数理解析研究所講究録
第1649巻 2009年 73-80

配属人数下限付き研修医配属問題

濱田 浩気 [1] 宮崎 修一 [2] 岩間 一雄 [1]
[1] 京都大学 情報学研究科
[2] 京都大学 学術情報メディアセンター

Koki Hamada[1] Shuichi Miyazaki[2] Kazuo Iwama[1]
[1]Graduate School of Informatics, Kyoto University
[2]Academic Center for Computing and Media Studies, Kyoto University
{khamada, iwama}@kuis.kyoto-u.ac.jp, shuichi@media.kyoto-u.ac.jp

1 はじめに

安定結婚問題 (Stable Marriage problem; SM) は，Gale と Shapley [1] によって最初に研究された問題である．SM の例題は同じ大きさの男性集合と女性集合，各個人の希望リストからなる．希望リストは，異性全員を好みの順番に並べた，全順序リストである．マッチングにおいて，互いに自身のパートナーよりも相手を好んでいる男女の対を，blocking pair (BP) と呼ぶ．安定マッチングは，BP を含まないマッチングである．SM は，与えられた例題の安定マッチングを求める問題である．同じ論文 [1] で，すべての例題が少なくとも一つの安定マッチングを持つことと，そのうちの一つを見つける多項式時間アルゴリズムが示されている．このアルゴリズムは，Gale-Shapley algorithm として知られている．

Gale と Shapley [1] は，SM の多対一への拡張も提案している．この問題は，研修医配属問題 (Hospitals/Residents problem; HR) と呼ばれる．HR の例題は，研修医集合，病院集合，研修医の希望リスト，病院の希望リスト，各病院の割り当て数の上限からなる．希望リストは，相手の集合の全部または一部を，好みの順番に並べた全順序リストである．この問題の実行可能解は，研修医と病院の間の多対一のマッチングで，どの病院も上限以下の人数の研修医が割り当てられているものである．研修医と病院の間のマッチング M において，研修医 r と病院 h が (1) 互いに相手を希望リストに書いている，(2) h に割り当てられている研修医の数が h の上限より小さい，または，h が h に割り当てられている研修医の少なくとも一つよりも r を好む，(3) r がどの病院にも割り当てられていない，または，r が割り当てられている病院よりも h を好む，の全てを満たすとき，研修医と病院の対 (r, h) を M の BP と呼ぶ．SM と同様に，HR の例題も少なくとも一つの安定マッチングを持ち，適切に変更された Gale-Shapley algorithm によって，安定マッチングの一つを求めることができる．

我々の結果 本研究では，研究室配属のように，各病院にある程度の人数の配属者を保証したい場合，すなわち，HR で各病院に割り当てられる研修医数の下限を追加した問題 (Hospitals/Residents problem with Minimum Quota; HRMQ) を考える．HRMQ では，実行可能解の存在を保証するため，希望リストには相手の集合の全員を書くものとする．この問題の実行可能解は，研修医と病院の間の多対一のマッチングで，どの病院も割り当てられている研修医の人数が下限以上かつ上限以下となっているものである．HRMQ では，安定な解が存在しない場合がある．しかし，安定な解がないとしても，できるだけ安定な解を求めることが望ましい．そこで，安定性の指標として BP の数を用い，BP の数を最小化する HRMQ を考える．この問題を BP 最小化 HRMQ と呼ぶ．病院 (研修医) の希望リストが単一であるとき，この希望リストをマスターリスト (Master List; ML)

と呼ぶ．BP 最小化 1ML-HRMQ は，BP 最小化 HRMQ で病院の希望リストが単一であるという制限付きの問題である．BP 最小化 2ML-HRMQ は，BP 最小化 HRMQ で研修医，病院の希望リストがそれぞれ単一であるという制限付きの問題である．研修医の集合を R，病院の集合を H として，(1) P=NP でないならば，ある制約の下でも，任意の $\varepsilon > 0$ に対して BP 最小化 1ML-HRMQ の多項式時間 $(|R|+|H|)^{1-\epsilon}$ 近似アルゴリズムが存在しないこと，(2) BP 最小化 HRMQ の $(|R|+|H|)$ 近似アルゴリズム，(3) BP 最小化 2ML-HRMQ の多項式時間アルゴリズムを示す．

