数理解析研究所講究録
第 1652 巻 2009 年 79-84

判別式と拡張 Hensel 構成

小副川 健 (Takeshi Osoekawa)*
筑波大学 数理物質科学研究科
GRADUATE SCHOOL OF PURE AND APPLIED SCIENCES, UNIVERSITY OF TSUKUBA

Abstract

拡張 Hensel 構成は、特異点における Hensel 構成である。一方、判別式は、多項式の特異性を表す式であり、両者は深く関係することが推察される。本稿では、判別式のイニシャル多項式と、拡張 Hensel 構成の初期因子の判別式との関係を考察する。

1 はじめに

Hensel 構成は計算代数における基幹算法の一つであり、多変数多項式の因数分解や代数方程式のべき級数解法として用いられてきた。特異点における Hensel 構成は、2 変数多項式に対しては Kuo[5]、変数が 2 個以上の多項式に対しては佐々木、加古 [8] により、それぞれ提案しされており、佐々木、加古によって**拡張 Hensel 構成**と名付けられた。拡張 Hensel 構成の結果は、一般に多変数の分数べき級数になる。

[6],[1] で述べられている多変数 Newton-Puiseux 法も、そのようなべき級数展開を得る算法として知られている。この方法は入力の多項式の Newton 多面体の面に着目して展開を行う算法で、拡張 Hensel 構成とは深い関係にある。さらに [1] では判別式とその Newton 多面体が、結果のべき級数展開のドメインに関係すると述べている。

拡張 Hensel 構成の結果のドメインは初期因子によって決まることが [8] で述べられているが、判別式と拡張 Hensel 構成の関係についての体系的な研究は、未だ成されていないようである。両者は無平方性をキーワードに繋がっており、関係があると推測できる。本稿では入力多項式の判別式だけではなく、初期因子の判別式まで考えることで、この関係の一端明らかにした。特に初期因子に重複因子がある場合に、自明でない結果を得た。

2 諸定義

まず、必要な記号を定義する。

x を主変数、$u_1,\ldots,u_\ell$ を従変数とする。$\boldsymbol{u}=(u_1,\ldots,u_\ell)$ と略記する。K を標数 0 の体とし、$(\ell+1)$ 変数多項式環 $R=K[\boldsymbol{u}][x]$ を考える。$\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_\ell)\in\mathbb{Z}^\ell_{\geq 0}$ を多重指数とし、$\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{\alpha}}=u_1^{\alpha_1}\cdots u_\ell^{\alpha_\ell}$ とする。$\boldsymbol{w}=(w_1,\ldots,w_\ell)\in\mathbb{Z}^\ell$ を従変数の重みベクトルとし、$\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{\alpha}}$ に対する**$\boldsymbol{w}$-次数**を内積 $\boldsymbol{\alpha}.\boldsymbol{w}=\sum_{i=0}^{\ell}\alpha_i w_i$ で定義する。全次数変数 t を導入し、$u_i\mapsto t^{w_i}u_i$ とすると、$\boldsymbol{w}$-次数は t の指数として計算される。つまり $F(x,u_1,\ldots,u_\ell)\in R$ に対し、$F(x,t^{w_1}u_1,\ldots,t^{w_\ell}u_\ell)$ とすると、各項の t の指数が$\boldsymbol{w}$-次数となる。

$$f=\sum_{\boldsymbol{\alpha}} c_{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{\alpha}}\in K[\boldsymbol{u}]\qquad (c_{\boldsymbol{\alpha}}\neq 0) \tag{1}$$

*osoken@math.tsukuba.ac.jp

に対して f の$\boldsymbol{w}$-次数を $\mathrm{Deg}_w(f) = \min\{\boldsymbol{\alpha}.\boldsymbol{w} \mid c_{\boldsymbol{\alpha}} \neq 0\}$ で定義し、

$$\mathrm{in}_w(f) = \sum_{\boldsymbol{\beta}} c_{\boldsymbol{\beta}} \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{\beta}} \qquad (c_{\boldsymbol{\beta}} \neq 0, \boldsymbol{\beta}.\boldsymbol{w} = \mathrm{Deg}_w(f)) \tag{2}$$

