

# Mirković-Vilonen polytopes lying in a Demazure crystal and an opposite Demazure crystal

内藤 聡 (Satoshi NAITO)

筑波大学 数学系

Institute of Mathematics,  
University of Tsukuba

naito@math.tsukuba.ac.jp

佐垣 大輔 (Daisuke SAGAKI)

筑波大学 数学系

Institute of Mathematics,  
University of Tsukuba

sagaki@math.tsukuba.ac.jp

## 0 はじめに.

本論説は, 論文 [NS4] において得られた結果の解説である.

$\mathfrak{g}$  を複素単純リー代数とし,  $\mathfrak{h}$  を  $\mathfrak{g}$  の Cartan 部分代数,  $W$  を  $\mathfrak{g}$  の Weyl 群とする.  $\mathfrak{g}^\vee$  を  $\mathfrak{g}$  の Langlands 双対とし,  $U_q(\mathfrak{g}^\vee)$  を,  $\mathfrak{g}^\vee$  に付随した,  $\mathbb{C}(q)$  上の量子普遍包絡環とする.  $\mathfrak{g}^\vee$  の優整ウェイト  $\lambda \in \mathfrak{h}$  に対して,  $MV(\lambda)$  を, Mirković-Vilonen 多面体  $P \subset \mathfrak{h}_\mathbb{R}$  であって,  $W$  の最長元  $w_0$  に対応する  $P$  の頂点  $\mu_{w_0}$  が  $\lambda$  に等しく, かつ  $P \subset \text{Conv}(W\lambda)$  を満たしているもの全体の集合とする. ここで,  $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$  は  $\mathfrak{h}$  の実形であり,  $\text{Conv}(W \cdot \lambda)$  は  $W \cdot \lambda$  の  $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$  における凸包である. このとき,  $MV(\lambda)$  には,  $\lambda$  を最高ウェイトとする有限次元最高ウェイト  $U_q(\mathfrak{g}^\vee)$ -加群の結晶基底  $B(\lambda)$  に同型な, クリスタルの構造が入ることが知られている ([Kam2]).

さて, 以下では  $\mathfrak{g}$  を simply-laced とする.<sup>1</sup> 我々は, 論文 [NS4] において,  $P \in MV(\lambda)$  が Demazure クリスタルや opposite Demazure クリスタルに含まれるための必要十分条件を, Mirković-Vilonen 多面体  $P$  の辺の長さに関する条件として与えた. さらに, 各  $x \in W$  に対して, ウェイト  $x \cdot \lambda$  の extremal 元  $P_{x,\lambda} \in MV(\lambda) \cong B(\lambda)$  の Gelfand-Goresky-MacPherson-Serganova データを明示的に記述し,  $P_{x,\lambda}$  が集合  $\{z \cdot \lambda \mid z \leq x\}$  の  $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$  における凸包と一致することを示した. ここで, 条件  $z \leq x$  における  $\leq$  は,  $W$  上の Bruhat 順序である. そして, これらの結果をあわせて,

---

<sup>1</sup> $\mathfrak{g}$  が simply-laced ではない場合については, いわゆる “(Dynkin 図形の自己同型による) folding” を用いることで同様の結果が得られると考えられる. Folding については, [NS1] ~ [NS3], [H] などを参照されたい.

$P \in \mathcal{MV}(\lambda)$  が  $x \in W$  に対応する opposite Demazure クリスタルに含まれることと,  $P \supset P_{x,\lambda}$  (多面体としての包含関係) であることが同値であることを示した.

## 1 Mirković-Vilonen (MV) 多面体.

まず, Mirković-Vilonen (MV) 多面体とそれらのなすクリスタルについて復習する. 詳細は, [Kam1], [Kam2] を参照されたい.

1.1 記号. 本論説で使用する記号は以下の通りである.  $\mathfrak{g}$  を simply-laced な複素単純リー代数とし,  $\mathfrak{h}$  を  $\mathfrak{g}$  の Cartan 部分代数とする.  $A = (a_{ij})_{i,j \in I}$  を  $\mathfrak{g}$  の Cartan 行列とし,  $\Pi := \{\alpha_j\}_{j \in I} \subset \mathfrak{h}^* := \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h}, \mathbb{C})$  を単純ルートの集合,  $\Pi^\vee := \{h_j\}_{j \in I} \subset \mathfrak{h}$  を単純コルートの集合とする.  $\mathfrak{h}$  の実形  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$  を,  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} := \bigoplus_{j \in I} \mathbb{R}h_j$  で定める.  $W := \langle s_j \mid j \in I \rangle$  を  $\mathfrak{g}$  の Weyl 群とする. ここで,  $s_j$  ( $j \in I$ ) は単純鏡映である.  $W$  上の (強) Bruhat 順序を  $\leq$  で表す.  $\ell: W \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  を  $W$  上の長さ関数とし,  $e, w_0 \in W$  をそれぞれ  $W$  の単位元, 最長元とする.  $R(w_0)$  を最長元  $w_0 \in W$  の簡約ワード全体の集合とする. すなわち,  $R(w_0)$  は, 長さ  $m := \ell(w_0)$  の  $I$  の元の列  $(i_1, i_2, \dots, i_m)$  であって,  $s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_m} = w_0$  を満たすもの全体の集合である.

$\mathfrak{g}^\vee$  を  $\mathfrak{g}$  の Langlands 双対とする. つまり,  $\mathfrak{g}^\vee$  は  $A$  の転置  ${}^tA$  を Cartan 行列に持つ複素単純リー代数である (本論説では  $\mathfrak{g}$  を simply-laced と仮定しているので, リー代数として  $\mathfrak{g}^\vee \cong \mathfrak{g}$  である). ここで,  $\mathfrak{g}^\vee$  の Cartan 部分代数は  $\mathfrak{h}^*$  によって, 単純ルートの集合は  $\Pi^\vee = \{h_j\}_{j \in I} \subset \mathfrak{h}$  によって, 単純コルートの集合は  $\Pi = \{\alpha_j\}_{j \in I} \subset \mathfrak{h}^*$  によって与えられているとする.  $U_q(\mathfrak{g}^\vee)$  を,  $\mathfrak{g}^\vee$  に付随した, 有理関数体  $\mathbb{C}(q)$  上の量子普遍包絡環とし,  $U_q^+(\mathfrak{g}^\vee)$  および  $U_q^-(\mathfrak{g}^\vee)$  をそれぞれ  $U_q(\mathfrak{g}^\vee)$  の正の部分, 負の部分とする.  $B(\infty)$  を  $U_q^-(\mathfrak{g}^\vee)$  の結晶基底とする. また,  $\mathfrak{g}^\vee$  の優整ウェイト  $\lambda \in \mathfrak{h}$  に対して, 最高ウェイト  $\lambda$  の有限次元最高ウェイト  $U_q(\mathfrak{g}^\vee)$ -加群を  $V(\lambda)$  で表し, その結晶基底を  $B(\lambda)$  で表す.