HRMQ のマッチング M に対し，研修医 r が M の BP に含まれているとき，r は M の blocking resident であるという．blocking resident 最小化 HRMQ(BR 最小化 HRMQ) は，与えられた HRMQ の例題に対し，blocking resident の数が最小のマッチングを求める問題である．研修医の集合を R として，(1) BR 最小化 1ML-HRMQ が NP 困難であること，(2) BR 最小化 HRMQ の多項式時間 $\sqrt{|R|}$ 近似アルゴリズム，(3) (2) の $\sqrt{|R|}$ 近似アルゴリズムの解析が定数倍の範囲で厳密であることを示す．

2 準備

HRMQ の例題は，研修医集合 R，病院集合 H，研修医の希望リスト，病院の希望リスト，各病院の割り当て数の上下限からなる．病院 h の上限が p，下限が q であるとき，h は $[p,q]$ の病院であると言い，$h[p,q]$ と書く．マッチングは，R から H への写像であり，各病院 $h[p,q]$ に割り当てられた研修医の数が p 以上 q 以下であるものである．マッチング M で r が割り当てられている病院を $M(r)$，h に割り当てられている研修医の集合を $M(h)$ と書く．マッチング M で病院 $h[p,q]$ が $|M(h)|=q$ であるとき，h は M で full であるという．$|M(h)|<q$ であるとき，h は M で under-subscribed であるという．h が M で under-subscribed かつ $|M(h)|=p$ であるとき，h は M で critical であるという．$p<|M(h)|<q$ であるとき，h は M で intermediate であるという．BP の定義は，HR に対する BP の定義と同じである．

HRMQ の例題 I に対し，$F(I)=|R|-\sum_{h[p,q]\in H} p$ を例題 I の余裕数と呼ぶ．ある I のマッチング M で病院 $h[p,q]$ に割り当てられている研修医の数を x とするとき，$\max\{p-x,0\}$ を M における病院 h の不足数と呼ぶ．また，M の各病院の不足数の和をマッチング M の不足数と呼ぶ．さらに，I で下限を無視して得られる HR の例題の安定マッチングの 1 つを M とするとき，マッチング M の不足数を例題 I の不足数と呼び，$D(I)$ で表す．なお，与えられた HR の例題に対しては，どの病院もすべての安定マッチングで同じ人数の研修医が割り当てられることが示されている [2]．したがって，$D(I)$ は安定マッチングの選び方によらず，例題 I に対して一意に決まる値である．

本研究では，Gale-Shapley algorithm を変更した HR に対するアルゴリズム resident-oriented Gale-Shapley algorithm [3] をサブルーチンとして使用する．

3 BP 最小化 HRMQ

3.1 BP 最小化 1ML-HRMQ の近似困難性

まず，BP 最小化 1ML-HRMQ の近似困難性を示す．BP 最小化 1ML-HRMQ の例題 I について，いくつかのクラスに対して近似困難性を示すことができる．次の定理は，それらのうち，最も強いものの一つである．(i) すべての希望リストは完全リスト，(ii) 各病院の上限は 1，(iii) $F(I)=0$，のすべてが成り立つ I の例題のクラスを C とする．NP 完全問題である Minimum Vertex Cover からのギャップ導入還元により，次の定理が示される (証明は省略する)．

定理 3.1 任意の定数 $\varepsilon > 0$ に対し，*P=NP* でないならば，クラス C の *BP* 最小化 *1ML-HRMQ* に対する多項式時間 $(|H|+|R|)^{1-\epsilon}$ 近似アルゴリズムは存在しない．但し，R は研修医集合，H は病院集合である．

3.2 BP 最小化 HRMQ の $(|H|+|R|)$ 近似アルゴリズム

次の定理により，定理 3.1 で示した BP 最小化 1ML-HRMQ の近似度の下界は，ほぼ厳密であると言える．

定理 3.2 *BP* 最小化 *HRMQ* に対する多項式時間 $(|H|+|R|)$ 近似アルゴリズムが存在する．

次の単純なアルゴリズム (Algorithm 1) が，$|H|+|R|$ の近似保証を達成する (証明は省略する)．

Algorithm 1

1: 病院の下限を無視して resident-oriented Gale-Shapley algorithm を適用し，安定マッチングを得る．
2: 下限よりも多く研修医が割り当てられている病院から研修医を任意に動かし，下限の条件が満たされるようにする．

