数理解析研究所講究録
第 1647 巻 2009 年 69-80

On a bijective proof of a factorization formula for Macdonald polynomials at roots of unity

沼田 泰英 (稚内北星学園大学 情報メディア学部)

概要

Haiman, Haglund, Loehr によって与えられた Modified Macdonald polynomials $\widetilde{H}_\mu(X;q,t)$ の組合せ論的な記述を用い, factorization formula と呼ばれる公式に組合せ論的な証明を, μ が特殊な場合に, 与えることができたので, その概略について解説する. なお, この結果は François Descouens 氏と森田英章氏との共同研究に基ずくものである.

1 Introduction

Macdonald [4] によって導入された Macdonald polynomial は Hall-Littlewood functions の一般化であるが, ここでは, Macdonald polynomial を変形することで得られる, modified Macdonald polynomial $\widetilde{H}_\mu(X;q,t)$ について扱う. Haglund, Haiman, Loehr は [3] で, $\widetilde{H}_\mu(X;q,t)$ を monomial basis で展開したときの係数の組合せ論的な表示 (Theorem 2.6) を与えた. これにより $\widetilde{H}_\mu(X;q,t)$ は, Young diagram μ 上の filling T に対して定義される, $\mathrm{inv}(T)$, $\mathrm{maj}(T)$ という量に関する, 重みつきの母関数として記述できる.

一方, Descouens と Morita は, [1] で, t が 1 の冪根であるときの特殊値に関する factorization formula と呼ばれる公式を代数的に示している. もう少し言うと, $\mu = (\nu, n^l, \kappa)$ という形をした Young dialgram μ と, 1 の原始 l 乗根に対して,

$$\widetilde{H}_\mu(X;q,\zeta_l) = \widetilde{H}_{(\nu,\kappa)}(X;q,\zeta_l) \cdot \widetilde{H}_{(n^l)}(X;q,\zeta_l)$$

という等式が成立している. Haglund-Haiman-Loehr の式を使い, この等式を組合せ論的に証明することが我々の目標である. 我々は $\kappa = \varnothing$ かつ $n = 1, 2$ の場合という場合, すな

わち, $\mu = (\nu, n^l)$ に対する

$$\widetilde{H}_\mu(X;q,\zeta_l) = \widetilde{H}_\nu(X;q,\zeta_l) \cdot \widetilde{H}_{(n^l)}(X;q,\zeta_l) \tag{1}$$

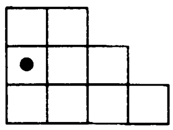
という等式に, 組合せ論的な証明を与えることができた [2] ので, 本稿ではその概略について述べる. なお, 詳しい証明などは [2] を参照されたい.

2 Modified Macdonald polynomials の組合せ論的表示

記号は特に断りがない限り [5] に従う. ここでは [3] で導入された modified Macdonald polynomials の組合せ論的な表示について述べる.

非負整数の非増加列 $\mu = (\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq 0)$ を partition とよび Young diagram $\{ (i,j) \in \mathbb{N}^2 \,|\, 1 \leq j \leq \mu_i \}$ と同一視する. ここでは Young diagram を French notation を使って Example 2.1 のように書きあらわす. Young diagram μ の cell $c = (i,j)$ に対して, c と同じ行で c よりも右側にある cell の数 $|\{ (i,k) \in \lambda \,|\, k > j \}| = \lambda_i - j$ を $\mathrm{arm}(c)$ で表す. また, c と同じ列で c よりも上にある cell の数 $|\{ (k,j) \in \lambda \,|\, k > i \}|$ を $\mathrm{leg}(c)$ で表す.

Example 2.1 $(4,3,2) \vdash 9$ は次の Young diagram で表す:



$\bullet$ の書いてある cell $c = (2,1)$ に対し, $\mathrm{arm}(c) = 2$, $\mathrm{leg}(c) = 1$ である.