## 1.2 GGMS データと擬 Weyl 多面体.

定義 1.2.1.  $\mu_\bullet = (\mu_w)_{w \in W}$  を  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \bigoplus_{j \in I} \mathbb{R}h_j$  の元の集まりとする;  $\mu_w \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$  ( $w \in W$ ).  $\mu_\bullet$  が Gelfand-Goresky-MacPherson-Serganova (GGMS) データであ

るとは, すべての  $w \in W$  と  $i \in I$  について,

$$\mu_{ws_i} - \mu_w \in \mathbb{Z}_{\geq 0}(w \cdot h_i) \quad (1.2.1)$$

が成り立つときにいう.

GGMS データ  $\mu_\bullet = (\mu_w)_{w \in W}$  に対して,  $P(\mu_\bullet) \subset \mathfrak{h}_\mathbb{R}$  を次で定める.

$$P(\mu_\bullet) := \{h \in \mathfrak{h}_\mathbb{R} \mid w^{-1} \cdot (h - \mu_w) \in \sum_{j \in I} \mathbb{R}_{\geq 0} h_j \text{ for all } w \in W\}. \quad (1.2.2)$$

このとき,  $P(\mu_\bullet)$  は  $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$  内の凸多面体となる ([Kam1]). このようにして定まる  $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$  内の凸多面体を 擬 Weyl 多面体 と呼ぶ.

注意 1.2.2.  $P(\mu_\bullet)$  の頂点は, (重複はあるかもしれないが)  $\mu_\bullet = (\mu_w)_{w \in W}$  によって与えられる ([Kam1, Proposition 2.2]). したがって, 特に,

$$P(\mu_\bullet) = \text{Conv} \{ \mu_w \mid w \in W \}$$

が成り立つ. ここで,  $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$  の部分集合  $X$  に対して,  $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$  における  $X$  の凸包を  $\text{Conv } X$  で表している.

2つの GGMS データ  $\mu_\bullet$  および  $\mu'_\bullet$  に対して,  $\mu_\bullet \neq \mu'_\bullet$  であれば  $P(\mu_\bullet) \neq P(\mu'_\bullet)$  となることが分かる. そこで, 擬 Weyl 多面体  $P$  に対して,  $P = P(\mu_\bullet)$  を満たす (唯一つの) GGMS データ  $\mu_\bullet$  のことを,  $P$  の GGMS データ と呼ぶことにする.

1.3 MV 多面体の定義. MV 多面体 とは, 擬 Weyl 多面体  $P$  であって, その GGMS データ  $\mu_\bullet$  が MV データになっているもののことである. MV データの定義を述べるために, まずは, 2-move, 3-move という言葉を導入しよう ([Kam1, §5.1]; そこでは 2-braid move, 3-braid move と呼ばれている).

定義 1.3.1.  $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_m)$ ,  $\mathbf{j} = (j_1, j_2, \dots, j_m) \in R(w_0)$  を最長元  $w_0 \in W$  の簡約ワードとする.

(1)  $\mathbf{i}$  と  $\mathbf{j}$  が 2-move で移りあうとは, 次の条件 (1a), (1b) をみたす  $i, j \in I$  と  $0 \leq k \leq m-2$  が存在するときをいう: (1a)  $a_{ij} = a_{ji} = 0$ , (1b)  $i_{k+1} = j_{k+2} = i$ ,  $i_{k+2} = j_{k+1} = j$ ,  $i_l = j_l$  ( $1 \leq l \leq m$ ,  $l \neq k+1, k+2$ ), すなわち,

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= (i_1, \dots, i_k, i, j, i_{k+3}, \dots, i_m), \\ \mathbf{j} &= (i_1, \dots, i_k, j, i, i_{k+3}, \dots, i_m). \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

(2)  $\mathbf{i}$  と  $\mathbf{j}$  が 3-move で移りあうとは、次の条件 (2a), (2b) をみたす  $i, j \in I$  と  $0 \leq k \leq m - 3$  が存在するときをいう: (2a)  $a_{ij} = a_{ji} = -1$ , (2b)  $i_{k+1} = i_{k+3} = j_{k+2} = i, i_{k+2} = j_{k+1} = j_{k+3} = j, i_l = j_l (1 \leq l \leq m, l \neq k + 1, k + 2, k + 3)$ , すなわち,

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= (i_1, \dots, i_k, i, j, i, i_{k+4}, \dots, i_m), \\ \mathbf{j} &= (i_1, \dots, i_k, j, i, j, i_{k+4}, \dots, i_m). \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

$\mu_\bullet = (\mu_w)_{w \in W}$  を GGMS データとする. 各  $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_m) \in R(w_0)$  と  $1 \leq l \leq m$  に対して,  $n_l^{\mathbf{i}} = n_l^{\mathbf{i}}(\mu_\bullet) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  を次で定める (条件 (1.2.1) を参照):