3.3 BP 最小化 2ML-HRMQ の多項式時間アルゴリズム

2ML，すなわち研修医・病院双方の希望リストが単一の場合には，一般に問題は易しくなる [4]．BP 最小化 2ML-HRMQ も P に含まれるが，以下に示すように，最適解の中には直感に反するものがある．

4 人の研修医 1，2，3，4 と，4 つの病院 $a[0,2]$，$b[1,2]$，$c[1,1]$，$d[1,1]$ からなる例題 I を考える．研修医，病院の希望リストはともにそれぞれ単一で，

$$\begin{array}{llllllllllll} 1: & a & b & c & d & \qquad\qquad & a[0,2]: & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2: & a & b & c & d & & b[1,2]: & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3: & a & b & c & d & & c[1,1]: & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4: & a & b & c & d & & d[1,1]: & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

とする．

下限の条件から，b，c，d の各病院に研修医を 1 人ずつ割り当てなくてはならない．すると，c と d は full なので，残りの 1 人は a か b のどちらかに割り当てるしかない．a が最も好まれている病院なので，a に割り当てるのがよさそうに思われる．そこで，各病院に a に 1 人，b に 1 人，c に 1 人，d に 1 人割り当てることにし，上位の研修医から順に上位の病院に割り当てると，$\{(1,a),(2,b),(3,c),(4,d)\}$ のマッチングが得られる．このマッチングは，5 組の BP $(2,a),(3,a),(4,a),(3,b),(4,b)$ を含む．一方，この例題の最適解は $\{(1,b),(2,b),(3,c),(4,d)\}$ であり，4 組の BP $(1,a),(2,a),(3,a),(4,a)$ しか含まない．すなわち，この例題では，下限の制約を満たしたまま，最も好まれている病院 a に研修医を割り当てることができるにも関わらず，a に研修医を割り当てないのが最適となる．

定理 3.3 *BP* 最小化 *2ML-HRMQ* の最適解を求める $O(|H||R|)$ 時間アルゴリズムがある．

証明 $R=\{r_i : 1 \leq i \leq |R|\}$ を研修医の集合，$H=\{h_i : 1 \leq i \leq |H|\}$ を病院の集合とし，添字が小さい研修医 (病院) が，マスターリストで，より上位に書かれているとする．$i<j$ のとき，病院 h_i は h_j より上位である，h_j は h_i より下位である，と言う．研修医についても同様である．

次のような制限を考える．各病院 $h_i[p_i,q_i]$ に対し，h_i へ割り当てる研修医の数を x_i と決める．但し，$p_i \leq x_i \leq q_i$，$\Sigma_{i=1}^{|H|} x_i = |R|$ である．このような各病院への数の割り当てを，人数割り当てと呼ぶ．この制限された問題でも，BP の定義は変わらないことに注意する．すなわち，病院が full であるか under-subscribed であるかは，$[p_i,q_i]$ によって決まる．

この制限付きの問題に対して，次のような貪欲アルゴリズム (GREEDY と呼ぶ) を考える．GREEDY では，r_1 から $r_{|R|}$ まで，各研修医をまだ研修医を受け入れることができる，最も上位の病院から順に割り当てていく．

補題 3.4 Greedy は BP の数が最小のマッチングを作る．

証明 人数割り当てが決まっているので，各病院が full かそうでないかは，マッチングに依存しない．各病院 h_i に対し，a_i を h_i よりも下位の病院に割り当てられている研修医の数とする．この a_i もマッチングに依存しない．h_i が under-subscribed，すなわち，$x_i < q_i$ ならば，h_i を含む BP は a_i 組である．h_i が full ならば，h_i を含む BP があるかもしれないし，ないかもしれない．しかし，Greedy で得られるマッチングでは，h_i を含む BP はない． □

