数理解析研究所講究録
第 1647 巻 2009 年 33-37

A 型 affine Hecke 代数の既約加群の同定について

有木　進（京都大学数理解析研究所）

1　序

$q\in\mathbb{C}^{\times}$ をパラメータとする $\mathbb{C}$ 上定義された A 型 affine Hecke 代数 H_n とは，

$$X_1^{\pm},\ldots,X_n^{\pm},T_1,\ldots,T_{n-1}$$

を生成元とし，基本関係

$$(T_i-q)(T_i+1)=0,\quad T_iT_{i+1}T_i=T_{i+1}T_iT_{i+1},\quad T_iT_j=T_jT_i\ (j\geq i+2)$$
$$X_iX_j=X_jX_i,\quad X_{i+1}=q^{-1}T_iX_iT_i$$

で定義された代数である．基礎体が複素数体である必要はないがあとで幾何的な既約加群の構成と比較するので本稿では最初から複素数体にしておく．よく知られているように一般線形群の表現論で基礎的な役割を果たすので q が素数べきの場合は既約加群の分類など昔からよく研究されていた．他方，基礎体が正標数の場合を考えると q が素数べきであっても必然的に 1 のべき根になるので，その第一近似として $q\in\mathbb{C}^{\times}$ が 1 のべき根の場合が重要である．本稿では q が 1 の原始 e 乗根 $(e\geq 2)$ と仮定する．

多くの場合，既約表現の分類をするには中心指標を考えるのが基本である．H_n の中心は Bernstein により $X_1,\ldots,X_n$ の Laurent 多項式代数に等しいことが知られており，これは $(X_1,\ldots,X_n)$ の同時固有値 $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in(\mathbb{C}^{\times})^n$ の順序を忘れた集合 $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}\in(\mathbb{C}^{\times})^n/S_n$ を考えることが中心指標を考えることと同じということを意味する．ここでさらに $\mathbb{C}^{\times}$ に q-倍作用を考え，可換群 $q^{\mathbb{Z}}$ により軌道分解することが重要である.[1]　すなわち，$\mathcal{O}\subseteq\mathbb{C}^{\times}$ を $q^{\mathbb{Z}}$-軌道とするとき H_n-Mod の充満部分圏 $\mathcal{C}_{n,\mathcal{O}}$ を

$$\mathcal{C}_{n,\mathcal{O}}=\{\,\text{有限次元 } H_n\text{-加群で } X_1,\ldots,X_n \text{ の固有値はすべて } \mathcal{O} \text{ に属す.}\}$$

と定義すれば，任意の既約 H_n-加群 L に対し，互いに相異なる $q^{\mathbb{Z}}$-軌道 $\mathcal{O}_1,\ldots,\mathcal{O}_r$ と既約 H_{n_j}-加群 $L_j\in\mathcal{C}_{n_j,\mathcal{O}_j}$ $(1\leq j\leq r)$ が存在し，（ここで $n_1+\cdots+n_r=n$）

$$L=\mathrm{Ind}_{H_{n_1}\otimes\cdots\otimes H_{n_r}}^{H_n}(L_1\otimes\cdots\otimes L_r)$$

とできる．ゆえに既約 H_n-加群の分類は $\mathcal{C}_{n,\mathcal{O}}$ に属する既約 H_n-加群の分類に帰着する.[2]　この分類には 2 つの方法がある．ひとつは Lusztig, Ginzburg の理論に

[1] 今の場合，$q^{\mathbb{Z}}$ は位数 e の有限巡回群である．

[2] $\mathcal{O}=q^{\mathbb{Z}}$ として一般性を失わないので以下そう仮定する．

より幾何的に構成・分類するもので，もうひとつは H_n の巡回商を考え，cellular 代数の理論を用いて組み合わせ論的に既約表現を構成・分類するものである．

同じ既約表現が幾何的な構成方法と組み合わせ論的な構成方法とふたつの表示をもつのであるから，具体的に2つのラベルがどう対応しているかという問いは自然である．その答え自身は昔からわかっていたが，さぼっていてまじめに考えを詰めて論文を書くことをしなかった．今回，N. Jacon, C. Lecouvey と H_n のモジュラー分岐則に関して共著論文を書くことになり，その証明と密接な関連があるこの問題についても完全な解答を書くことができたので要点を報告する．詳しくは共著論文 [AJL] を参照されたい．