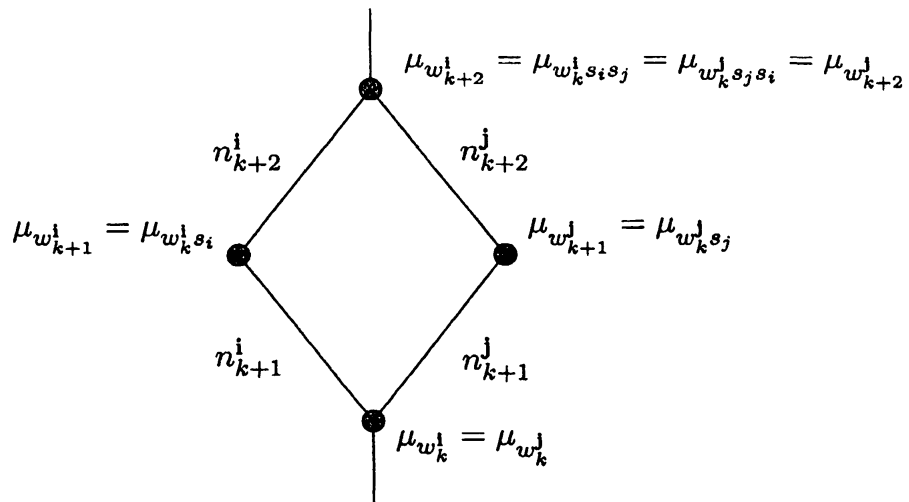
$$\mu_{w_l^{\mathbf{i}}} - \mu_{w_{l-1}^{\mathbf{i}}} = n_l^{\mathbf{i}} w_{l-1}^{\mathbf{i}} \cdot h_{i_l}. \tag{1.3.3}$$

ここで,  $w_l^{\mathbf{i}} := s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_l} \in W$  である. この  $n_l^{\mathbf{i}} = n_l^{\mathbf{i}}(\mu_\bullet)$  は, 擬 Weyl 多面体  $P(\mu_\bullet)$  における 2つの頂点  $\mu_{w_l^{\mathbf{i}}}$  と  $\mu_{w_{l-1}^{\mathbf{i}}}$  の間の辺の長さを表している (注意 1.2.2 参照):



定義 1.3.2. GGMS データ  $\mu_\bullet = (\mu_w)_{w \in W}$  が Mirković-Vilonen (MV) データであるとは,  $\mu_\bullet$  が以下の条件を満たすときにいう:

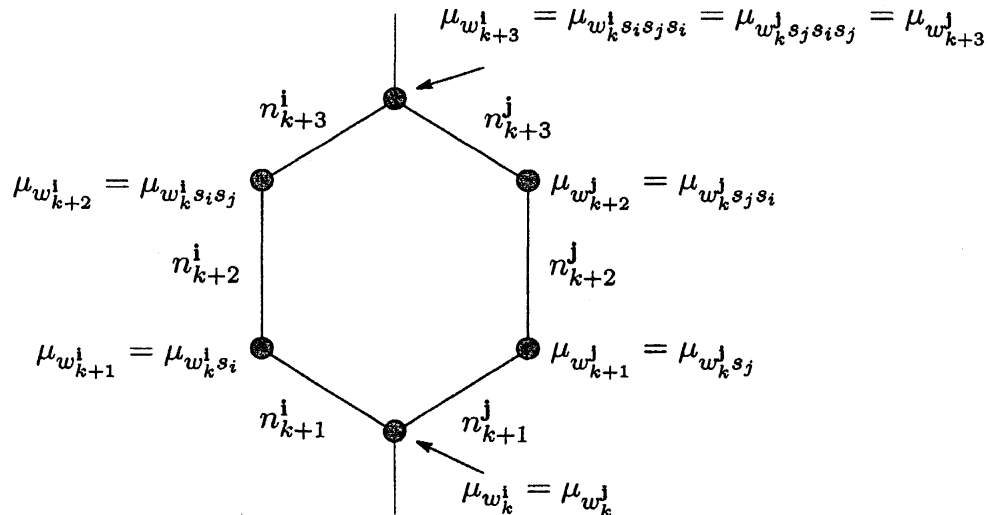
(1)  $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in R(w_0)$  が (1.3.1) のように 2-move で移りあっているとする. このとき,  $n_{k+1}^{\mathbf{i}} = n_{k+2}^{\mathbf{j}}, n_{k+2}^{\mathbf{i}} = n_{k+1}^{\mathbf{j}}$ , および,  $n_l^{\mathbf{i}} = n_l^{\mathbf{j}} (1 \leq l \leq m, l \neq k + 1, k + 2)$  が成り立つ.



(2)  $i, j \in R(w_0)$  が (1.3.2) のように 3-move で移りあっているとす。このとき,

$$\begin{cases} n_{k+1}^j = n_{k+2}^i + n_{k+3}^i - \min(n_{k+1}^i, n_{k+3}^i), \\ n_{k+2}^j = \min(n_{k+1}^i, n_{k+3}^i), \\ n_{k+3}^j = n_{k+1}^i + n_{k+2}^i - \min(n_{k+1}^i, n_{k+3}^i), \end{cases} \quad (1.3.4)$$

および,  $n_l^i = n_l^j$  ( $1 \leq l \leq m, l \neq k+1, k+2, k+3$ ) が成り立つ。



**定義 1.3.3.**  $P$  を擬 Weyl 多面体とする。  $P$  が Mirković-Vilonen (MV) 多面体であるとは,  $P$  の GGMS データ  $\mu_\bullet$  が MV データであるときにいう。言い換えれば, MV データ  $\mu_\bullet$  によって定まる擬 Weyl 多面体  $P(\mu_\bullet)$  のことを MV 多面体と呼ぶ。

**1.4 MV 多面体のなすクリスタル.**  $MV(\infty)$  を, MV 多面体  $P$  であって, その GGMS データ  $\mu_\bullet = (\mu_w)_{w \in W}$  が  $\mu_{w_0} = 0 \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$  を満たすもの全体の集合とする。  $MV(\infty)$  は次のようにして  $U_q(\mathfrak{g}^\vee)$  に関するクリスタルになることが知られている ([Kam2, §§3.3, 3.5, and 3.6]). 以下,  $P \in MV(\infty)$  とし,  $\mu_\bullet = (\mu_w)_{w \in W}$  を  $P$  の GGMS データとする。

ウェイト  $\text{wt}$ .  $P$  のウェイト  $\text{wt}(P)$  は,  $\mu_e \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$  で定める;  $\text{wt}(P) := \mu_e$ .