補題 3.4 より，最適解を与える人数割り当てを求めればよいことがわかる．動的計画法により，最適解を与える人数割り当てを求める．まず，$1 \leq i \leq |H|$，$0 \leq j \leq |R|$ である各 i，j に対して，下位 j 研修医を下位 i 病院に割り当てる部分問題を考える．$b[i][j]$ を最適解のコスト，すなわち，この部分問題の BP の数の最小値とする (実行可能解が存在しない場合は $b[i][j] = \infty$ とする)．このとき，元の問題のコストは $b[|H|][|R|]$ である．$b[i][j]$ は，次の Algorithm 2 により計算される (正しさの証明は省略する)．下から i 番めの病院を h_{-i} と書くことにする．すなわち，$h_{-i} = h_{|H|-i+1}$ である．また，h_{-i} の上下限をぞれぞれ p_{-i}，q_{-i} と書く．

Algorithm 2

$b[i][j] \leftarrow \infty \ (0 \leq i \leq |H|, 0 \leq j \leq |R|)$
$b[0][0] \leftarrow 0$
for $i = 1$ **to** $|H|$ **do**
  for $j = 0$ **to** $|R|$ **do**
    for $k = p_{-i}$ **to** $\min(q_{-i} - 1, j)$ **do**
      $b[i][j] \leftarrow \min(b[i][j], b[i-1][j-k] + (j-k))$
    end for
    $b[i][j] \leftarrow \min(b[i][j], b[i-1][j-q_{-i}])$ **if** $j \geq q_{-i}$
  end for
end for

Algorithm 2 の計算時間は，最悪の場合で $O(|H||R|^2)$ である．以下では，計算時間を $O(|H||R|)$ に改善する方法について述べる．

補題 3.5 *BP* 最小化 *2ML-HRMQ* の最適解は，高々 *1* 個の *intermediate* な病院を含む．また，もし *intermediate* な病院 h_i を含むならば，h_i より上位の各病院は *full* であり，h_i より下位の各病院は *full* か *critical* のどちらかである．

証明 under-subscribed な病院 h_i が intermediate な病院 h_j よりも上位であると仮定する．1 人の研修医を h_j から h_i へ移動させると，BP の数が少なくとも 1 減少する． □

$1 \leq i \leq |H|$，$0 \leq j \leq |R|$ である各 i，j に対して，各病院が full か critical であるように下位 j 研修医を下位 i 病院に割り当てる部分問題を考える．$b[i][j]$ を再定義し，この i，j に対する部分問題の BP の数の最小値とする．解がない場合は $b[i][j] = \infty$ である．$b[i][j]$ は次式により，$O(|H||R|)$ 時間で求まる．

$$b[i][j] = \begin{cases} 0 & (i = 0, j = 0) \\ \infty & (i = 0, j \neq 0) \\ \min(b[i-1][j-q_{-i}], b[i-1][j-p_{-i}] + j - p_{-i}) & (1 \leq i \leq |H|, 0 \leq j \leq |R|) \end{cases}$$

最適解では高々1 つしか intermediate の病院を含まない．したがって，intermediate な病院の選び方は $|H|+1$ 通りしかない．intermediate な病院を h_* とすると，h_* へ割り当てる研修医数 s の選び方は高々 $|R|$ 通りであ

る．よって，intermediate な病院の選び方と，その病院に何人割り当てるかの組合せは，全体で $O(|H||R|)$ 通りである．補題 3.5 より，h_* より上位の病院はすべて full にしなくてはならず，それらの病院は補題 3.4 の証明より，BP を作らない．s_1 をこれらの病院へ割り当てる研修医の数，すなわち，これらの病院の上限の和とする．s 人の研修医が h_* に割り当てられるので，補題 3.4 の証明より，h_* が作る BP は $|R| - s_1 - s$ 組である．最後に，残りの $|R| - s_1 - s$ 人の研修医を h_* より下位の病院に割り当てる．補題 3.5 より，各病院は full か critical にしなくてはならない．最良の方法は，既に計算された $b[i][j]$ を与える人数割り当てである．したがって，h_* と s を固定すると，残りの計算は定数時間でできるので，この部分の計算時間は $O(|H||R|)$ である．よって全体の計算時間は $O(|H||R|)$ である． □

