数理解析研究所講究録
第 1652 巻 2009 年 102-111

Computations of noncommutative Alexander invariants

逆井卓也
TAKUYA SAKASAI*
東京大学大学院数理科学研究科
GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES, THE UNIVERSITY OF TOKYO†
桐生裕介
YUSUKE KIRIU
スタジオフォンズ
STUDIO PHONES‡

Abstract

結び目や 3 次元を中心とした低次元多様体の位相幾何学において, Alexander 多項式と呼ばれる, 空間の基本群から計算される不変量が重要な役割を果たす. その Alexander 多項式の非可換精密化としては, X. S. Lin や和田昌昭氏によって定義されたねじれ Alexander 不変量が代表的であるが, 本研究では, T. Cochran や S. Harvey によって定義された非可換 Alexander 不変量と呼ばれる不変量に注目する. Cochran や Harvey はその不変量が Alexander 多項式では拾うことのできない多くの情報を持っていることを理論的に示したが, 定義に現れる環の非可換性により, 不変量の直接計算は難しいものとなっている. 本稿では, 自由べき零群の群環に話を絞ることで, K. Madlener-B. Reinert による非可換 Gröbner 基底とそれに関連する Syzygy 加群の理論がアルゴリズムの上では直接計算に応用可能であることを紹介し, それらの計算機への実装に関して, これまでの状況を報告する.

1 はじめに

位相幾何学 (トポロジー) における基本的な問題として, 位相空間の「分類」が挙げられる. 具体的には, 2 つの位相空間が与えられたとき, それが位相同型か, もしくはホモトピー同値などの位相同型より弱い意味での同値関係が成立するか, といった問題を解決する方法を開発し, それを実行することである. しかしながら, 真に一般的な位相空間を考えてしまうと, とりとめのないことになってしまうため, しばしば考える対象を限定して理論を構築していく.

いま, 考える対象として多様体, それも 3 次元を中心とする低次元多様体を選ぶと, それぞれの多様体に対し定義される基本群とよばれる群が分類を行う上で重要な不変量となる. 多様体が位相空間としてコンパクトであることを仮定すれば, 基本群は有限表示可能な群となり, 計算機との関連が現れてくる. (以下に述べる事実を含め, 群と低次元多様体論に関する基礎的な事柄やそれらの間の関連については [17] を参照.)

*Supported by KAHENHI (No. 19840009) and 21st century COE program at Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo.

†sakasai@ms.u-tokyo.ac.jp
‡yusuke.kiriu@gmail.com

次に考えるべきは有限表示された群たちを区別する方法であるが，一般に，有限表示可能な群の同型問題は決定不能であることが知られているので，万能な方法は期待できない．そこで，完全な不変量を手にすることをあきらめ，2 つの群が同型**でない**ことを示すための道具として，情報を落としつつ，判定のしやすい形 (わかりやすい量) へと変えていくことを考える:

$$\boxed{\text{(性質のよい) 位相空間}} \xrightarrow{\text{基本群}} \boxed{\text{(有限表示可能な) 群}} \xrightarrow[\text{代数的操作}]{\text{不変量}} \boxed{\text{わかりやすい量}}$$

本稿では，以下

位相空間	$\cdots$	結び目や絡み目の補空間,
群	$\cdots$	結び目群, 絡み目群,
不変量	$\cdots$	Alexander 多項式とその精密化

の場合を考え，それらの計算機との関わりを考察していく．なお，結び目やその結び目群の同型問題については決定可能であることが知られている．前半は絡み目，絡み目群，Alexander 多項式とその精密化に関する簡単な紹介を行い，後半は，Alexander 多項式の精密化のひとつであって T. Cochran [3] や S. Harvey [6, 7] によって定義された非可換 Alexander 不変量の，計算機による直接計算を目標とした現在の研究の状況を報告する．

2　絡み目と絡み目群

結び目 (絡み目) 理論とは位相幾何学の一分野であり，「いくつかの円周の 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ への埋め込みの様子」を考察の対象とする．n 個の円周の埋め込みを **n-成分の絡み目**と呼び，1-成分の絡み目をとくに**結び目**と呼ぶ (図 1, 2)．