柏原作用素  $e_j, f_j$  ( $j \in I$ ). 各  $j \in I$  に対して, 柏原作用素  $f_j : MV(\infty) \cup \{0\} \rightarrow$

$MV(\infty) \cup \{0\}$  および  $e_j : MV(\infty) \cup \{0\} \rightarrow MV(\infty) \cup \{0\}$  を以下で定める.

$$\begin{aligned} e_j 0 &= f_j 0 := 0, \\ f_j P &= f_j P(\mu_\bullet) := P(f_j \mu_\bullet), \\ e_j P &= e_j P(\mu_\bullet) := \begin{cases} P(e_j \mu_\bullet) & \text{if } \mu_e \neq \mu_{s_j}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

ここで,  $0$  は  $MV(\infty)$  には含まれない形式的な元である. また,  $f_j \mu_\bullet$  および  $e_j \mu_\bullet$  は次の命題によって定まる MV データである.

**命題 1.4.1** ([Kam2, Theorem 3.5]).  $\mu_\bullet = (\mu_w)_{w \in W}$  を MV データとし ( $\mu_{w_0} = 0$  でなくてもよい),  $j \in I$  とする.

(1) 次の条件 (i), (ii) を満たす MV データ  $f_j \mu_\bullet = (\mu'_w)_{w \in W}$  が唯一つ存在する:  
(i)  $\mu'_e = \mu_e - h_j$ , (ii)  $s_j w < w$  を満たす  $w \in W$  については  $\mu'_w = \mu_w$  が成り立つ (特に  $\mu'_{w_0} = \mu_{w_0}$  であることに注意).

(2)  $\mu_e \neq \mu_{s_j}$  のとき, 次の条件 (i), (ii) を満たす MV データ  $e_j \mu_\bullet = (\mu'_w)_{w \in W}$  が唯一つ存在する: (i)  $\mu'_e = \mu_e + h_j$ , (ii)  $s_j w < w$  を満たす  $w \in W$  については  $\mu'_w = \mu_w$  が成り立つ (特に  $\mu'_{w_0} = \mu_{w_0}$  であることに注意).

写像  $\varepsilon_j, \varphi_j$  ( $j \in I$ ). 各  $j \in I$  に対して,

$$\varepsilon_j(P) := \max\{N \geq 0 \mid e_j^N P \neq 0\}, \quad \varphi_j(P) := \langle \alpha_j, \text{wt}(P) \rangle + \varepsilon_j(P)$$

と定める.

**定理 1.4.2** ([Kam2, §3.3 and §3.6]).  $MV(\infty)$  は上で定めた写像  $\text{wt}, e_j, f_j$  ( $j \in I$ ), および,  $\varepsilon_j, \varphi_j$  ( $j \in I$ ) によって,  $U_q(\mathfrak{g}^\vee)$  に関するクリスタルになる. さらに, クリスタルとしての同型  $\Psi : \mathcal{B}(\infty) \xrightarrow{\sim} MV(\infty)$  が存在する.

**注意 1.4.3.**  $\mu_\bullet = (\mu_w)_{w \in W}$  を,  $\mu_w = 0 \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$  ( $w \in W$ ) によって定める. このとき, 明らかに,  $\mu_\bullet$  は MV データであり,  $P_0 := P(\mu_\bullet) = \{0\}$  は  $MV(\infty)$  の元である.  $P_0$  のウェイトは  $\mu_e = 0$  であるから,  $\mathcal{B}(\infty)$  の最高ウェイト元  $u_\infty$  ( $1 \in U_q^-(\mathfrak{g}^\vee)$  に対応する  $\mathcal{B}(\infty)$  の元) は, 定理 1.4.2 の同型  $\Psi : \mathcal{B}(\infty) \xrightarrow{\sim} MV(\infty)$  によって, この  $P_0$  に写されていることが分かる.

さて,  $\lambda \in \mathfrak{h}$  を  $\mathfrak{g}^\vee$  の優整ウェイトとする.  $MV(\lambda)$  を, MV 多面体  $P$  であって, その GGMS データ  $\mu_\bullet = (\mu_w)_{w \in W}$  が  $\mu_{w_0} = \lambda \in \mathfrak{h}_\mathbb{R}$  を満たし, かつ  $P \subset \text{Conv}(W \cdot \lambda)$  を満たすもの全体の集合とする.  $MV(\lambda)$  は次のようにして  $U_q(\mathfrak{g}^\vee)$  に関するクリスタルになることが知られている ([Kam2, §6.2]). 以下,  $P \in MV(\lambda)$  とし,  $\mu_\bullet = (\mu_w)_{w \in W}$  を  $P$  の GGMS データとする.

ウェイト  $\text{wt}$ .  $P$  のウェイト  $\text{wt}(P)$  は,  $\mu_e \in \mathfrak{h}_\mathbb{R}$  で定める;  $\text{wt}(P) := \mu_e$ .

柏原作用素  $e_j, f_j$  ( $j \in I$ ). 各  $j \in I$  に対して, 柏原作用素  $f_j : MV(\lambda) \cup \{0\} \rightarrow MV(\lambda) \cup \{0\}$  および  $e_j : MV(\lambda) \cup \{0\} \rightarrow MV(\lambda) \cup \{0\}$  を以下で定める.

$$e_j 0 = f_j 0 := 0,$$

$$f_j P = f_j P(\mu_\bullet) := \begin{cases} P(f_j \mu_\bullet) & \text{if } P(f_j \mu_\bullet) \subset \text{Conv}(W \cdot \lambda), \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$e_j P = e_j P(\mu_\bullet) := \begin{cases} P(e_j \mu_\bullet) & \text{if } \mu_e \neq \mu_{s_j}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

ここで,  $0$  は  $MV(\lambda)$  には含まれない形式的な元である.

写像  $\varepsilon_j, \varphi_j$  ( $j \in I$ ). 各  $j \in I$  に対して,

$$\varepsilon_j(P) := \max\{N \geq 0 \mid e_j^N P \neq 0\}, \quad \varphi_j(P) := \max\{N \geq 0 \mid f_j^N P \neq 0\}$$

と定める.

定理 1.4.4 ([Kam2, Theorem 6.4]).  $MV(\lambda)$  は上で定めた写像  $\text{wt}, e_j, f_j$  ( $j \in I$ ), および,  $\varepsilon_j, \varphi_j$  ( $j \in I$ ) によって,  $U_q(\mathfrak{g}^\vee)$  に関するクリスタルになる. さらに, クリスタルとしての同型  $\Psi_\lambda : \mathcal{B}(\lambda) \xrightarrow{\sim} MV(\lambda)$  が存在する.