2 組み合わせ論的表現論による既約加群の構成

$\mathfrak{g}$ を $A^{(1)}_{e-1}$ 型 Kac-Moody Lie 代数とする．Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ は $\alpha_i^\vee$ $(i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z})$ と次数作用素 d を基底に持ち，基本ウェイト $\Lambda_i \in \mathfrak{h}^*$ が

$$\Lambda_i(\alpha_j^\vee) = \delta_{ij}, \quad \Lambda_i(d) = 0$$

で定まる．$\Lambda \in \oplus_{i\in\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_{\geq 0}\Lambda_i$ に対し，H_n の巡回商 H_n^Λ が H_n を

$$\prod_{i\in\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} (X_1 - q^i)^{\Lambda(\alpha_i^\vee)}$$

の生成する両側イデアルで割って得られる $\mathbb{C}$-代数として定義される．Dipper, James, Mathas により，基礎体が何であってもこの有限次元代数 H_n^Λ は cellular 代数になることが知られている．具体的には，$m = \sum_{i\in\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} \Lambda(\alpha_i^\vee)$ とするとき，$\Lambda = \Lambda_{\gamma_1} + \cdots + \Lambda_{\gamma_m}$ という書き方を1つ固定して m-分割 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(m)}) \vdash n$ の各セルの e-剰余を

$$x \in \boldsymbol{\lambda} \text{ が } \lambda^{(c)} \text{ の } a \text{ 行 } b \text{ 列成分のとき } res(x) = -a + b + \gamma_c$$

と定めると，各 m-分割 $\boldsymbol{\lambda}$ に対し Specht 加群 $S^{\boldsymbol{\lambda}}$ と $S^{\boldsymbol{\lambda}}$ 上の不変内積 $\langle\ ,\ \rangle$ が定義されて，$D^{\boldsymbol{\lambda}} = S^{\boldsymbol{\lambda}}/\mathrm{Rad}_{\langle\ ,\ \rangle}(S^{\boldsymbol{\lambda}})$ とおけば $D^{\boldsymbol{\lambda}} \neq 0$ となる $D^{\boldsymbol{\lambda}}$ の全体が既約 H_n^Λ-加群の完全代表系を与える．さて，分割 λ が e-制限的とは隣同士の行の長さがつねに $e-1$ 以下のときをいうのであった．Misra-Miwa の結果により，e-制限的な分割の全体は $\mathfrak{g}$-crystal $B(\Lambda_i)$ と同一視できる．著者と Mathas により次が示されている．

定理 1. $D^{\boldsymbol{\lambda}} \neq 0$ である必要十分条件は

$$\lambda^{(m)} \otimes \cdots \otimes \lambda^{(1)} \in B(\Lambda) \subseteq B(\Lambda_{\gamma_m}) \otimes \cdots \otimes B(\Lambda_{\gamma_1}).$$

ここで $B(\Lambda)$ は最高ウエイト元を含む $B(\Lambda_{\gamma_m}) \otimes \cdots \otimes B(\Lambda_{\gamma_1})$ の連結成分で，最高ウエイト Λ の結晶基底から定まる $\mathfrak{g}$-crystal と同型である．

この定理より，既約 H_n^Λ-加群の集合を $n = 0, 1, \ldots$ とすべて合わせて考えると $\mathfrak{g}$-crystal $B(\Lambda)$ とみなすことができるわけであるが，さらに著者は [A] で次の結果（モジュラー分岐則）も得ていた．ただし，ここで $\tilde{e}_i$ は柏原作用素である．

定理 **2.** D^{λ} の i-制限 $e_i(D^{\lambda})$，すなわち X_n の固有値 q^i の広義固有空間をとり H_{n-1}^{Λ}-加群とみなしたものに対し，モジュラー分岐則 $\mathrm{Soc}(e_i(D^{\lambda})) = D^{\tilde{e}_i\lambda}$ が成立.