4 BR 最小化 HRMQ

4.1 BR 最小化 1ML-HRMQ の NP 困難性

NP 完全問題である CLIQUE からの還元により，次の定理を得る (証明は省略する)．

定理 4.1 *BR 最小化 1ML-HRMQ は NP 困難である．*

4.2 0-1 BR 最小化 HRMQ

次に，BR 最小化 HRMQ は，病院の上限が 1 の場合に限定しても本質が失われないことを示す．病院を $[0, 1]$ と $[1, 1]$ に限定した BR 最小化 HRMQ を，0-1 BR 最小化 HRMQ と呼ぶ．次の補題が得られる (証明は省略する)．

補題 4.2 *0-1 BR 最小化 HRMQ の多項式時間 α 近似アルゴリズムが存在するならば，BR 最小化 HRMQ の多項式時間 α 近似アルゴリズムも存在する．*

4.3 BR 最小化 HRMQ の多項式時間 $\sqrt{|R|}$ 近似アルゴリズム

HR において，H を病院集合，$A, B \subseteq H$ とするとき，B のすべての病院の上限を ∞ に置き換えた例題を考える．この例題の安定解で，A に割り当てられる研修医の人数の合計値を $g(A, B)$ とする．与えられた HR の例題に対しては，どの病院もすべての安定マッチングで同じ人数の研修医が割り当てられるので [2]，$g(A, B)$ は一意に定まることに注意する．A や B の大きさが 1 で，誤解を招く恐れがない場合は，例えば $g(\{a\}, B)$ を $g(a, B)$ と書くことがある．

Algorithm 3

1: 上限だけを見て resident-oriented Gale-Shapley algorithm を実行し，得られたマッチングを M_0 とする．
2: M_0 の不足数を z とする．
3: $H'_{0,1} = \{h : M_0(h) \neq \emptyset, h \text{ は } [0, 1]\}$.
4: 各 $h \in H'_{0,1}$ について，$g(h, h)$ を計算する．
5: $h \in H'_{0,1}$ で $g(h, h)$ が最小の z 個の病院の集合を S_a とし，S_a の各病院の上下限を $[0, \infty]$ にして，resident-oriented Gale-Shapley algorithm を実行する．
6: S_a へ割り当てられた研修医を，下限の条件にあうように研修医が割り当てられていない $[1, 1]$ 病院へ動かす．

0-1 BR 最小化 HRMQ に対するアルゴリズム (Algorithm 3) を考える．病院の下限の和は研修医数以下であり，不足数の定義から $|H'_{0,1}| \geq z$ であるので，5 行目で S_a をとれないことはない．

また，5 行目を実行したとき，$[0, 1]$ の病院に割り当てられている研修医の数は $|H'_{0,1}| - |S_a|$ 以下である．$H_{1,1}$ を $[1, 1]$ の病院の集合とすると，$|H'_{0,1}| + |H_{1,1}| = |R| + z$ であるので，$[1, 1]$ または $[0, \infty]$ の病院に割り当てら

れている研修医の数は $|R| - (|H'_{0,1}| - |S_a|) = |R| - (|R| + z - |H_{1,1}| - z) = |H_{1,1}|$ 以上である．すなわち，6 行目で S_a に割り当てられている研修医の数は研修医が割り当てられていない $[1,1]$ 病院の数以上であるので，必ず実行可能解が得られる．

まず，有用な HR の性質について述べる．resident-oriented Gale-Shapley algorithm では，研修医がプロポーズを行う順序は任意であった．また，与えられた HR の例題に対しては，どの病院もすべての安定マッチングで同じ人数の研修医が割り当てられることが示されている [2]．これらを利用して，次の補題を得る．

補題 4.3 *与えられた HR の例題の病院の集合を H とする．$S \subseteq H$ のとき，以下のすべてが成立する．(i) $\sum_{h \in S} g(h,S) = g(S,S)$，(ii) $h \in S$ ならば $g(h,S) \le g(h,h)$，(iii) $h \in S$ ならば $g(h,h) \le g(S,S)$．*

証明 (i) は定義より明らかである．残りの性質を示すために，次の補題を考える．

補題 4.4 *I_0 を HR の例題とし，I_0 の病院，研修医の集合をそれぞれ H，R とする．また，$h \in H$ とし，I_1 を I_0 で h の上限を 1 増やした HR の例題とする．I_0，I_1 の安定マッチングをそれぞれ M_0，M_1 とすると，以下のすべてが成立する．(1) $|M_0(h)| \le |M_1(h)|$，(2) $\forall h' \in H \setminus \{h\}$，$|M_0(h')| \ge |M_1(h')|$．*