注意 1.4.5. (1)  $\mu_\bullet = (\mu_w)_{w \in W}$  を,  $\mu_w := \lambda \in \mathfrak{h}_\mathbb{R}$  ( $w \in W$ ) によって定める. このとき, 明らかに,  $\mu_\bullet$  は MV データであり,  $P_\lambda := P(\mu_\bullet) = \{\lambda\}$  は  $MV(\lambda)$  の元である.  $P_\lambda$  のウェイトは  $\mu_e = \lambda$  であるから,  $\mathcal{B}(\lambda)$  の最高ウェイト元  $u_\lambda$  は, 定理 1.4.4 の同型  $\Psi_\lambda : \mathcal{B}(\lambda) \xrightarrow{\sim} MV(\lambda)$  によって, この  $P_\lambda$  に写されていることが分かる.

(2)  $\mu_\bullet = (\mu_w)_{w \in W}$  を,  $\mu_w := ww_0 \cdot \lambda \in \mathfrak{h}_\mathbb{R}$  ( $w \in W$ ) によって定める. このとき,  $\mu_\bullet$  は MV データであり,  $P_{w_0 \cdot \lambda} := P(\mu_\bullet) = \text{Conv}(W \cdot \lambda)$  は  $MV(\lambda)$  の元となるこ

とが知られている ([A] および [Kam1]).  $P_{w_0 \cdot \lambda}$  のウェイトは  $\mu_e = w_0 \cdot \lambda$  であるから,  $B(\lambda)$  の最低ウェイト元  $u_{w_0 \cdot \lambda}$  は, 定理 1.4.4 の同型  $\Psi_\lambda : B(\lambda) \xrightarrow{\sim} MV(\lambda)$  によって, この  $P_{w_0 \cdot \lambda}$  に写されていることが分かる.

## 2 Demazure クリスタルに含まれる MV 多面体.

**2.1 Demazure クリスタル.** 以下,  $\mathfrak{g}^\vee$  の優整ウェイト  $\lambda \in \mathfrak{h}$  を固定する. 各  $x \in W$  に対して,  $x$  に対応する Demazure 加群  $V_x(\lambda)$  とは,  $V(\lambda)$  のウェイト  $x \cdot \lambda$  のウェイト空間  $V(\lambda)_{x \cdot \lambda}$  で生成される,  $V(\lambda)$  の  $U_q^+(\mathfrak{g}^\vee)$ -部分加群のことである;  $V_x(\lambda) := U_q^+(\mathfrak{g}^\vee)V(\lambda)_{x \cdot \lambda}$ . Kashiwara [Kas1] は,  $B(\lambda)$  の部分集合  $B_x(\lambda)$  で

$$V(\lambda) \supset V_x(\lambda) = \bigoplus_{b \in B_x(\lambda)} \mathbb{C}(q)G_\lambda(b) \quad (2.1.1)$$

を満たすものが存在することを示した. ここで,  $\{G_\lambda(b) \mid b \in B(\lambda)\}$  は  $V(\lambda)$  の大域結晶基底である.  $B_x(\lambda) \subset B(\lambda)$  のことを  $x \in W$  に対応する Demazure クリスタルと呼ぶ. Demazure クリスタルの族  $\{B_x(\lambda)\}_{x \in W}$  は次の帰納的な関係式で特徴付けられることが知られている ([Kas1, Proposition 3.2.3]).

$$B_e(\lambda) = \{u_\lambda\}, \quad (2.1.2)$$

$$B_x(\lambda) = \bigcup_{N \geq 0} f_j^N B_{s_j x}(\lambda) \setminus \{0\} \quad \text{for } x \in W \text{ and } j \in I \text{ with } s_j x < x. \quad (2.1.3)$$

一方,  $B(\infty)$  の部分集合の族  $\{B_x(\infty)\}_{x \in W}$  で次の帰納的な関係式を満たすものが唯一つ存在することも知られている ([Kas1, Proposition 3.2.5]).

$$B_e(\infty) = \{u_\infty\}, \quad (2.1.4)$$

$$B_x(\infty) = \bigcup_{N \geq 0} f_j^N B_{s_j x}(\infty) \quad \text{for } x \in W \text{ and } j \in I \text{ with } s_j x < x. \quad (2.1.5)$$

ここでは, 各  $x \in W$  に対して,  $B_x(\infty) \subset B(\infty)$  のことも  $x$  に対応する Demazure クリスタルと呼ぶことにする.

[NS4, Theorem 3.2.1] では,  $x \in W$  に対して, Demazure クリスタル  $B_x(\lambda) \subset B(\lambda)$  (または  $B_x(\infty) \subset B(\infty)$ ) の同型  $\Psi_\lambda : B(\lambda) \xrightarrow{\sim} MV(\lambda)$  (または  $\Psi : B(\infty) \xrightarrow{\sim} MV(\infty)$ ) による像に, MV 多面体  $P \in MV(\lambda)$  (または  $P \in MV(\infty)$ ) が含まれる



ための必要十分条件を, MV 多面体  $P$  の辺の長さ  $n_l^i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  ( $i \in R(w_0); 1 \leq l \leq m$ ) に関する条件として与えた ( $n_l^i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  の定義は (1.3.3) を参照). 次のサブセクションではその結果について説明する.

**2.2 MV 多面体が Demazure クリスタルに含まれるための条件.**  $x \in W$  を任意に取って固定し,  $p := \ell(xw_0)$  とおく.  $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_m) \in R(w_0)$  に対して,

$$S(xw_0, \mathbf{i}) = \left\{ (a_1, a_2, \dots, a_p) \in [1, m]^p \left| \begin{array}{l} 1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_p \leq m \\ s_{i_{a_1}} s_{i_{a_2}} \dots s_{i_{a_p}} = xw_0 \end{array} \right. \right\}, \quad (2.2.1)$$

と定める. ここで,  $[1, m] := \{a \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq a \leq m\}$  である.  $p = \ell(xw_0)$  なので,  $(a_1, a_2, \dots, a_p) \in S(xw_0, \mathbf{i})$  であれば,  $xw_0 = s_{i_{a_1}} s_{i_{a_2}} \dots s_{i_{a_p}}$  は  $xw_0$  の簡約表示になっていることに注意しよう.