ゆえに Kleshchev が対称群の場合に，Brundan が A 型 Hecke 代数の場合に得ていたモジュラー分岐則の Leclerc による crystal での解釈は H_n^{Λ} の場合でも成立し，モジュラー分岐則による結晶構造は Specht 加群理論による結晶構造と一致することが示されたわけである.

任意の既約 H_n-加群は十分大きな Λ に対して H_n^{Λ}-加群になるからこれで既約 H_n-加群がすべて構成できたことになる．これが組み合わせ論的手法による既約 H_n-加群の構成法である.

3 幾何的表現論による既約加群の構成

Z_n を Steinberg 代数多様体とし，$K^{GL_n\times G_m}(Z_n)$ を Z_n 上の $GL_n \times G_m$-同変連接層のなすアーベル圏の Grothendieck 群とする．よく知られているように，$K^{GL_n\times G_m}(Z_n)$ は畳み込み積により指標環 $R(GL_n \times G_m)$ 上の代数になる．$s \in GL_n(\mathbb{C})$ を固有値がすべて $q^{\mathbb{Z}}$ に含まれる対角行列とすると $a = (s, q)$ は中心指標 $R(GL_n \times G_m) \to \mathbb{C}$ を定める．$\mathbf{q} : G_m \to \mathbb{C}^{\times}$ とおき $R(GL_n \times G_m)$ を $\mathbb{Z}[\mathbf{q}^{\pm}]$-係数の $X_1, \ldots, X_n$ の Laurent 対称式環と同一視すると特殊化 affine Hecke 代数 $H_n^a = \mathbb{C} \otimes_{R(GL_n\times G_m)} H_n$ に対し Lusztig, Ginzburg の理論により

$$H_n^a \simeq \mathbb{C} \otimes_{R(GL_n\times G_m)} K^{GL_n\times G_m}(Z_n) \simeq H_*^{BM}(Z_n^a, \mathbb{C})$$

が成立する．さらに，$\mathcal{N}_n$ を GL_n の Lie 代数のべき零錐として，

$$\mathcal{N}_n^a = \{X \in \mathcal{N}_n \mid sXs^{-1} = qX\}$$

の上の $Z_{GL_n}(s)$-偏屈層を用いて既約 H_n^a-加群の分類ができる．具体的には Springer 解消を制限した写像 $\tilde{\mathcal{N}}_n^a \to \mathcal{N}_n^a$ で定数層の押し出しを考え，各 $Z_{GL_n}(s)$-軌道上の交差複体の shift の重複度空間のすべての shift にわたる直和をとると，これらが既約 H_n^a-加群の完全代表系を与える．ここで $\mathcal{N}_n^a$ の $Z_{GL_n}(s)$-軌道は multisegment で分類され，次の定理が Lusztig と Ginzburg の理論から従う．(よく知られた話なのでここで改めて multisegment や aperiodicity の定義はしないが，たとえば [AJL] を見よ.)

定理 **3.** 既約 H_n^a-加群は *aperiodic multisegment* で分類される.

ただし，ここで出てくる aperiodic multisegment には $i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ の重複度が s の固有値の中に現れる q^i の重複度に一致するもののみが現れる．以下では $a = (s, q)$ を動かしてすべての aperiodic multisegment のなす集合を考える.

[AJL] で詳しく説明したように，この分類は同型 $K^{GL_n\times G_m}(Z_n) \simeq H_n$ の取り方に依存する．しかし，すべての n に対して共通のやり方で同型を選ぶことができて，その共通の選び方をひとつ固定したとき，次節で述べる主定理が成り立つように aperiodic multisegment のなす集合の上に結晶構造を導入することができる．すなわち，$\mathcal{C}_{n,\mathcal{O}}$ に属する既約 H_n-加群の集合を $n = 0, 1, \ldots$ とすべて合わせて考えると $\mathfrak{g}$-crystal $B(\infty)$ とみなすことができる．そしてこの結晶構造も純組み合わせ論的に記述できる．これが幾何的表現論の手法による既約 H_n-加群の構成法である．aperiodic multisegment $\mathbf{m} \in B(\infty)$ でラベルされる既約 H_n-加群を $L_{\mathbf{m}}$ と書くこととする.