を、f の $\boldsymbol{w}$ に関するイニシャル多項式と呼ぶ。また、$\mathrm{Deg}_w(0) = -\infty$ としておくとよい。

$F(x,\boldsymbol{u}) \in R$ の判別式を $\mathrm{Res}_x(F, \frac{\partial F}{\partial x})$ で定義し、$\mathrm{Dis}_x(F)$ と表す。

2.1 拡張 Hensel 構成の概要

ここでは、拡張 Hensel 構成の概要、特に Newton 多項式の計算を簡単に説明する。拡張 Hensel 構成の算法の詳細な説明は [8],[7] などを参照されたい。

$F(x,\boldsymbol{u}) \in R$ をモニック、無平方な多項式、$\boldsymbol{w} \in \mathbb{Z}^\ell$ を重みベクトルとし、この二つを入力とする。n を F の x に関する次数とする。x の指数を e_x で、t の指数を e_t でそれぞれ表し、$F(x, t^{w_1}u_1, \ldots, t^{w_\ell}u_\ell)$ の各項の指数ベクトルを $(e_x, e_t)-$ 平面上にプロットする。

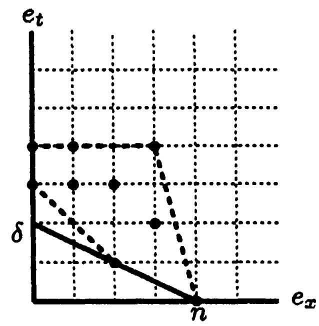

図 1: Newton 多項式の計算

F をモニックとしているので、$(n,0)$ にはいつも点がある。プロットされた点の凸包を取り、点 $(n,0)$ を含む凸包の下辺を延長した直線を考える。この直線を Newton 線と呼び、その e_t 切片を δ とする。Newton 線上の点に対応する項の和を F の $\boldsymbol{w}$ に関する **Newton 多項式**と呼び、$\mathrm{New}_w(F)$ と表す。Newton 多項式は定義より $((\delta/n)e_x + e_t)-$ 斉次である。

$F(x, t^{w_1}u_1, \ldots, t^{w_\ell}u_\ell)$ の各項をプロットした様子が図 1 のようになった場合、その凸包は点線で、Newton 線は実線で描かれたものになる。

$\mathrm{New}_w(F)$ を次式を満たすように因数分解する。

$$\begin{cases} \mathrm{New}_w(F(x,\boldsymbol{u})) = G_1^{(0)}(x,\boldsymbol{u}) \cdots G_r^{(0)}(x,\boldsymbol{u}) & (r \geq 2) \\ \gcd(G_i^{(0)}, G_j^{(0)}) = 1 & (^\forall i \neq j) \end{cases} \tag{3}$$

この因数分解は、多項式の範囲で止めてもよいし、$\overline{K[\boldsymbol{u}]}[x]$ まで拡大してもよい。$\mathrm{New}_w(F)$ が斉次式であることより、各 $G_i^{(0)}$ も斉次式となる。各 $G_i^{(0)}$ を初期因子と呼ぶ。

$\hat{n} = n/\gcd(n,\delta)$ とし、次のイデアル $I_k \subset K[\boldsymbol{u}][x,t]$ を考える。

$$I_k = \langle x^n, x^{n-1}t^{\delta/n}, x^{n-2}t^{2\delta/n}, \ldots, t^{\delta}\rangle \times \langle t^{k\hat{n}}\rangle \tag{4}$$

このとき、次が成り立つ。

$$F(x, t^{w_1}u_1, \ldots, t^{w_\ell}u_\ell) \equiv G_1^{(0)}(x, t^{w_1}u_1, \ldots, t^{w_\ell}u_\ell) \cdots G_r^{(0)}(x, t^{w_1}u_1, \ldots, t^{w_\ell}u_\ell) \mod I_1 \tag{5}$$