証明 I_1 に研修医 r を追加して，HR の例題 I_2 を作る．I_2 で r は h を最も好み，どの病院 $x \in H$ も r を最も好むとする．I_2 の任意の安定マッチング M_2 に対して，$M_2(r) = h$ である．I_2 に対して resident-oriented Gale-Shapley algorithm を行う際に，r が最初にプロポーズしたとする．その後は r は h に割り当てられたままである．I_2 から r を取り除き，h の上限を 1 減らした例題は I_0 と一致するので，以後の手順は I_0 に対して resident-oriented Gale-Shapley algorithm を行う場合と同じである．したがって $|M_2(h)| = |M_0(h)| + 1$，$|M_2(h')| = |M_0(h')|$ $(h' \ne h)$．I_2 に対する resident-oriented Gale-Shapley algorithm で，r 以外の全ての研修医がいずれかの病院に割り当てられているときに限って r がプロポーズすることにすると，r が初めてプロポーズする時点でのマッチングは，I_1 の安定マッチングである．resident-oriented Gale-Shapley algorithm の実行中はどの病院も割り当てられている研修医の数は減少しないので，$|M_1(x)| \le |M_2(x)| (x \in H)$．また，$|M_1| + 1 = |M_2|$ より，$|M_2(x)| \le |M_1(x)| + 1$ $(x \in H)$．よって，$|M_0(h)| + 1 = |M_2(h)| \le |M_1(h)| + 1$，$|M_0(h')| = |M_2(h')| \ge |M_1(h')|$． □

補題 4.4 の (2) より，(ii) が成り立つ．$(H \setminus S) \cap S = \emptyset$ なので，$S \setminus \{h\}$ の病院の上限を順に大きくしていく操作を考えると，補題 4.4 の (2) から，$g(H \setminus S, S) \le g(H \setminus S, h)$ が得られる．また，$g(H \setminus S, S) = |R| - g(S,S)$，$g(H \setminus S, h) = |R| - g(S,h)$ より，$g(S,h) \le g(S,S)$．明らかに $g(h,h) \le g(S,h)$ なので，(iii) が得られる． □

定理 4.5 *Algorithm 3 は 0-1 BR 最小化 HRMQ の多項式時間 $\sqrt{|R|}$ 近似アルゴリズムである．*

証明 I' を 0-1 BR 最小化 HRMQ の例題とし，I' に Algorithm 3 を適用して得られた解の blocking resident の数を f_a とする．

resident-oriented Gale-Shapley algorithm は多項式時間アルゴリズムであるので，Algorithm 3 もまた多項式時間アルゴリズムである．

Algorithm 3 は必ずしも 0-1 BR 最小化 HRMQ の最適解を返さないが，次の補題により，Algorithm 3 の Step 5 で $H'_{0,1}$ から z 個の病院を適切に選べば，blocking resident の数が f_o 以下の 0-1 BR 最小化 HRMQ の解が得られることを示す．

補題 4.6 *I' を 0-1 BR 最小化 HRMQ の例題，H を I' の病院集合，$z(=D(I'))$ を I' の不足数，f_o を I' の最適解の blocking resident の数をとする．このとき，以下のすべてを満たす S_o が存在する：(1) $S_o \subseteq H'_{0,1}$，(2) $|S_o| = z$，(3) $g(S_o, S_o) = f_o$．但し，$H'_{0,1}$ は I' で上限だけを見たときの安定マッチングで研修医が割り当てられている $[0,1]$ の病院の集合である．*

証明 HRMQ のマッチングにおいて，(r,h) が BP で，他のどの BP (r,h') に対しても r が h' より h を好むとき，h を r の矛先の研修医と呼ぶ．