4 主結果

第2節の組み合わせ論的手法による既約 H_n-加群の分類では柏原結晶 $B(\Lambda)$ が使われ，他方第3節の幾何的表現論による既約 H_n-加群の分類では柏原結晶 $B(\infty)$ が出てきたわけであるから，この2つの分類が柏原結晶の埋め込みで記述されると期待するのは自然であろう．実際次の定理が成り立つ.[3]

定理 4. 結晶埋め込み $B(\Lambda) \hookrightarrow B(\infty) \otimes T_\Lambda$ を $\boldsymbol{\lambda} \mapsto f(\boldsymbol{\lambda}) \otimes t_\Lambda$ と書く．このとき，H_n-加群として $D^{\boldsymbol{\lambda}} \simeq L_{f(\boldsymbol{\lambda})}$ である．

この定理とほぼ同値であるのがモジュラー分岐則であり次の定理を証明することができる．

定理 5. $\mathrm{Soc}(e_i L_{\mathbf{m}}) \simeq L_{\tilde{e}_i \mathbf{m}}$.

モジュラー分岐則（定理2と定理5）から定理4はただちに従う．実際，帰納法で示すことにして帰納法の仮定 $D^{\tilde{e}_i \boldsymbol{\lambda}} \simeq L_{f(\tilde{e}_i \boldsymbol{\lambda})}$ が成立すると仮定すれば

$$\mathrm{Soc}(e_i L_{f(\boldsymbol{\lambda})}) \simeq L_{\tilde{e}_i f(\boldsymbol{\lambda})} = L_{f(\tilde{e}_i \boldsymbol{\lambda})} \simeq D^{\tilde{e}_i \boldsymbol{\lambda}} = \mathrm{Soc}(e_i D^{\boldsymbol{\lambda}})$$

と crystal の性質より $L_{f(\boldsymbol{\lambda})} \simeq D^{\boldsymbol{\lambda}}$ が得られ，帰納法が成立する．

上記2定理が [AJL] の主結果であり，以下ではどうやってモジュラー分岐則を示すかを説明する．まず，モジュラー分岐則は $\mathrm{Top}(e_i L_{\mathbf{m}}) \simeq L_{\tilde{e}_i \mathbf{m}}$ という形で示してもよい．p_i を X_n の固有値 q^i の広義固有空間への射影子から定まるべき単元とする．Steinberg 多様体の a-固定点 Z_n^a は連結成分にわかれ，各連結成分では s のどの固有値の固有ベクトルを足していって flag を作るかという固有値の順序 $(q^{i_1}, \ldots, q^{i_n})$ の対は一定である．そこで，$q^{i_n} = q^i$ となる flag の対だけを集めたものを $p_i Z_n^a p_i$ と書けば，$\mathbb{C}$-代数の同型 $p_i H_n^a p_i \simeq H_*^{BM}(p_i Z_n^a p_i, \mathbb{C})$ を得る．

既約 H_n^a-加群 $L_{\mathbf{m}}$ に対し $e_i L_{\mathbf{m}} = p_i L_{\mathbf{m}}$ であり，この既約 $p_i H_n^a p_i$-加群は上記の観察により $L_{\mathbf{m}}$ の構成とまったく同様の幾何的構成法で得ることができる.[4]

目標は $\mathrm{Top}(p_i L_{\mathbf{m}})$ を求めることであるが，$a = (s, q)$ から q^{i_n} をはずしたものを $a' = (s', q)$ として，全射代数準同型 $p_i H_n^a p_i \to H_{n-1}^{a'}$ を考えると既約 $p_i H_n^a p_i$-加群はすべて既約 $H_{n-1}^{a'}$-加群から得られる．ゆえに，モジュラー分岐則を考えることは $p_i L_{\mathbf{m}}$ の極大部分 $p_i H_n^a p_i$-加群での商に何が現れるかを考えることに等価である．そして，定理が主張しているのは $L_{\tilde{e}_i \mathbf{m}}$ が現れる，ということである．

aperiodic multisegment のなす結晶構造は $U^-(\mathfrak{g})$ の標準基底から定まるものであるから，$L_{\tilde{e}_i \mathbf{m}}$ が現れることを示すには上記の幾何を Lusztig による $U^-(\mathfrak{g})$ の幾何的構成とつなげる必要がある．Chevalley 生成元 f_i の幾何的実現は Lusztig の図式

$$\mathcal{N}_{n-1}^a \leftarrow E' \rightarrow E'' \rightarrow \mathcal{N}_n^a$$