写像 T: $\mu \ni (i,j) \mapsto T_{i,j} \in \mathbb{Z}_{>0}$ を μ 上の filling と呼び, Young diagram μ の各 cell (i,j) に $T_{i,j}$ を書き入れた図形で T を表示する. また, μ 上の filling T に対し, $w_k = |\{ (i,j) \in \mu \,|\, T_{i,j} = k \}|$ で定義される非負整数列 $w = (w_1, w_2, \ldots)$ を T の weight と呼ぶ. Weight が w である μ 上の Filling T と変数 $X = (X_1, X_2, \ldots)$ に対し, $X^T = x_1^{w_1} x_2^{w_2} \cdots = \prod_{(i,j)\in\mu} X_{T_{i,j}}$ と定義する. また Young diagram μ と非負整数の列 w に対し, $\mathcal{F}_\mu$, $\mathcal{F}_\mu(w)$ を, 次で定義する:

$$\mathcal{F}_\mu = \{ T \,|\, \mu \text{ 上の filling} \}$$
$$\mathcal{F}_\mu(w) = \{ T \,|\, \mu \text{ 上の filling で weight が } w \text{ のもの} \}.$$

Young diagram μ 上の Filling T と正の整数 i に対し,

$$\mathrm{Des}_i(T) = \{ (i,j) \in \mu \,|\, T_{i-1,j} < T_{i,j} \}$$

と定義する (特に $i = 1$ のとき $\mathrm{Des}_1(T) = \emptyset$). Des を用いて, maj_i, maj を次のように定義する:

$$\mathrm{maj}_i(T) = \sum_{c \in \mathrm{Des}_i(T)} (1 + \mathrm{leg}(c)),$$
$$\mathrm{maj}(T) = \sum_i \mathrm{maj}_i(T).$$

また, $\mathrm{arm}_i(T)$ を

$$\mathrm{arm}_i(T) = \sum_{c \in \mathrm{Des}_i(T)} \mathrm{arm}(c)$$

と定義しておく.

Example 2.2 次は $(4,3,2)$ 上の weight $(1,2,1,3,0,1,0,1)$ の filling である:

$$T = \begin{matrix} 6 & 2 & & \\ 2 & 7 & 8 & \\ 4 & 4 & 1 & 3 \end{matrix} \quad .$$

この T に対し, $\mathrm{Des}_3(T) = \{ (3,1) \}$, $\mathrm{Des}_3(T) = \{ (2,2), (2,3) \}$ であるので $\mathrm{maj}_3(T) = 1$, $\mathrm{maj}_2(T) = 2 + 1$. したがって, $\mathrm{maj}(T) = 4$.

Example 2.3 $(2,2,2,1)$ 上の filling

$$T = \begin{matrix} 1 & \\ 4 & 7 \\ 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{matrix}$$

において, $\mathrm{Des}_3(T) = \{ (3,1), (3,2) \}$ であり, $\mathrm{Des}_2(T) = \mathrm{Des}_4(T) = \emptyset$ である. したがって, 次を得る:

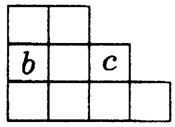
$$\mathrm{arm}_3(T) = 1 + 0 = 1, \qquad \mathrm{arm}_2(T) = \mathrm{arm}_4(T) = 0,$$
$$\mathrm{maj}_3(T) = 2 + 1 = 3, \qquad \mathrm{maj}_2(T) = \mathrm{maj}_4(T) = 0.$$

Young diagram μ と正の整数 i に対して,

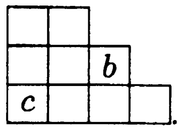
$$\mathrm{Att}'_i(\mu) = \{ ((i,j),(i,j')) \mid 1 \le j < j' \le \mu_i \},$$
$$\mathrm{Att}''_i(\mu) = \{ ((i,j),(i-1,j')) \mid 1 \le j' < j \le \mu_i \}.$$

とおく.

Remark 2.4 $\mathrm{Att}'_i(\mu)$ は μ の i 行目にある 2 つの cell を左から並べたものであり, 次のような位置関係にある cell 達である:



また $\mathrm{Att}''_i(\mu)$ は i 行目の cell と $i-1$ 行目の cell の pair で i 行目の cell の方が右にあるようなものを集めたものであり, 次のような位置関係にある cell 達である:



また, μ 上の filling T に対して,

$$\mathrm{Inv}'_i(T) = \left\{ (b,c) \in \mathrm{Att}'_i(\mu) \,\middle|\, T_b > T_c \right\},$$
$$\mathrm{Inv}''_i(T) = \left\{ (b,c) \in \mathrm{Att}''_i(\mu) \,\middle|\, T_b > T_c \right\}$$

と定義する. さらに,

$$\mathrm{inv}'_i(T) = \left|\mathrm{Inv}'_i(T)\right|$$
$$\mathrm{inv}''_i(T) = \left|\mathrm{Inv}''_i(T)\right|$$

とおき

$$\mathrm{inv}_i(T) = \mathrm{inv}'_i(T) + \mathrm{inv}''_i(T) - \mathrm{arm}_i(T)$$
$$\mathrm{inv}(T) = \sum_i \mathrm{inv}_i(T).$$

と定義する.