さらに $k = 1, \ldots$ に対して以下の式が成り立つように、各 $G_i^{(k-1)}$ に F の高次項を振り分けていく。

$$F(x, t^{w_1}u_1, \ldots, t^{w_\ell}u_\ell) \equiv G_1^{(k)}(x, t^{w_1}u_1, \ldots, t^{w_\ell}u_\ell) \cdots G_r^{(k)}(x, t^{w_1}u_1, \ldots, t^{w_\ell}u_\ell) \mod I_{k+1} \tag{6}$$

一般に (6) は $k \to \infty$ まで成り立ち、次式は F の分解を与える。

$$F(x,\boldsymbol{u}) = G_1^{(\infty)}(x,\boldsymbol{u}) \cdots G_r^{(\infty)}(x,\boldsymbol{u}) \tag{7}$$

$G_i^{(\infty)}$ を Hensel 因子と呼ぶ。初期因子ひとつに対して Hensel 因子がひとつ定まるので、本稿ではこの関係のことを $G_i^{(0)} \xrightarrow{EHC} G_i^{(\infty)}$ と書く。

3 判別式と Newton 多項式

本節では入力の多項式の判別式と、Newton 多項式との関係を考察していく。

両者の定義から、次の命題が直ちに得られる。

命題 1.

$$\mathrm{Dis}_x(F) = \mathrm{Dis}_x(\mathrm{New}_w(F)) + (\boldsymbol{w}\text{-次数に関する高次項}). \tag{8}$$

以下は簡単な例である。

例 1. $F = x^3 + ux^2 + u^3vx - u^3v^3$ とし、$\boldsymbol{w} = (-1,1)$ とする。F の判別式を計算すると、以下の式が得られる。

$$\mathrm{Dis}_x(F) = \underline{-u^8v^2 + 4u^9v^3} - 4u^6v^3 + 18u^7v^4 + 27u^6v^6 \tag{9}$$

一方 F の $\boldsymbol{w}$ に関する Newton 多項式とその判別式はそれぞれ次のようになる。

$$\mathrm{New}_w(F) = x^3 + ux^2 + u^3vx \quad , \quad \mathrm{Dis}_x(\mathrm{New}_w(F)) = -u^8v^2 + 4u^9v^3 \tag{10}$$

F の判別式の下線部が Newton 多項式の判別式になっており、それ以外の項は$\boldsymbol{w}$-次数で高次になっていることが確かめられる。

一般に、入力の多項式が無平方であっても、Newton 多項式も無平方になるとは限らない。無平方でない多項式の判別式は 0 であり、$\mathrm{Deg}_w(0) = -\infty$ としていたので、命題 1 は Newton 多項式が無平方でない場合も成り立つが、ここから有用な情報は得られそうにない。そこで以下では、重みベクトル $\boldsymbol{w}$ に対して次の概念を導入し、それぞれの場合に分けて考察していく。

定義 1. $F(x,\boldsymbol{u}) \in R$ と $\boldsymbol{w} \in \mathbb{Z}^\ell$ に対して、$\mathrm{New}_w(F)$ が無平方のとき $\boldsymbol{w}$ が**正則**であるといい、$\mathrm{New}_w(F)$ が無平方でないとき $\boldsymbol{w}$ が**非正則**であるという。

ある多項式に対して重みベクトルが正則かそうでないかを判定するには、その Newton 多項式の判別式が 0 かどうかを見ればよい。一般に、一つの多項式に、正則な重みベクトルと非正則な重みベクトルが混在する。例 1 の多項式について、そのことを確かめたのが次の例である。

例 1. (続き) 先程と同様、$F=x^3+ux^2+u^3vx-u^3v^3$ とする。F の、重みベクトル $(1,-2)$ に関する Newton 多項式とその判別式はそれぞれ

$$\mathrm{New}_{(1,-2)}(F)=x^3-u^3v^3 \quad , \quad \mathrm{Dis}_x(\mathrm{New}_{(1,-2)}(F))=27u^6v^6 \tag{11}$$

となり、$(1,-2)$ は F に対して正則であることが確かめられる。一方 F の、重みベクトル $(1,2)$ に関する Newton 多項式とその判別式は、

$$\mathrm{New}_{(1,2)}(F)=x^3+ux^2 \quad , \quad \mathrm{Dis}_x(\mathrm{New}_{(1,2)}(F))=0 \tag{12}$$