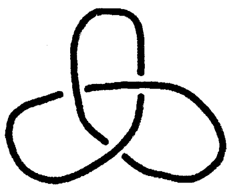


図 1: 三葉結び目

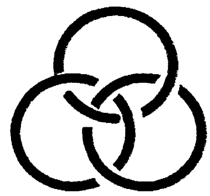


図 2: Borromean 絡み目

詳細な定義はここでは省略するが，2 つの絡み目は互いに連続変形 (アンビエントアイソトピー) によってうつりあうとき**同型**であるという．結び目理論に関する文献は和書，洋書ともに非常に豊富にあるが，ここでは [8] と [5] のみを挙げるにとどめる．とくに，[5] は本稿のテーマである Alexander 多項式やその精密化であるねじれ Alexander 多項式について詳しく述べている本である．

絡み目は絵 (図式) に描くことができるため，直感的には非常に扱いやすい対象であるといえる．しかしながら，その図式は見方によって千変万化することを忘れてはいけない．そのため，分類を行う際には，図式の変化に依存しない**位相的な量**を取り出す必要がある．次の絡み目群はその代表的なものである．

定義 2.1 (絡み目群, 結び目群) 絡み目 $L \subset \mathbb{R}^3$ に対し，その補空間 $\mathbb{R}^3 - L$ から一点 p をとり，それを基点とする．このとき，

$$\begin{aligned} G(L) &:= \pi_1(\mathbb{R}^3 - L, p) \\ &= \{f : ([0,1], \{0,1\}) \to (\mathbb{R}^3 - L, p) \mid f \text{ は連続写像}\}/\text{連続変形 (ホモトピー)} \end{aligned}$$

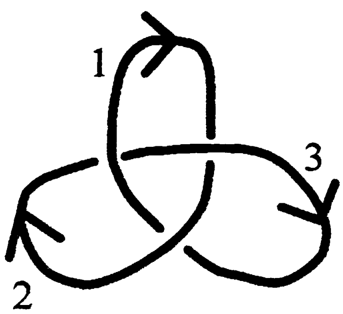
とすると, 群 $G(L)$ の同型類は p のとり方によらずに定まる. その同型類 (これも $G(L)$ と書くことにする) を L の**絡み目群**という. なお, L が結び目のときは $G(L)$ を L の**結び目群**という.

定義より, 絡み目群はその絡み目を表す図式の取り方によらずに定まる不変量となる. とくに, 2 つの絡み目 L_1, L_2 に対し,

$$\begin{array}{ccc} G(L_1) \not\cong G(L_2) & \Longrightarrow & L_1 \not\cong L_2 \\ \text{絡み群が異なる} & & \text{絡み目として異なる} \end{array}$$

が成立する. この逆は一般には成立しないが, 「素な結び目」と呼ばれる, 基本的なクラスの結び目に対しては, 逆も成立することが知られている. 絡み目群は非常に強力な不変量であるといえる. そのような不変量を絡み目の任意の図式から具体的に書き下す, すなわち絡み目群の表示を与える方法のひとつとして, **Wirtinger のアルゴリズム**と呼ばれるものがある. 次の例においてその方法を述べる.

例 2.2 (Wirtinger のアルゴリズム) K を図 1 にある三葉結び目とする.



(1) 絡み目全体に向きを入れる.
(2) 各弧に番号をつける. 各番号 i に対し, 生成元 x_i を用意する.
(3) 各交点のまわりで, 反時計周りに, **符号つき**で番号を読み, 関係式を求める. ここで, 入ってくる弧に対し $+$, 出ていく弧に対し $-$ の符号をつけるとする. 読み始める場所はどこでもよい.
<u>例</u> 左上の交点のまわり: $2, 1, -3, -1$ より,
語 $x_2x_1x_3^{-1}x_1^{-1}$ が関係式として得られる.

この手順により, K の絡み目群 (結び目群) の表示

$$G(K) = \{x_1, x_2, x_3 \mid x_1x_3x_2^{-1}x_3^{-1},\ \ x_2x_1x_3^{-1}x_1^{-1},\ \ x_3x_2x_1^{-1}x_2^{-1}\}$$

が得られる.

3 Alexander 多項式とその非可換精密化

この節では, 有限表示可能な群の不変量である Alexander 多項式とその精密化について簡単に復習する. Alexander 多項式は 1920 年代に定義された古典的な不変量であり, 今もなお盛んに研究されている. 定義の仕方もいろいろな方法があるが, ここでは, 計算機と最も密接に関連していると思われる自由微分を用いた方法を説明する. 以下, 群 Γ に対し, $\mathbb{Z}\Gamma$ を Γ の整係数の群環とする.