Example 2.5 Example 2.3 の T に対し,

$$\mathrm{Inv}'_2(T) = \{ ((2,1),(2,2)) \}, \qquad \mathrm{Inv}'_1(T) = \mathrm{Inv}'_3(T) = \mathrm{Inv}'_4(T) = \emptyset,$$
$$\mathrm{Inv}''_3(T) = \{ ((2,1),(3,2)) \}, \qquad \mathrm{Inv}''_2(T) = \mathrm{Inv}''_4(T) = \emptyset$$

であるので,

$$\mathrm{inv}_2(T) = 1 + 0 - 0 = 1,$$
$$\mathrm{inv}_3(T) = 0 + 1 - 1 = 0,$$
$$\mathrm{inv}_4(T) = 0 + 0 - 0 = 0.$$

したがって,

$$\begin{aligned}\mathrm{maj}(T) &= 0+3+0=3\\ \mathrm{inv}(T) &= 0+(1+0+0)=1.\end{aligned}$$

以上のような定義の下, modified Macdnald polynomial は次の表示をもつ:

Theorem 2.6 ([3]) Young diagram $\mu \vdash m$ に対し, modified Macdonald polynomial $\widetilde{H}_\mu(x;q,t)$ は次のような μ 上の filling 上の重みつき母関数としての表示をもつ:

$$\begin{aligned}\widetilde{H}_\mu(X;q,t) &= \sum_{T\in\mathcal{F}_\mu} q^{\mathrm{inv}(T)}t^{\mathrm{maj}(T)}X^T\\ &=\sum_{w}\sum_{T\in\mathcal{F}_\mu(w)} q^{\mathrm{inv}(T)}t^{\mathrm{maj}(T)}X_1^{w_1}X_2^{w_2}\cdots,\end{aligned}$$

ただし, $w=(w_1,w_2,\ldots)$ は $\sum_i w_i = m$ を満たす非負整数列を動く.

この表示を用いると, (1) は母関数間の等式となり次のような 1 対 1 対応の存在へと言い替えることができるが, この 1 対 1 対応を具体的に構成するというのが我々の問題意識である.

Theorem 2.7 For each w, there exists a bijection

$$\varphi\colon \bigcup_{w'+w''=w} \mathcal{F}_\nu(w')\times\mathcal{F}_{(r^l)}(w'') \to \mathcal{F}_\mu(w)$$

such that

$$\begin{aligned}\mathrm{maj}(\varphi(T_1,T_2)) &\equiv \mathrm{maj}(T_1)+\mathrm{maj}(T_2) \pmod{l},\\ \mathrm{inv}(\varphi(T_1,T_2)) &= \mathrm{inv}(T_1)+\mathrm{inv}(T_2),\end{aligned}$$

for all $(T_1,T_2)\in\bigcup_{w'+w''=w}\mathcal{F}_\nu(w')\times\mathcal{F}_{(r^l)}(w'')$, where $\mu=\nu\amalg(r^l)$.

3 Young diagrams with tails

ν を $l(\nu)=k$ かつ $\nu_k\geq r$ を満たす Young diagram とする, すなわち $\nu_{k+1}=0$ とする. $\mu=(\nu_1,\ldots,\nu_k,r,\ldots,r)=\nu\amalg(r^l)$ となっている場合を考える. 我々は $r=1$ または 2 の場合に Theorem 2.7 の全単射を具体的に構成することができた. この節では一般の r に対して成立する事実に述べる.