であり、$(1,2)$ は F に対して非正則である。

3.1 正則な場合

与えられた多項式 F に対して、重みベクトル $\boldsymbol{w}$ が正則な場合、命題 1 から直ちに次の命題が得られる。

命題 2. $F\in R$ に対して $\boldsymbol{w}$ が正則のとき、次式が成り立つ。

$$\mathrm{in}_w(\mathrm{Dis}_x(F))=\mathrm{Dis}_x(\mathrm{New}_w(F)) \tag{13}$$

例 1. (続き) (11) で確認したとおり、重みベクトル $(1,-2)$ は F に対して正則であった。(9) より、$\mathrm{in}_{(1,-2)}(\mathrm{Dis}_x(F))$ を計算すると、

$$\mathrm{in}_{(1,-2)}(\mathrm{Dis}_x(F))=27u^6v^6=\mathrm{Dis}_{(1,-2)}(F)$$

である。

3.2 非正則な場合

重みベクトル $\boldsymbol{w}$ が非正則な場合、対応する Newton 多項式の判別式は 0 である。一方、入力多項式の判別式の、$\boldsymbol{w}$ に関するイニシャル多項式が 0 になることはない。この場合、次の定理が成り立つ。

定理 1. $F\in R$ に対して $\boldsymbol{w}$ が非正則であるとし、$\mathrm{New}_w(F)$ の平方部分、無平方部分をそれぞれ $G_{sq}^{(0)}, G_{fr}^{(0)}$ とする。$G_{sq}^{(0)} \xrightarrow{EHC} G_{sq}^{(\infty)}$ とし、$\mathrm{Dis}_x(\mathrm{New}_w(G_{sq}^{(\infty)}))\neq 0$ であったとき、次式が成り立つ。

$$\mathrm{in}_w(\mathrm{Dis}_x(F))=(-1)^l\mathrm{Dis}_x(G_{fr}^{(0)})\mathrm{Dis}_x(\mathrm{New}_w(G_{sq}^{(\infty)}))\mathrm{Res}_x(G_{fr}^{(0)},G_{sq}^{(0)})^2 \tag{14}$$

ただし、$l=\deg_x(G_{fr}^{(0)})\cdot\deg_x(G_{sq}^{(0)})$ とする。

定理の証明の準備として、次の補題を示す。

補題 1. $\boldsymbol{w}$ を任意の重みベクトルとし、$\mathrm{New}_w(F)=gh$ (g,h は互いに素) と分解されたとする。$g\xrightarrow{EHC}G$, $h\xrightarrow{EHC}H$ としたとき、次式が成り立つ。

$$\mathrm{in}_w(\mathrm{Dis}_x(F))=(-1)^l\mathrm{in}_w(\mathrm{Dis}_x(G))\mathrm{in}_w(\mathrm{Dis}_x(H))\mathrm{Res}_x(g,h)^2 \tag{15}$$

ただし $l=\deg_x(G)\cdot\deg_x(H)$ とする。

証明　終結式の性質により、$\mathrm{Dis}_x(F)$ は以下のように変形できる。

$$\begin{aligned}
\mathrm{Dis}_x(F) &= \mathrm{Dis}_x(GH) = \mathrm{Res}_x(GH, \frac{\partial GH}{\partial x}) = \mathrm{Res}_x(GH, \frac{\partial G}{\partial x}H + G\frac{\partial H}{\partial x}) \\
&= \mathrm{Res}_x(G, \frac{\partial G}{\partial x}H + G\frac{\partial H}{\partial x})\ \mathrm{Res}_x(H, \frac{\partial G}{\partial x}H + G\frac{\partial H}{\partial x}) \\
&= \mathrm{Res}_x(G, \frac{\partial G}{\partial x}H)\ \mathrm{Res}_x(H, G\frac{\partial H}{\partial x}) \\
&= \mathrm{Res}_x(G, \frac{\partial G}{\partial x})\ \mathrm{Res}_x(G,H)\ \mathrm{Res}_x(H, \frac{\partial H}{\partial x})\ \mathrm{Res}_x(H,G) \\
&= \mathrm{Dis}_x(G)\ \mathrm{Res}_x(G,H)\ \mathrm{Dis}_x(H)\ \mathrm{Res}_x(H,G) \\
&= (-1)^l \mathrm{Dis}_x(G)\ \mathrm{Dis}_x(H)\ \mathrm{Res}_x(G,H)^2
\end{aligned} \tag{16}$$