F_l を $\{x_1, \ldots, x_l\}$ で生成される自由群とするとき, **自由微分**

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : F_l \longrightarrow \mathbb{Z}F_l \qquad (i = 1, \ldots, l)$$

とは

$$\frac{\partial e}{\partial x_i} = 0 \quad (e \in F_l \text{ は単位元}), \qquad \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{i,j}, \qquad \frac{\partial uv}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} + u\frac{\partial v}{\partial x_i} \quad (u, v \in F_l)$$

によって特徴付けられる写像のことである ([2] を参照). 最後の等式は通常の関数の微分の Leibniz 則と少し違う点に注意する.

さて, G を有限表示可能な群とし, その有限表示 $\langle x_1,\ldots,x_l \mid r_1,\ldots,r_m\rangle$ をひとつとる. ここで r_i $(i=1,\ldots,m)$ は $x_1^{\pm},\ldots,x_l^{\pm}$ たちで表される語である. いま, r_i たちを $\{x_1,\ldots,x_l\}$ で生成された自由群 F_l の元とみなすことで自由微分を行うことができ, 行列

$$\left(\frac{\partial r_j}{\partial x_i}\right)_{i,j} \in M(l,m;\mathbb{Z}F_l)$$

が得られる. この行列の各成分に自然な準同型 $\rho_G:\mathbb{Z}F_l\to\mathbb{Z}G$ を施すことにより **Jacobi 行列**と呼ばれる行列

$$J_G := {}^{\rho_G}\!\left(\frac{\partial r_j}{\partial x_i}\right)_{i,j} \in M(l,m;\mathbb{Z}G)$$

ができる. ここで, 行列の左上の ρ_G は各成分に ρ_G を施したことを意味する. さらに, $H:=G^{\mathrm{ab}}/\mathrm{torsion}$ (ここで $G^{\mathrm{ab}}:=G/[G,G]$ は G の可換化) とし, 自然な写像 $\mathfrak{a}:\mathbb{Z}G\to\mathbb{Z}H$ を各成分に施し, **Alexander 行列**

$$A_G := {}^{\mathfrak{a}\circ\rho_G}\!\left(\frac{\partial r_j}{\partial x_i}\right)_{i,j} \in M(l,m;\mathbb{Z}H)$$

を構成する. いま, $H\cong\mathbb{Z}^n=\langle t_1,\ldots,t_n \mid t_it_jt_i^{-1}t_j^{-1}\ \ 1\le i,j\le n\rangle$ であるとすると, $\mathbb{Z}H$ は n-変数の整係数 Laurent 多項式環と同型である. (なお, G が n-成分の絡み目群なら $H\cong\mathbb{Z}^n$ である.) $\mathbb{Z}H$ が一意分解整域であることに注意すると, A_G のすべての $(l-1)$-小行列式で生成されるイデアルの最大公約元 $\Delta(G)$ をとることができる. こうして得られた $\Delta(G)$ は, 実は $\pm H$ の不定性を除いて G の表示に依存しておらず, G の不変量となる.

定義 3.1 (Alexander [1]) $\Delta(G)$ を G の Alexander 多項式という.

例 3.2 K を三葉結び目とすると, 例 2.2 で見たように

$$G(K)=\{x_1,x_2,x_3 \mid x_1x_3x_2^{-1}x_3^{-1},\ \ x_2x_1x_3^{-1}x_1^{-1},\ \ x_3x_2x_1^{-1}x_2^{-1}\}$$

であった. 可換化写像 $G\to H=G(K)^{\mathrm{ab}}\cong\mathbb{Z}$ によって x_1,x_2,x_3 がすべて生成元 t にうつることに注意すると,

$$A_{G(K)}=\begin{pmatrix}1 & t-1 & -t\\ -t & 1 & t-1\\ t-1 & -t & 1\end{pmatrix}$$

となる. これより, $\Delta(G)=1-t+t^2$ であることがわかる.

注意 3.3 [8] の巻末にある結び目のデータ表を見ればわかるように, 最小交点数が 10 以下の素な結び目に対して, Alexander 多項式はいくつかの例外を除いて, ほとんどの結び目を分類することができる.

ここで, Alexander 多項式の定義や例 3.2 の計算を振り返ってみると, 可換化 $\mathfrak{a}:\mathbb{Z}G\to\mathbb{Z}H$ の操作が状況を非常に簡単にしているということが観察できる. 逆に考えると, この部分で, G に関する情報が落ちてしまっているとみることもできる. その落ちてしまった情報を拾うため, これまでにいくつかの Alexander 多項式の非可換精密化が開発されてきた.