$\pi\colon \nu \amalg (r^l) \to \mu$ を自然な全単射すなわち

$$\pi(c) = \begin{cases} (i,j) & \text{if } c = (i,j) \in \nu \\ (i+k,j) & \text{if } c = (i,j) \in (r^l) \end{cases}$$

で定義される写像とする. μ 上の filling T に対し, $T \circ \pi\colon \nu \amalg (r^l) \to \mathbb{Z}$ は, ν 上の filling $T' = (T \circ \pi)\,|_\nu$ と (r^l) 上の filling $T'' = (T \circ \pi)\,|_{(r^l)}$ の pair と同一視できる, ただしここで $T\,|_\kappa$ は T の κ への制限を表す. すなわち, π は,

$$\pi^*\colon \mathcal{F}_\mu \ni T \mapsto ((T \circ \pi)\,|_\nu, (T \circ \pi)\,|_{(r^l)}) \in \mathcal{F}_\nu \times \mathcal{F}_{(r^l)}$$

という全単射を誘導するが, π と T を合成することで weight が変わらないことに注意すると,

$$\pi^*\colon \mathcal{F}_\mu(w) \to \bigcup_{w=w'+w''} \mathcal{F}_\nu(w') \times \mathcal{F}_{(r^l)}(w'')$$

は全単射となっていることがわかる.

T を $\mu = \nu \amalg (r^l)$ 上の filling とし. $\pi^*(T) = (T_1, T_2) \in \mathcal{F}_\nu \times \mathcal{F}_{(n^l)}$ とする. $l(\nu) = k$ であることに着目すると, T の k 行目までは T_1 に移り, T の $k+1$ 行目以降は T_2 に移ることがわかる. この事実に注意すると, i 行目の情報のみから決まる $\mathrm{Inv}'_i T$ には, $\pi^*(T)$ に対応するものがある. すなわち, 任意の i に対し, π^* で保存されることがわかる. また同様に, i 行目と $i-1$ 行目の情報から決まる $\mathrm{Des}_i(T)$, $\mathrm{Inv}''_i(T)$ は, $i \neq k$ に対し, π^* で保存されることがわかる. 一方, $\mathrm{Des}_k(T)$, $\mathrm{Inv}''_k(T)$ には, $\pi^*(T)$ に対応するものがないため, π^* で保存されない. 以上の事実をまとめると,

$$\mathrm{inv}(T) = \mathrm{inv}(T_1) + \mathrm{inv}(T_2) + \mathrm{inv}''_{k+1}(T) - \mathrm{arm}_{k+1}(T), \tag{2}$$

$$\mathrm{maj}(T) = \mathrm{maj}(T_1) + \mathrm{maj}(T_2) + \mathrm{maj}_{k+1}(T) \tag{3}$$

を得る. 今 $\mu = \nu \amalg (r^l)$ 上の filling を考えているので, $\mathrm{maj}_{k+1}(T) = l \cdot |\mathrm{Des}_{k+1}(T)|$ であるから, (3) より

$$\mathrm{maj}(T) \equiv \mathrm{maj}(T_1) + \mathrm{maj}(T_2) \pmod{l} \tag{4}$$

となる.

4 $r = 1$ の場合

ここでは, $r = 1$ の場合, すなわち $\mu = \nu \amalg (1^l)$ のときを考える. 特に $\nu = (h)$ とすることで, hook (h, r^l) の場合が含まれる.

T を $\mu = \nu \amalg (1^l)$ 上の filling とすると, $i > k$ に対し $\mathrm{Att}''_i(\mu) = \emptyset$ であるので $\mathrm{Inv}''_i(T) = \emptyset$ となる. 特に, $\mathrm{Inv}''_{k+1}(T) = \emptyset$ であるので, $\mathrm{inv}''_{k+1}(T) = 0$ である.

また, μ の $k+1$ 行目には $b = (k+1, 1)$ しか cell はないので $\mathrm{Des}_{k+1}(T) \subset \{\, b \,\}$ である. $\mathrm{arm}(b) = 0$ であることに着目すると, $\mathrm{arm}_i(T) = 0$ がわかる.

従って (2) と (4) より次の定理を得る.

Theorem 4.1 Let ν be a partition $(\nu_1, \ldots, \nu_k)$ with $\nu_k \geq 1$. For $\mu = \nu \amalg (1^l)$, let $\pi \colon \nu \amalg (1^l) \to \mu$ and $\pi^* \colon \mathcal{F}_\mu \to \mathcal{F}_\nu \times \mathcal{F}_{(1^l)}$ be as above. Then $\varphi = (\pi^*)^{-1}$ satisfies the condition of Theorem 2.7.