ここで、$l = \deg_x(G)\cdot\deg_x(H)$ である。
(16) の最初の式と最後の式のイニシャル多項式をそれぞれ考えると、

$$\begin{aligned}
\mathrm{in}_w(\mathrm{Dis}_x(F)) &= \mathrm{in}_w((-1)^l\mathrm{Dis}_x(G)\ \mathrm{Dis}_x(H)\ \mathrm{Res}_x(G,H)^2) \\
&= (-1)^l\mathrm{in}_w(\mathrm{Dis}_x(G))\ \mathrm{in}_w(\mathrm{Dis}_x(H))\ \mathrm{in}_w(\mathrm{Res}_x(G,H))^2
\end{aligned} \tag{17}$$

となる。また、g, h が互いに素であることから、$\mathrm{in}_w(\mathrm{Res}_x(G,H)) = \mathrm{Res}_x(g,h)$ が得られ、ここから直ちに (15) が得られる。 □

定理 1 の証明　補題の g に $G_{fr}^{(0)}$ を、h に $G_{sq}^{(0)}$ をそれぞれ代入し、$G_{fr}^{(0)} \xrightarrow{EHC} G_{fr}^{(\infty)}$ とすると、(15) から次式が得られる。

$$\mathrm{in}_w(\mathrm{Dis}_x(F)) = (-1)^l\mathrm{in}_w(\mathrm{Dis}_x(G_{fr}^{(\infty)}))\mathrm{in}_w(\mathrm{Dis}_x(G_{sq}^{(\infty)}))\mathrm{Res}_x(G_{fr}^{(0)}, G_{sq}^{(0)})^2 \tag{18}$$

命題 2 より、$\mathrm{in}_w(\mathrm{Dis}_x(G_{fr}^{(\infty)})) = \mathrm{Dis}_x(G_{fr}^{(0)})$ がいえるので、(18) は以下のように書き換えられる。

$$\mathrm{in}_w(\mathrm{Dis}_x(F)) = (-1)^l\mathrm{Dis}_x(G_{fr}^{(0)})\mathrm{in}_w(\mathrm{Dis}_x(G_{sq}^{(\infty)}))\mathrm{Res}_x(G_{fr}^{(0)}, G_{sq}^{(0)})^2 \tag{19}$$

さらに定理の仮定 $\mathrm{Dis}_x(\mathrm{New}_w(G_{sq}^{(\infty)})) \neq 0$ と命題 2 から、$\mathrm{in}_w(\mathrm{Dis}_x(G_{sq}^{(\infty)})) = \mathrm{Dis}_x(\mathrm{New}_w(G_{sq}^{(\infty)}))$ が成り立つ。以上より

$$\mathrm{in}_w(\mathrm{Dis}_x(F)) = (-1)^l\mathrm{Dis}_x(G_{fr}^{(0)})\mathrm{Dis}_x(\mathrm{New}_w(G_{sq}^{(\infty)}))\mathrm{Res}_x(G_{fr}^{(0)}, G_{sq}^{(0)})^2 \tag{20}$$

が得られた。 □

例 1 の多項式と、非正則な重みベクトル $(1,2)$ に対して、定理 1 の (14) の計算をしてみると、次のようになる。

例 1. (続き)　$F = x^3 + ux^2 + u^3vx - u^3v^3$ の $\boldsymbol{w} = (1,2)$ に対する Newton 多項式は $\mathrm{New}_w(F) = x^3 + ux^2 = x^2(x+u)$ である。$\mathrm{New}_w(F)$ の平方部分、無平方部分をそれぞれ $G_{sq}^{(0)} = x^2$, $G_{fr}^{(0)} = x + u$ とする。これらの初期因子に対して拡張 Hensel 構成を適用すると、$G_{sq}^{(0)}$ から、以下の Hensel 因子が得られる。

$$G_{sq}^{(0)} \xrightarrow{EHC} G_{sq}^{(\infty)} = x^2 + u^2vx + uv^3x + u^3v^2x - u^2v^3 + \cdots \tag{21}$$