(I) ねじれ Alexander 不変量 (Lin [10], 和田 [18], 1990 年代)

ねじれ Alexander 不変量ははじめ X. S. Lin によって結び目群に対し定義され, その後に和田昌昭氏によって一般の有限表示可能群まで拡張された. (定義が若干異なるので注意が必要.) 有限表示可能群 G の非可換な情報を得るため, 群 G の行列表現

$$\rho : G \longrightarrow GL(n, R) \qquad \begin{pmatrix} R: \text{可換な一意分解整域} \\ R = \mathbb{Z}, \mathbb{F}_p (p \text{ は素数}) \text{ など} \end{pmatrix}$$

をとり, Jacobi 行列 J_G の各成分を ρ を用いて行列に置き換える. こうして行列に成分をもつ行列ができる. それをひとつの大きな行列と思い, 古典的な Alexander 多項式と似たような方法を用いることによって有理式 $\Delta_\rho(G) \in \mathrm{Frac}(RH)$ が G の表示に依らずに定まる. ここで, $\mathrm{Frac}(RH)$ は R-係数の H の群環の商体である. $\Delta_\rho(G)$ を (G, ρ) に対するねじれ Alexander 不変量という. (詳しい定義は [5] を参照.)

このままでは G のみの不変量とはいえないが, 表現と対応するねじれ Alexander 不変量の「総体」を考えることで, G に対し自然な不変量が得られる. (例えば, $R = \mathbb{F}_p$ のとき, 表現 $G \to GL(n, R)$ の総数は有限個である. それらの表現と対応するねじれ Alexander 不変量の組の集合を G の不変量と思う.)

(II) 非可換 Alexander 不変量 (Cochran [3], Harvey [6, 7], 2004)

非可換 Alexander 不変量ははじめ T. Cochran によって結び目群に対し定義され, その後に S. Harvey によって一般の有限表示可能群まで拡張された. この精密化のポイントは, 群 G とその可換化 H の間にある群 Γ で「性質のよいもの」を考えることである:

$$G \longrightarrow \Gamma \longrightarrow H.$$

ここでいう「性質のよいもの」とは, $\mathbb{Z}\Gamma$ が (右) **Ore 整域** となっているもののことであり, このとき, $\mathbb{Z}\Gamma$ は (右) **分数体** $\mathcal{K}_\Gamma := \mathbb{Z}\Gamma(\mathbb{Z}\Gamma - \{0\})^{-1}$ をもつ. 一般に $\mathcal{K}_\Gamma$ は非可換体である. 環の Ore 性については 4 節でくわしく述べる.

例 3.4 任意の群に対し, 有理べき零商や有理可解商などといった自然な方法で, $\mathbb{Z}\Gamma$ が Ore 整域であるような群 Γ が得られる. これらを用いることで, (総体をとることなく単体で,) G に対する自然な不変量を構成することができる.

不変量の計算は, 可換体のときに用いた行列式の非可換体版として知られる, $\mathcal{K}_\Gamma$ 上の **Dieudonné determinant** を用いることで, Alexander 多項式と同様の方法により「理論上は」計算が可能である. 詳しくは [16] を参照.

(I), (II) の不変量を用いることで, 通常の Alexander 多項式では捕まえることのできない情報がいくつも得られている. Alexander 不変量は群の表示から純粋に代数的計算をして得られる不変量であるので, 原則として計算機と相性がよく, 理論と実験の両方の側面から研究が進められるのが望ましい. 現状では,

- ねじれ Alexander 不変量については, 理論的, 実験的の両方の側面から盛んに研究が行われている. 実験を行う際には, しばしば計算機が用いられる.
- 非可換 Alexander 不変量については, 理論的にはいろいろな情報が引き出せることがわかっているが, <u>一般的な状況での具体的な計算が難しく, 実験的にはあまり研究されていない</u>. (計算機のうまい利用法がまだわかっていない.)

これを踏まえて, 本研究の目的は次の問題に取り組むことである.

問題 3.5 非可換 Alexander 不変量について, その具体的計算を計算機を用いて行う方法を開発せよ.

4 非可換 Alexander 不変量の計算に向けて

前節で述べた, 非可換 Alexander 不変量の計算において不可欠な Dieudonné determinant とは次のようなものである. (詳しくは [15] を参照.)