さて,  $\mathcal{MV}_x(\lambda)$  (または  $\mathcal{MV}_x(\infty)$ ) を,  $\mathcal{MV}(\lambda)$  (または  $\mathcal{MV}(\infty)$ ) の元  $P$  で, その GGMS データ  $\mu_\bullet = (\mu_w)_{w \in W}$  が次の条件 (Dem.) を満たすもの全体の集合とする:

(Dem.) ある  $\mathbf{i} \in R(w_0)$  に対して,  $n_{a_q}^{\mathbf{i}} = n_{a_q}^{\mathbf{i}}(\mu_\bullet) = 0$  ( $1 \leq q \leq p$ ) を満たす  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_p) \in S(xw_0, \mathbf{i})$  が存在する.

**定理 2.2.1** ([NS4, Theorem 3.2.1]). (1) 定理 1.4.4 の同型  $\Psi_\lambda : \mathcal{B}(\lambda) \xrightarrow{\sim} \mathcal{MV}(\lambda)$  によって, Demazure クリスタル  $\mathcal{B}_x(\lambda) \subset \mathcal{B}(\lambda)$  は  $\mathcal{MV}_x(\lambda)$  に写される. すなわち,

$$\Psi_\lambda(\mathcal{B}_x(\lambda)) = \mathcal{MV}_x(\lambda).$$

(2) 定理 1.4.2 の同型  $\Psi : \mathcal{B}(\infty) \xrightarrow{\sim} \mathcal{MV}(\infty)$  によって, Demazure クリスタル  $\mathcal{B}_x(\infty) \subset \mathcal{B}(\infty)$  は  $\mathcal{MV}_x(\infty)$  に写される. すなわち,

$$\Psi(\mathcal{B}_x(\infty)) = \mathcal{MV}_x(\infty).$$

この定理の証明は,  $\mathcal{MV}_x(\lambda)$  ( $x \in W$ ) (または  $\mathcal{MV}_x(\infty)$  ( $x \in W$ )) が, 条件 (2.1.2), (2.1.3) (または (2.1.4), (2.1.5)) を満たすことをチェックすることで成される ([NS4, Proposition 3.3.3] 参照). その際に重要になるのは次の命題である.

命題 2.2.2 ([NS4, Proposition 3.3.1]).  $P \in \mathcal{MV}_x(\lambda)$  (または  $P \in \mathcal{MV}_x(\infty)$ ) とし,  $\mu_\bullet = (\mu_w)_{w \in W}$  をその GGMS データとする. このとき, すべての  $\mathbf{i} \in R(w_0)$  に対して,  $n_{a_q}^{\mathbf{i}} = n_{a_q}^{\mathbf{i}}(\mu_\bullet) = 0$  ( $1 \leq q \leq p$ ) を満たす  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_p) \in S(xw_0, \mathbf{i})$  が存在する (つまり, 条件 (Dem.) の「ある  $\mathbf{i} \in R(w_0)$  について」の部分をも「すべての  $\mathbf{i} \in R(w_0)$  について」に変えても良いということ).

### 3 Extremal 元の記述.

前節に引き続き  $\mathfrak{g}^\vee$  の優整ウェイト  $\lambda \in \mathfrak{h}$  を固定する. 各  $x \in W$  に対して,  $\mathcal{B}(\lambda)$  に含まれるウェイト  $x \cdot \lambda$  の extremal 元を  $u_{x \cdot \lambda}$  とし,  $P_{x \cdot \lambda} := \Psi_\lambda(u_{x \cdot \lambda}) \in \mathcal{MV}(\lambda)$  とおく ( $\Psi_\lambda : \mathcal{B}(\lambda) \xrightarrow{\sim} \mathcal{MV}(\lambda)$  は定理 1.4.4 の同型). この節では, extremal 元  $P_{x \cdot \lambda}$  の GGMS データの明示的な記述と, それを用いて得られる結果について説明する. なお, これらは [NS4, §§4.1~4.4] の結果である.

3.1 Extremal 元の GGMS データ. §2.2 と同じく,  $x \in W$  を固定し,  $p := \ell(xw_0)$  とおく. 各  $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_m) \in R(w_0)$  に対して集合  $S(xw_0, \mathbf{i})$  上に辞書式順序  $\succ$  を以下で定める ( $S(xw_0, \mathbf{i})$  の定義は (2.2.1) 参照):

$$(a_1, a_2, \dots, a_p) \succ (b_1, b_2, \dots, b_p) \Leftrightarrow$$

$1 \leq q_0 \leq p$  があつて,  $a_q = b_q$  ( $1 \leq q \leq q_0 - 1$ ) かつ  $a_{q_0} > b_{q_0}$  が成り立つ.

$\min S(xw_0, \mathbf{i})$  を辞書式順序  $\succ$  に関する  $S(xw_0, \mathbf{i})$  の最小元とする. そして,  $\xi_l^{\mathbf{i}} \in W \cdot \lambda$  ( $0 \leq l \leq m$ ) を次のように帰納的に定める: まず,  $\xi_m^{\mathbf{i}} := \lambda$  とおく. そして,  $1 \leq l \leq m$  に対して,

$$\xi_{l-1}^{\mathbf{i}} := \begin{cases} \xi_l^{\mathbf{i}} & \text{if } l \text{ appears in } \min S(xw_0, \mathbf{i}), \\ s_{\beta_l^{\mathbf{i}}} \cdot \xi_l^{\mathbf{i}} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

ここで,  $\beta_l^{\mathbf{i}} := w_{i_{l-1}}^{\mathbf{i}} \cdot \alpha_{i_l}$  ( $1 \leq l \leq m$ ) であり,  $s_\beta \in W$  はルート  $\beta$  に関する鏡映を表す.

さて, 各  $w \in W$  に対して,  $\mathbf{i} \in R(w_0)$  を  $w_l^{\mathbf{i}} = w$  となる  $0 \leq l \leq m$  が存在するように取り,  $\mu_w^{\mathbf{i}} := \xi_l^{\mathbf{i}}$  とおく. このとき, [NS4, Lemma 4.1.3 and Proposition 4.1.4] により, 次のことが分かる:

(1) 上の  $\mu_w^{\mathbf{i}}$  の定義は  $\mathbf{i} \in R(w_0)$  の取り方にはよらない.