ここで、$G_{sq}^{(\infty)}$ に対して再び Newton 多項式を取り、その判別式を計算すると次式が得られる。

$$\mathrm{New}_w(G_{sq}^{(\infty)}) = x^2 + u^2vx - u^2v^3 \quad , \quad \mathrm{Dis}_x(\mathrm{New}_w(G_{sq}^{(\infty)})) = -u^4v^2 - 4u^2v^3 \tag{22}$$

また、$\mathrm{Res}_x(G_{fr}^{(0)}, G_{sq}^{(0)}) = u^2$ であり、$\mathrm{Dis}_x(G_{fr}^{(0)})$ である。以上の結果を (14) に代入すると

$$\begin{aligned} \mathrm{in}_w(\mathrm{Dis}_x(F)) &= -u^8v^2 - 4u^6v^3 = (-u^4v^2 - 4u^2v^3)\cdot(u^2)^2 \\ &= \mathrm{Dis}_x(G_{fr}^{(0)})\mathrm{Dis}_x(\mathrm{New}_w(G_{sq}^{(\infty)}))\mathrm{Res}_x(G_{fr}^{(0)}, G_{sq}^{(0)})^2 \end{aligned} \tag{23}$$

が得られる。

4 まとめと今後の課題

本稿では入力の多項式の判別式と Newton 多項式の関係を考察した。重みベクトルを、正則な場合と非正則な場合にわけ、それぞれに対して与えられた多項式の判別式のイニシャル多項式と、Newton 多項式の判別式の関係を明示的に与えた。特に重みベクトルが非正則な場合は、判別式が重複度を持つ初期因子から計算される Hensel 因子に関係することを示した。

今後は本稿で明らかになった判別式の性質をさらに精密に解析し、それを応用した、よりよい算法の構築を目指したい。

参考文献

[1] F. Beringer, and F. Richard-Jung, Multi-variate Polynomials and Newton-Puiseux Expansions, Symbolic and Numerical Scientific Computation (2001).

[2] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, and A. V. Zelevinsky, *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants*, Birkhäuser (1994).

[3] D. Inaba, *A Study on Multivariate Polynomial Factorization and Analytic Continuation*, PhD thesis, University of Tsukuba (2005).

[4] M. Iwami, Analytic factorization of the mutivariate polynomial, Proc. CASC'03 (Computer Algebra in Scientific Computing) (eds.Ganzha, V. G., Mayr, E. W. and Vorozhtsov, E. V.) (2003).

[5] T.-C. Kuo, Generalized Newton-Puiseux theory and Hensel's lemma in $\mathbb{C}[[x,y]]$, *Canad. J. Math.*, **XLI** (1989), 1101–1116.

[6] J. McDonald, Fiber polytopes and fractional power series, *J. of Pure and Applied Algebra*, **104** (1995), 213–233.

[7] T. Sasaki, and D. Inaba, Hensel construction of $F(x, u_1, \ldots, u_\ell), \ell \geq 2$, at a singular point and its applications, *ACM SIGSAM Bulletin*, **34** (2000), 9–17.

[8] T. Sasaki, and F. Kako, Solving multivariate algebraic equation by Hensel construction, *Japan J. Indus. Appl. Math.*, **16** (1999), 257–285.

[9] G. M. Ziegler, *Lectures on Polytopes*, Springer-Verlag (1995).

[10] 小副川健 $k(u_1, u_2, \ldots, u_\ell)[x]$ における拡張 Hensel 構成, 京都大学数理解析研究所講究録, 第 1568 巻 (2006).

[11] 小副川健, 佐々木建昭 従変数に重みをつけた拡張 Hensel 構成と Newton 多面体, 京都大学数理解析研究所講究録, 第 1514 巻 (2005).