I' の最適解の一つを M_0 とし，I' のマッチング M_1 を以下の手続きにより構築する．

1: M_0 を現在のマッチングにする．$R_n :=$ non-blocking resident の集合．$R_b :=$ blocking resident の集合．
2: **while** ある研修医 $r \in R_b$ が病院に割り当てられている **do**
3: 　$h := r$ が割り当てられている病院．r を free にする．
4: 　**while** $X := \{x : x \in R_n \wedge (x,h)$ が BP $\}$ が空集合でない **do**
5: 　　$r' := X$ の中で h が最も好む研修医．
6: 　　r' を h に割り当てる．
7: 　　$h := r'$ が直前に割り当てられていた病院．
8: 　**end while**
9: **end while**
10: 現在のマッチングを M_1 として出力する．

この手続きは有限ステップで停止する．なぜなら，Step 4 から Step 8 の繰り返し毎に，ちょうど 1 人の研修医がよりよい病院に割り当てられ，それ以外の研修医は変わらないからである．M_1 が以下の性質を満たすことを示す: (a) どの病院にも割り当てられていない研修医がちょうど f_o 人存在する; (b) 病院に割り当てられている研修医は，non-blocking resident である．Step 3 はちょうど $|R_b|$ 回実行され，また，$|R_b| = f_o$ であるので，(a) は成り立つ．Step 1 では，R_n に含まれるすべての研修医は non-blocking resident であり，R_n の研修医を含んでいるすべての BP は Step 3 または Step 6 で生じたものである．これらの BP はすべて h を含んでおり，次に Step 6 が実行された際に解消される．よって，(b) は成り立つ．

さらに，I' のマッチング M_2 を以下の手続きにより構築する．

1: M_1 を現在のマッチングにする．
2: **while** ある unassigned な研修医 r の矛先の病院 h が full **do**
3: 　$r' := h$ に割り当てられており，h が r' よりも r を好むような研修医．
4: 　r' を free にする．
5: 　r を h に割り当てる．
6: **end while**
7: 現在のマッチングを M_2 として出力する．

この手続きも有限ステップで停止する．なぜなら，Step 2 から Step 6 の繰り返し毎に，ちょうど 1 つの病院に，よりよい研修医が割り当てられ，それ以外の病院は変わらないからである．M_1 の性質 (a)，(b) が M_2 に対しても成り立つことは容易に確認できる．$H'_{0,1}$ のうち，M_2 で研修医が一人も割り当てられていない病院の集合を S_o とする．M_2 が以下の性質も満たすことを示す: (c) $[1,1]$ であり，研修医が割り当てられていない病院が，ちょうど f_o 個存在する．(d) どの病院にも割り当てられていない研修医の矛先の病院は，S_o に含まれている．

研修医が割り当てられていない $[1,1]$ の病院の数が f_0 未満であると仮定すると，M_0 よりもよい解を作ることができ，M_0 の最適性に矛盾する．M_0 では，すべての $[1,1]$ の病院は full である．M_0 で研修医が割り当てられていない病院が，M_2 でも研修医が割り当てられていないことは，容易に確認できる．したがって，(b) より，M_2 で研修医が割り当てられていない $[1,1]$ の病院の数は高々f_0 である．よって，(c) は成り立つ．

手続きより，M_2 でどの病院にも割り当てられていない研修医の矛先の病院は，研修医が割り当てられていない．その病院が $[1,1]$ であると仮定すると，M_0 よりもよい解を作ることができ，M_0 の最適性に矛盾する．その病院が $[0,1]$ で $H'_{0,1}$ に含まれていると仮定すると，この病院に研修医が割り当てられるような，下限を無視した場合の安定マッチングを作ることができる．$H'_{0,1}$ の定義より，その病院に研修医が割り当てられない，

下限を無視した場合の安定マッチングが存在するが，これはどの病院もすべての安定マッチングで同じ人数の研修医が割り当てられること [2] に矛盾する．よって，(d) は成り立つ．

(1) は S_o の作り方から，(3) は (a),(b),(d) から，それぞれ導かれる．$[1,1]$ である病院の集合を $H_{1,1}$，安定マッチングで研修医が割り当てられている病院の集合を H'，M_0 で研修医が割り当てられている病院を H'' とすると，$H_{1,1} \subseteq H''$ であるので，(a),(b),(c) より $H'' \subseteq (H' \cup H_{1,1})$ である．これらから $S_o = H' \setminus H'' = (H' \cup H_{1,1}) \setminus H''$ であり，$|H' \cup H_{1,1}| = |R| + z$ を使うと $|S_o| = |H' \cup H_{1,1}| - |H''| = |R| + z - |R| = z$ となるので，(2) が成り立つ． □