(2)  $\mu_{\bullet}^x := (\mu_w^x)_{w \in W}$  とおくと,  $\mu_{\bullet}^x$  は MV データになる.

ここで,  $\mu_{\bullet}^x$  で定まる MV 多面体  $P(\mu_{\bullet}^x)$  が  $MV(\lambda)$  に含まれることを見よう ([NS4, Proposition 4.1.4] の後のコメントを参照; 簡単なのでここでも証明を紹介する). まず,  $\mu_{w_0}^x = \lambda$  を示す. 勝手な  $i \in R(w_0)$  に対して  $w_m^i = w_0$  であることに注意する. よって, 定義から,  $\mu_{w_0}^x = \xi_m^i = \lambda$  である. 次に  $P(\mu_{\bullet}^x) \subset \text{Conv}(W \cdot \lambda)$  を示す. まず, 注意 1.2.2 で述べたように,  $P(\mu_{\bullet}^x) = \text{Conv} \{ \mu_w^x \mid w \in W \}$  である. また, ( $\mu_w^x$  達を定める際に用いた)  $\xi_l^i$  達は  $W \cdot \lambda$  の元である. これらのことから,

$$\begin{aligned} P(\mu_{\bullet}^x) &= \text{Conv} \{ \mu_w^x \mid w \in W \} \\ &= \text{Conv} \{ \xi_l^i \mid i \in R(w_0), 0 \leq l \leq m \} \subset \text{Conv}(W \cdot \lambda) \end{aligned}$$

となる.

[NS4, Lemma 4.2.1] を用いることで,  $P(\mu_{\bullet}^x)$  のウェイトが  $x \cdot \lambda$  であることが分かる.  $MV(\lambda)$  のウェイト  $x \cdot \lambda$  の元は extremal 元  $P_{x \cdot \lambda}$  しかないから,

**定理 3.1.1** ([NS4, Theorem 4.1.5 (1)]).  $P(\mu_{\bullet}^x) = P_{x \cdot \lambda}$  が成立する. すなわち, extremal 元  $P_{x \cdot \lambda}$  の GGMS データは  $\mu_{\bullet}^x$  で与えられる.

**3.2 Extremal 元の多面体としての記述.**  $P_{x \cdot \lambda}$  の GGMS データ  $\mu_{\bullet}^x$  をより詳しく調べることで次の定理を得る ([NS4, Theorem 4.1.5 (2)]).

**定理 3.2.1.** Extremal 元  $P_{x \cdot \lambda} = P(\mu_{\bullet}^x)$  は, 集合  $\{z \cdot \lambda \mid z \leq x\}$  の  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$  における凸包と一致する. すなわち,

$$P_{x \cdot \lambda} = \text{Conv} \{ z \cdot \lambda \mid z \leq x \}$$

が成り立つ.

## 4 Opposite Demazure クリスタルに含まれる MV 多面体.

**4.1 Opposite Demazure クリスタル**  $\mathfrak{g}^{\vee}$  の優整ウェイト  $\lambda \in \mathfrak{h}$  を固定する. 各  $x \in W$  に対して,  $x$  に対応する opposite Demazure 加群  $V^x(\lambda)$  とは,  $V(\lambda)$  のウェイト  $x \cdot \lambda$  のウェイト空間  $V(\lambda)_{x \cdot \lambda}$  で生成される,  $V(\lambda)$  の  $U_q^-(\mathfrak{g}^{\vee})$ -部分加群

のことである;  $V^x(\lambda) := U_q^-(\mathfrak{g}^\vee)V(\lambda)_{x \cdot \lambda}$ . Kashiwara [Kas1] は,  $\mathcal{B}(\lambda)$  の部分集合  $\mathcal{B}^x(\lambda)$  で

$$V(\lambda) \supset V^x(\lambda) = \bigoplus_{b \in \mathcal{B}^x(\lambda)} \mathbb{C}(q)G_\lambda(b) \quad (4.1.1)$$

を満たすものが存在することを示した.  $\mathcal{B}^x(\lambda) \subset \mathcal{B}(\lambda)$  のことを  $x \in W$  に対応する opposite Demazure クリスタルと呼ぶ. Opposite Demazure クリスタルの族  $\{\mathcal{B}^x(\lambda)\}_{x \in W}$  は次の帰納的な関係式で特徴付けられることが知られている ([Kas1, §4]).

$$\mathcal{B}^{w_0}(\lambda) = \{u_{w_0 \cdot \lambda}\}, \quad (4.1.2)$$

$$\mathcal{B}^x(\lambda) = \bigcup_{N \geq 0} e_j^N \mathcal{B}^{s_j x}(\lambda) \setminus \{0\} \quad \text{for } x \in W \text{ and } j \in I \text{ with } s_j x > x. \quad (4.1.3)$$

さらに次の補題 4.1.1 が成立する.<sup>2</sup> なお,  $b \in \mathcal{B}(\lambda)$  と  $j \in I$  に対して,  $f_j^{\max} b := f_j^{\varphi_j(b)} b$  と定める. 但し,  $\varphi_j(b) := \max\{N \geq 0 \mid f_j^N b \neq 0\}$  である.

**補題 4.1.1.**  $x \in W$  とし,  $i_1, i_2, \dots, i_p \in I$  を  $\ell(s_{i_p} \cdots s_{i_2} s_{i_1} x) = \ell(x) + p$  かつ  $s_{i_p} \cdots s_{i_2} s_{i_1} x = w_0$  を満たすように取る. このとき,  $b \in \mathcal{B}(\lambda)$  が opposite Demazure クリスタル  $\mathcal{B}^x(\lambda)$  に含まれるための必要十分条件は,  $f_{i_p}^{\max} \cdots f_{i_2}^{\max} f_{i_1}^{\max} b = u_{w_0 \cdot \lambda}$  が成り立つことである.