Example 4.2 $l = 3$, $\mu = (2, 2, 1, 1, 1)$ の場合を考える. このとき次が成り立っている:

$$\mathrm{maj}\left(\begin{array}{|c|c}\hline 2 & \\ \hline 1 & \\ \hline 3 & \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c|}{3} \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c|}{2} \\ \hline\end{array}\right) = 1 + 3 + 4 + 1 = 9,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{maj}\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline\end{array}\right) + \mathrm{maj}\left(\begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline\end{array}\right) &= (1+1) + 1 = 3 \\ &\equiv 9 \pmod 3,\end{aligned}$$

$$\mathrm{inv}\left(\begin{array}{|c|c}\hline 2 & \\ \hline 1 & \\ \hline 3 & \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c|}{3} \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c|}{2} \\ \hline\end{array}\right) = 1 - 1 = 0,$$

$$\mathrm{inv}\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline\end{array}\right) + \mathrm{inv}\left(\begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline\end{array}\right) = (1 - 1) + 0 = 0.$$

5　$r = 2$ の場合

次に, $r = 2$ の場合すなわち $\mu = \nu \amalg (2^l)$ のときを考える. この場合, $(\pi^*)^{-1}$ は Theorem 2.7 の条件を満たさない. そこで, 我々は $\tau \colon \mathcal{F}_\mu(w) \to \mathcal{F}_\mu(w)$ という全単射をうまく構成し $\varphi = (\pi^* \circ \tau)^{-1}$ が Theorem 2.7 の条件を満たすようにする. まず τ を定義するために必要となる言葉を用意する.

Definition 5.1 (condition xAx) 次の不等式のいずれかを満たすとき, Filling T の i

行目と $(i+1)$ 行目が condition xAx を満たすという:

$$a \le A < b,$$
$$b \le A < a,$$

ただし $T_{i+1,1} = a$, $T_{i+1,2} = b$, and $T_{i,1} = A$ とする.

Remark 5.2 T と T' が $T_{i+1,1} = T'_{i+1,2}$, $T_{i+1,2} = T'_{i+1,1}$, $T_{i,1} = T'_{i,1}$ を満たすとする. このとき, T の i 行目と $(i+1)$ 行目が condition xAx を満たすことと, T' の i 行目と $(i+1)$ 行目が condition xAx を満たすことは同値.

Definition 5.3 (condition $xXxX$) 次の不等式のいずれかを満たすとき, Filling T の i 行目と $(i+1)$ 行目が condition $xXxX$ を満たすという:

$$a \le A < b \le B,$$
$$b \le A < a \le B,$$
$$a \le B < b \le A,$$
$$b \le B < a \le A,$$
$$A < b \le B < a,$$
$$A < a \le B < b,$$
$$B < b \le A < a,$$
$$B < a \le A < b,$$

ただし $T_{i+1,1} = a$, $T_{i+1,2} = b$, $T_{i,1} = A$, $T_{i,2} = B$.

Remark 5.4 T と T' は $T_{i+1,1} = T'_{i+1,2}$, $T_{i+1,2} = T'_{i+1,1}$, $T_{i,1} = T'_{i,1}$, $T_{i,2} = T'_{i,2}$ をみたすとする. このとき, T の i 行目と $(i+1)$ 行目が condition $xXxX$ を満たすことと, T' の i 行目と $(i+1)$ 行目が condition $xXxX$ を満たすことは同値.

Definition 5.5 $\mu = \nu \amalg (2^l)$ 上の filling T に対し, $\tau(T)$ を次の手続きによって得られる filling T' として定義する:

入力 Filling T, 整数 $k = l(\nu)$.
変数 i, T'.
手続き

1. 変数 i と T' を初期化する.
   (a) $i \longleftarrow k$.
   (b) $T' \longleftarrow T$.

2. If T' の i 行目と $(i+1)$ 行目が condition xAx を満たす do
   (a) T' の $(i+1)$ 行目の値を入れ換える.
   (b) $i \longleftarrow i+1$.

   else T' を出力し終了.
3. While の i 行目と $(i+1)$ 行目が condition $xXxX$ を満たす do
   (a) T' の $(i+1)$ 行目の値を入れ換える.
   (b) $i \longleftarrow i+1$.
4. T' を出力し終了.

出力 Filling T'.