また，次の補題により，BR 最小化 HRMQ の blocking resident の数の下界を与える (証明は省略する)．

補題 4.7 *I を BR 最小化 HRMQ の例題とする．I の不足数を $z(= D(I))$，最適解の blocking resident の数を f_o とするとき，$z \le f_o$．*

S_o を，補題 4.6 の性質を満たす病院の集合とする．$S_o, S_a \subseteq H'_{0,1}$，$|S_o| = |S_a| = z$ であるので，Algorithm 3 の 5 行目より，$\sum_{h \in S_a} g(h,h) \le \sum_{h \in S_o} g(h,h)$．これと補題 4.3，補題 4.7 より，

$$f_a \le g(S_a, S_a) = \sum_{h \in S_a} g(h, S_a) \le \sum_{h \in S_a} g(h,h) \le \sum_{h \in S_o} g(h,h) \le \sum_{h \in S_o} g(S_o, S_o) = |S_o| g(S_o, S_o) = z f_o \le (f_o)^2.$$

よって，$0 \le f_a$ より $\sqrt{f_a} \le f_o$ なので，$\frac{f_a}{f_o} \le \sqrt{f_a} \le \sqrt{|R|}$． □

定理 4.5 と補題 4.2 より，以下が成り立つ．

系 4.8 *BR 最小化 HRMQ の多項式時間 $\sqrt{|R|}$ 近似アルゴリズムが存在する．*

定理 4.5 の解析の厳密性　次の 0-1 BR 最小化 HRMQ の例題を考える．研修医集合を $R = \{c_i : 1 \le i \le n\} \cup \{d_{i,j} : 1 \le i \le n, 1 \le j \le n-2\} \cup \{e_i : 1 \le i \le n\}$，病院集合を $H = \{a_i : 1 \le i \le n\} \cup \{b_i : 1 \le i \le n\} \cup \{x_k : 1 \le k \le n^2 - n\}$ とし，研修医の希望リスト，病院の上下限と希望リストを

$$\begin{array}{llllll} c_i & : & b_i \;\; a_i \;\; [[X]] \;\; \cdots & (1 \le i \le n) & a_i[0,1] & : \; c_i \;\; \cdots \;\; (1 \le i \le n) \\ d_{i,j} & : & b_i \;\; [[X]] \;\; \cdots & (1 \le i \le n, 1 \le j \le n-2) & b_i[0,1] & : \; d_{i,1} \;\; \cdots \;\; (1 \le i \le n) \\ e_i & : & b_i \;\; [[A]] \;\; [[X]] \;\; \cdots & (1 \le i \le n) & x_k[1,1] & : \; \cdots \;\; (1 \le k \le n^2 - n) \end{array}$$

とする．但し $[[X]]$ は $x_1 \cdots x_{n^2-n}$ を，$[[A]]$ は $a_1 \cdots a_n$ を表す．$g(a_i, a_i) = n+1$，$g(b_i, b_i) = n$ であり，この例題の不足数は n であるので，Algorithm 3 は $S_a = \{b_1, \cdots, b_n\}$ を選んで，blocking resident の数は $n^2 - n = |R| - \sqrt{|R|}$．最適解は $S_o = \{a_1, \cdots, a_n\}$ を選んで，blocking resident の数は $2n = 2\sqrt{|R|}$．$(|R| - \sqrt{|R|})/(2\sqrt{|R|}) = \Omega(\sqrt{|R|})$ であるので，定理 4.5 の解析は定数倍の範囲内で厳密である．

参考文献

[1] Gale, D. and Shapley, L. S.: College Admissions and the Stability of Marriage, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 69, No. 1, pp. 9–15 (1962).

[2] Gale, D. and Sotomayor, M.: Some remarks on the stable matching problem, *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 11, pp. 223–232 (1985).

[3] Gusfield, D. and Irving, R. W.: *The stable marriage problem: structure and algorithms*, MIT Press, Cambridge, MA, USA (1989).

[4] Irving, R. W., Manlove, D. and Scott, S.: The Stable Marriage Problem with Master Preference Lists, *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 156, No. 15, pp. 2959–2977 (2008).