパクト化可能の定義をゆるめて、フロンティア条件を除けないか。

(6) $r = \infty$ と $r = \omega$ のときはどうか。

$r = \infty$ と $r = \omega$ のときのデファイナブル C^r 多様体・デファイナブル C^rG 多様体を扱ったものは、少ない状況にある。塩田 [11] やその同変版 [6], [7] などがあるのみである。

References

[1] S. Akbulut and H. King, *A relative Nash theorem*, Trans. Amer. Math. Soc. **267** (1981), 465–481.

[2] L. van den Dries, *Tame topology and o-minimal structures*, Lecture notes series **248**, London Math. Soc. Cambridge Univ. Press (1998).

[3] L. van den Dries and C. Miller, *Geometric categories and o-minimal structures*, Duke Math. J. **84** (1996), 497-540.

[4] M.W. Hirsch, *Differential manifolds*, Springer, (1976).

[5] T. Kawakami, *Equivariant differential topology in an o-minimal expansion of the field of real numbers*, Topology Appl. **123** (2002), 323-349.

[6] T. Kawakami, *Imbedding of manifolds defined on an o-minimal structures on* $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$, Bull. Korean Math. Soc. **36** (1999), 183–201.

[7] T. Kawakami, *Nash G manifold structures of compact or compactifiable $C^\infty G$ manifolds*, J. Math. Soc. Japan **48** (1996) 321-331.

[8] T. Kawakami, *Relative properties of definable C^rG manifolds*, preprint.

[9] J.P. Rolin, P. Speissegger and A.J. Wilkie, *Quasianalytic Denjoy-Carleman classes and o-minimality*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), 751-777.

[10] M. Shiota, *Geometry of subanalyitc and semialgebraic sets*, Progress in Math. **150** (1997), Birkhäuser.
[11] M. Shiota, *Nash manifolds*, Lecture Note in Math. **1269**, Springer-Verlag (1987).