さて,  $x \in W$  とする. [NS4, Theorems 3.5.1 and 4.5.1] では, Demazure クリスタル  $\mathcal{B}^x(\lambda) \subset \mathcal{B}(\lambda)$  の同型  $\Psi_\lambda : \mathcal{B}(\lambda) \xrightarrow{\sim} \mathcal{MV}(\lambda)$  による像に, MV 多面体  $P \in \mathcal{MV}(\lambda)$  が含まれるための必要十分条件を与えた. 以降のサブセクションではそれらの結果について解説する.

**4.2 MV 多面体が opposite Demazure クリスタルに含まれるための条件.**  $x \in W$  を任意に取って固定し,  $p := \ell(xw_0)$  とおく.  $\mathcal{MV}^x(\lambda)$  を,  $\mathcal{MV}(\lambda)$  の元  $P$  で, その GGMS データ  $\mu_\bullet = (\mu_w)_{w \in W}$  が次の条件 (Op.Dem.) を満たすもの全体の集合とする:

(Op. Dem.)  $w_p^{\mathbf{i}} = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_p} = xw_0$  を満たす  $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_m) \in R(w_0)$  であって,  $\mu_{w_l^{\mathbf{i}}} = w_l^{\mathbf{i}} w_0 \cdot \lambda$  ( $p \leq l \leq m$ ) となるものが存在する.

<sup>2</sup>Demazure クリスタルについても同様のことが成立する. 詳細は [Kas2, Proposition 9.1.3 (2)] を参照.

定理 4.2.1 ([NS4, Theorem 3.5.1]). 定理 1.4.4 の同型  $\Psi_\lambda : \mathcal{B}(\lambda) \xrightarrow{\sim} \mathcal{MV}(\lambda)$  によって, opposite Demazure クリスタル  $\mathcal{B}^x(\lambda) \subset \mathcal{B}(\lambda)$  は  $\mathcal{MV}^x(\lambda)$  に写される. すなわち,

$$\Psi_\lambda(\mathcal{B}^x(\lambda)) = \mathcal{MV}^x(\lambda).$$

この定理は補題 4.1.1 および [Kam2, Theorem 6.6] で与えられた “i-Kashiwara データ” の表示を用いて証明される.

注意 4.2.2. 定理 4.2.1 の証明の過程で次のことが分かる:  $P \in \mathcal{MV}^x(\lambda)$  とし,  $\mu_\bullet = (\mu_w)_{w \in W}$  をその GGMS データとする. このとき,  $w_p^i = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_p} = x w_0$  を満たす すべての  $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_m) \in R(w_0)$  に対して,  $\mu_{w_l^i} = w_l^i w_0 \cdot \lambda$  ( $p \leq l \leq m$ ) が成立する.

4.3 Extremal 元と opposite Demazure クリスタルの関係. 定理 3.1.1 と定理 4.2.1 を合わせることで次の定理を得る ([NS4, Theorem 4.5.1]).

定理 4.3.1.  $x \in W$  とする.  $P \in \mathcal{MV}(\lambda)$  が opposite Demazure クリスタル  $\mathcal{MV}^x(\lambda) = \Psi_\lambda(\mathcal{B}^x(\lambda))$  に含まれるための必要十分条件は,  $P$  が (多面体として) extremal 元  $P_{x,\lambda} = \text{Conv}\{z \cdot \lambda \mid z \leq x\}$  を含むことである.

4.4 残っている問題. 定理 4.3.1 の “Demazure クリスタル版” に相当する, 次の問題を考えるのは自然であろう ([NS4, §4.6] 参照): 「 $x \in W$  とする.  $P \in \mathcal{MV}(\lambda)$  が Demazure クリスタル  $\mathcal{MV}_x(\lambda) = \Psi_\lambda(\mathcal{B}_x(\lambda))$  に含まれるための必要十分条件は,  $P$  が (多面体として) extremal 元  $P_{x,\lambda}$  に含まれることであろうか?」しかし, この問題の十分性については, 既に成立しないことが分かっている. (すなわち,  $P \subset P_{x,\lambda}$  であるが,  $P \notin \mathcal{MV}_x(\lambda)$  となる場合がある. [NS4, Remark 4.6.1] 参照.) 一方, 必要性については今のところ成立するかどうか分かっていない.

問題.  $x \in W$  とする.  $P \in \mathcal{MV}(\lambda)$  が Demazure クリスタル  $\mathcal{MV}_x(\lambda)$  に含まれていれば,  $P$  は (多面体として) extremal 元  $P_{x,\lambda}$  に含まれるか?

最後に. 今回, この研究集会で講演する機会を下さった宮地兵衛先生と中島達洋先生に感謝いたします. ありがとうございます.

## References

- [A] J. E. Anderson, A polytope calculus for semisimple groups, *Duke Math. J.* **116** (2003), 567–588.
- [H] J. Hong, Mirković-Vilonen cycles and polytopes for a symmetric pair, arXiv:0711.0070.
- [Kam1] J. Kamnitzer, Mirković-Vilonen cycles and polytopes, arXiv:math.AG/0501365.
- [Kam2] J. Kamnitzer, The crystal structure on the set of Mirković-Vilonen polytopes, *Adv. Math.* **215** (2007), 66–93.
- [Kas1] M. Kashiwara, The crystal base and Littelmann’s refined Demazure character formula, *Duke Math. J.* **71** (1993), 839–858.
- [Kas2] M. Kashiwara, Bases cristallines des groupes quantiques, Cours Spécialisés Vol. 9, Société Mathématique de France, Paris, 2002.
- [NS1] S. Naito and D. Sagaki, Lakshmibai-Seshadri paths fixed by a diagram automorphism, *J. Algebra* **245** (2001), 395–412.
- [NS2] S. Naito and D. Sagaki, Crystal bases and diagram automorphisms, in “Representation Theory of Algebraic Groups and Quantum Groups” (T. Shoji et al., Eds.), pp. 321–341, Adv. Stud. Pure Math. Vol. 40, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2004.
- [NS3] S. Naito and D. Sagaki, A modification of the Anderson-Mirković conjecture for Mirković-Vilonen polytopes in types  $B$  and  $C$ , *J. Algebra* **320** (2008), 387–416.
- [NS4] S. Naito and D. Sagaki, Mirković-Vilonen polytopes lying in a Demazure crystal and an opposite Demazure crystal, arXiv:0806.3112.