Example 5.6 $l=5$, $\nu=(3,3)$ としたとき, $\tau(T)$ を決めるアルゴリズムの各ステップでは次のようになる:

$$T = \begin{array}{ccc} 1 & 4 & \\ 3 & 5 & \\ 2 & 6 & \\ 1 & 3 & \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \\ \mathbf{3} & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{ccc} 1 & 4 & \\ 3 & 5 & \\ 2 & 6 & \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} & \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{ccc} 1 & 4 & \\ 3 & 5 & \\ \mathbf{2} & \mathbf{6} & \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \\ 4 & 2 & \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{ccc} 1 & 4 & \\ 3 & 5 & \\ 6 & 2 & \\ 3 & 1 & \\ 4 & 2 & \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{array} = \tau(T) .$$

Remark 5.7 Remark 5.2 と Remark 5.4 により, τ が involution すなわち $\tau(\tau(T)) = T$ がわかる. また, τ は T の weight をかえることはないので $\tau\colon \mathcal{F}_\mu(w) \ni T \mapsto \tau(T) \in \mathcal{F}_\mu(w)$ が全単射であることがわかる.

このように定義された τ に対し次の定理が成り立つ.

Theorem 5.8 For $\mu = (\nu_1, \ldots, \nu_k, 2^l) = \nu \amalg (2^l)$ such that $\nu_k \geq 2$, let $\pi\colon \nu\amalg(2^l) \to \mu$, $\pi^*\colon \mathcal{F}_\mu \to \mathcal{F}_\nu \times \mathcal{F}_{(n^l)}$ be as above, and τ a bijection defined in Definition 5.5. Then $\varphi = (\pi^* \circ \tau)^{-1}$ satisfies the condition of Theorem 2.7.

Example 5.9 Example 5.6 で用いた例に対し, maj は次のようになっている:

$$\mathrm{maj}(T) = \mathrm{maj}\left(\begin{array}{ccc} 1 & 4 & \\ 3 & 5 & \\ 2 & 6 & \\ 1 & 3 & \\ 2 & 4 & \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{array}\right) = 13\ ,$$

$$\begin{aligned} \mathrm{maj}(\pi^* \circ \tau(T)) = \mathrm{maj}\left(\begin{array}{ccc} 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{array}\right) + \mathrm{maj}\left(\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ 3 & 5 \\ 6 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{array}\right) &= 0 + 8 = 8 \\ &\equiv 13 \pmod 5\ . \end{aligned}$$

また inv については次のようになっている:

$$\mathrm{inv}(T) = \mathrm{inv}\left(\begin{array}{ccc} 1 & 4 & \\ 3 & 5 & \\ 2 & 6 & \\ 1 & 3 & \\ 2 & 4 & \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{array}\right) = 0 + 5 - 2 = 3\ ,$$

$$\mathrm{inv}(\pi^* \circ \tau(T)) = \mathrm{inv}\left(\begin{array}{ccc} 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{array}\right) + \mathrm{inv}\left(\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ 3 & 5 \\ 6 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{array}\right) = 3 + 1 - 1 = 3\ .$$

6 Theorem 5.8 の証明について

以下では Theorem 5.8 の証明の概略を述べる.

(2), (4) より, inv の差は, $\mathrm{inv}''_{k+1}(T) - \mathrm{arm}_{k+1}(T)$ であったので, まず, inv''_{k+1} と arm_{k+1} に着目する.

Lemma 6.1 T の i 行目と $(i+1)$ 行目が condition xAx を満たさないなら

$$\mathrm{inv}''_{i+1}(T) - \mathrm{arm}_{k+1}(T) = 0.$$

この Lemma より, T の k 行目と $(k+1)$ 行目が condition xAx を満たさないなら $\mathrm{inv}(T)$ は π^* で保存されることがわかる. 一方, T の k 行目と $(k+1)$ 行目が condition xAx を満たすときには次が成立する.

Lemma 6.2 T と T' が $T_{i+1,1} = T'_{i+1,2}$, $T_{i+1,2} = T'_{i+1,1}$, $T_{i,1} = T'_{i,1}$ を満たすとする. T の i 行目と $(i+1)$ 行目が condition xAx を満たすとき, 次が成り立つ:

$$\mathrm{inv}'_{i+1}(T) = \mathrm{inv}'_i(T') + \mathrm{inv}''_{i+1}(T') - \mathrm{arm}_{i+1}(T')$$
$$\mathrm{inv}'_{i+1}(T') = \mathrm{inv}'_i(T) + \mathrm{inv}''_{i+1}(T) - \mathrm{arm}_{i+1}(T).$$

この Lemma より, π^* によって k 行目と $k+1$ 行目が切り離される際に生まれる inv の差 $\mathrm{inv}''_{k+1}(T) - \mathrm{arm}_{k+1}(T)$ を τ が帳消にしていることがわかる. しかしながら τ により, $k+1$ 行目に入っている値が入れ換えられてしまうため, $k+1$ 行目に起因する inv と maj が変わる可能性がある. しかしながら, 次の Lemma があるため, $k+1$ 行目と $k+2$ 行目が condition $xXxX$ を満たすときには, さらに $k+2$ 行目の値を入れ換えることで, $k+1$ 行目に起因する inv と maj を調整することができる.