により得られる．ここで，E'' は $x \in \mathcal{N}_n^a$ と s の固有値 q^i のところでだけ1次元減っている x-stable な部分空間 U の対 (x, U) からなり，$\mathcal{N}_{n-1}^a$ 上の偏屈層は E''

[3] この柏原結晶の埋め込みは純組み合わせ論的かつ最高ウエイト元に遡る必要のない方法で具体的に記述することができる．興味のある方は [AJL] を参照されたい．

[4] 理論をより詳しく知っている読者のために書けば，Springer 解消による定数層の押し出しを用いて $L_{\mathbf{m}}$ を構成したのであったが，ここで $q^{i_n} = q^i$ となる flag の定める連結成分だけに制限して定数層の押し出しを考えれば，あとは $L_{\mathbf{m}}$ のときと同じく $\mathbf{m}$ でラベルされる $Z_{GL_n}(s)$-軌道上の自明な局所系の定める交差複体の shift の重複度空間の直和を考えれば $p_i L_{\mathbf{m}}$ が得られるのである．

上の偏屈層にうつる．よってとくに米田代数（Ext algebra）を考えたときその半単純商は変わらない．これが既約 $p_iH_n^ap_i$-加群がすべて既約 $H_{n-1}^{a'}$-加群から得られることの幾何的な意味である．さらに $E'' \to \mathcal{N}_n^a$ での押し出しを合成したものが f_i の幾何的実現であるが，準同型 $p_iH_n^ap_i \to H_n^a$ はこの押し出しが米田代数に誘導する準同型写像に他ならないこともわかる．こうしてモジュラー分岐則と f_i の幾何的実現との関係がつき，とくにこの押し出しに現れる偏屈層（の shift）を見ることにより $L_{\mathbf{m}}$ を単射準同型 $p_iH_n^ap_i \hookrightarrow H_n^a$ で制限した表現，すなわち $p_iL_{\mathbf{m}}$ への $p_iH_n^ap_i$ の作用のブロック行列表示を得ることができる．さらに，ブロック行列表示のどのブロックがゼロになるかを見ると，商に $L_{\tilde{e}_i\mathbf{m}}$ が現れる $p_iL_{\mathbf{m}}$ の極大部分 $p_iH_n^ap_i$-加群が存在することを示すことができる．これが示したいことであった．

5 最後に

最近，Khovanov-Lauda, Brundan-Kleshchev の仕事により H_n^Λ の理論をもっと多くの例を生み出す状況で考えられようになりつつある．最近の発展はかなり急であり数年後には今までの理論の多くが拡張されていると思われる．

References

[A] S. Ariki, Proof of the modular branching rule for cyclotomic Hecke algebras, J. Algebra **306** (2006), 290-300.

[AJL] S. Ariki, N. Jacon and C. Lecouvey The modular branching rule for affine Hecke algebras of type A, arXiv:0808.3915.

[BK] J. Brundan and A. Kleshchev, Blocks of cyclotomic Hecke algebras and Khovanov-Lauda algebras, arXiv:0808.2032.

[CG] N. Chriss and V. Ginzburg, Representation Theory and Complex Geometry, Birkhäuser, 1997.

[KL] M. Khovanov and A. Lauda, A diagrammatic approach to categorification of quantum groups I, arXiv:0803.4121.

[R] R. Rouquier, 2-Kac-Moody algebras, arXiv:0812.5023.

[V] M. Vazirani, Parametrizing Hecke algebra modules: Bernstein-Zelevinsky multisegments, Kleshchev multipartitions, and crystal graphs, Transform. Groups **7** (2002), 267-303.