Lemma 6.3 T と T' が $T_{i+1,1} = T'_{i+1,2}$, $T_{i+1,2} = T'_{i+1,1}$, $T_{i,1} = T'_{i,2}$, $T_{i,1} = T'_{i,2}$ を満たすとする. T の i 行目と $(i+1)$ 行目は condition $xXxX$ を満たすとすると, 次が成り立つ:

$$\mathrm{maj}_{i+1}(T) = \mathrm{maj}_{i+1}(T')$$
$$\mathrm{inv}'_i(T) + \mathrm{inv}''_{i+1}(T) - \mathrm{arm}_{i+1}(T) = \mathrm{inv}'_i(T') + \mathrm{inv}''_{i+1}(T') - \mathrm{arm}_{i+1}(T').$$

一方, T の i 行目と $(i+1)$ 行目が condition $xXxX$ を満たさない場合は次の 2 つの Lemma のいずれかが当てはまり, $k+1$ 行目に起因する inv と maj は, $k+1$ 行目を交換したことでは変化していないことがわかる.

Lemma 6.4 T と T' は $T_{i+1,1} = T'_{i+1,1} = a$, $T_{i+1,2} = T'_{i+1,2} = b$, $T_{i,1} = T'_{i,2} = A$, $T_{i,2} = T'_{i,1} = B$ をみたすとし, 次のうちのどちらかが成り立つとする:

$$A < a, b \leq B,$$
$$B < a, b \leq A.$$

(ただし $A < a, b \leq B$ は $A < a \leq B$ かつ $A < b \leq B$ を表すとする.) このとき, 次が成り立つ:

$$\mathrm{maj}_{i+1}(T) = \mathrm{maj}_{i+1}(T'),$$
$$\mathrm{inv}'_i(T) + \mathrm{inv}''_{i+1}(T) - \mathrm{arm}_{i+1}(T) = \mathrm{inv}'_i(T') + \mathrm{inv}''_{i+1}(T') - \mathrm{arm}_{i+1}(T').$$

Lemma 6.5 T と T' は $T_{i+1,1} = T'_{i+1,1} = a$, $T_{i+1,2} = T'_{i+1,2} = b$, $T_{i,1} = T'_{i,2} = A$, $T_{i,2} = T'_{i,2} = B$ を満たし, 次の不等式のうちのいずれかが成り立つとする:

$$a, b \leq A, B,$$
$$A, B < a, b,$$
$$a \leq A, B < b,$$
$$b \leq A, B < a.$$

このとき次が成り立つ:

$$\mathrm{Des}_{i+1}(T) = \mathrm{Des}_{i+1}(T'),$$
$$\mathrm{Inv}''_{i+1}(T) = \mathrm{Inv}''_{i+1}(T'),$$
$$\mathrm{Inv}'_{i+1}(T) = \mathrm{Inv}'_{i+1}(T').$$

以上から, condition $xXxX$ を満たさなくなるまで, 次々と交換を繰り返すことで, いま必要な filling が得られることがわかる. したがって, Definition 5.5 により定義された τ を用い, $\varphi = (\pi^* \circ \tau)^{-1}$ とおくと, Theorem 2.7 の条件を満たすこと, すなわち Theorem 5.8 がわかる.

参考文献

[1] F. Descouens and H. Morita, *Factorization formula for Macdonald polynomials*, to appear in European Journal of Combinatorics.

[2] F. Descouens, H. Morita, Y. Numata, *On a bijective proof of a factorization formula for Macdonald polynomials*, preprint.

[3] J. Haglund, M. Haiman and N. Loehr, *A combinatorial formula for Macdonald polynomials*, J. Amer. Math. Soc. **18**, (2005), pp. 195-232.

[4] I.G. Macdonald, *A new class of symmetric functions*, Actes du 20e Séminaire Lothatingien de Combinatoire, vol. **372/S-20**, Publications I.R.M.A., Strasbourg, (1998), pp. 131-171.

[5] I.G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, second ed. The Clarendon Press, Oxford University Press, New-York, 1995.