定理 4.1 (Dieudonné determinant) (非可換) 体 $\mathcal{K}$ に対し, 以下の性質によって特徴づけられる準同型写像

$$\det : GL(\mathcal{K}) \longrightarrow (\mathcal{K}^{\times})^{\mathrm{ab}}$$

が存在する:

1. $\det I = 1$,
2. 行列 A のある行に $a \in \mathcal{K}^{\times}$ を左からかけて得られる行列を A' とするとき, $\det A' = a \cdot \det A$.
3. 行列 A のある行に他の行たちの左 $\mathcal{K}$-一次結合を加えて得られる行列を A' とするとき, $\det A' = a \cdot \det A$.

定義を見れば明らかなように, Dieudonné determinant は可換環における行列式と同じ振る舞いをするものである. よって計算を行うには, 基本変形によって対角型の行列に変形し ($\mathcal{K}$ は体であるから, 「理論上は」可能), 対角成分をすべて掛ければよい.

こうして, 先程挙げた問題 3.5 はまず次の問題に帰着する.

問題 4.2 Dieudonné determinant の**直接的**かつ**具体的**な計算方法を見つけよ.

この問題に対する最初のステップとして, 非可換群の中では扱いやすい自由群のべき零商の場合を考えることにする. この群は, 結び目に応用するには結び目を Seifert 膜と呼ばれる曲面で切り開いて考えるなどの一工夫が必要となるが, 2-成分以上の絡み目群とは相性がよい. 定義を確認すると, n 個の元 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ で生成される自由群 F_n に対し, その降中心列 $\{\Gamma^i(F_n)\}_{i\geq 1}$ を帰納的に

$$\Gamma^1(F_n) := F_n, \qquad \Gamma^i(F_n) := [\Gamma^{i-1}(F_n), F_n] \quad (i \geq 2)$$

($[\cdot\,,\cdot]$ は交換子群を意味する)

で定め, $N_k(F_n) := F_n/\Gamma^k(F_n)$ としたものが**自由群の k-番目のべき零商**である. 各 $k \geq 2$ に対し, 群環 $\mathbb{Z}N_k(F_n)$ は Ore 整域であることが知られており ([13] を参照), $\mathbb{Z}N_k(F_n)$ の右商体 $\mathcal{K}_{N_k(F_n)}$ を考えることができる.

これらの環や体の計算機との相性を考えてみると, まず, 群環 $\mathbb{Z}N_k(F_n)$ での演算は難しくないことがわかる. 実際, $N_k(F_n)$ の各元 ($\mathbb{Z}N_k(F_n)$ における単項式) に対して, 標準形があり, 積に関する公式を具体的に書き下すことができる.

例 4.3 $N_3(F_3)$ において,

標準形: $x_1^a x_2^b x_3^c [x_1, x_2]^d [x_1, x_3]^e [x_2, x_3]^f$,

積公式:
$$\left(x_1^{a_1} x_2^{b_1} x_3^{c_1} [x_1, x_2]^{d_1} [x_1, x_3]^{e_1} [x_2, x_3]^{f_1}\right) \cdot \left(x_1^{a_2} x_2^{b_2} x_3^{c_2} [x_1, x_2]^{d_2} [x_1, x_3]^{e_2} [x_2, x_3]^{f_2}\right)$$
$$= x_1^{a_1+a_2} x_2^{b_1+b_2} x_3^{c_1+c_2} [x_1, x_2]^{d_1+d_2-b_1a_2} [x_1, x_3]^{e_1+e_2-c_1a_2} [x_2, x_3]^{f_1+f_2-c_1b_2}.$$

一般の場合も, 積公式は指数たちの多項式によって表すことができる.

一方で, 難しいのは $\mathcal{K}_{N_k(F_n)}$ において「分数」を取り扱うときである. 具体的には,

$$(f_1 g_1^{-1}) \cdot (f_2 g_2^{-1}),$$
$$(f_1 g_1^{-1}) + (f_2 g_2^{-1})$$

をどのように計算する (fg^{-1} のかたちで表す) かということが問題となる. この段階で計算が可能であることを保証するのが $\mathbb{Z}N_k(F_n)$ の Ore 性である.

定義 4.4 (Ore 性と Ore 対) (1) 環 R が **Ore 性**をもつとは, 任意の $f, g \in R$, $g \neq 0$ に対し, $f g' = g f'$ を満たすような $f', g' \in R$, $g' \neq 0$ が存在することをいう.
(2) (1) において, (f', g') を (f, g) に対する **Ore 対**と呼ぶ. (一意的ではないことに注意.)

R が商体を持つとき, Ore 性は商体において $g^{-1} f = f' g'^{-1}$, すなわち分母と分子の位置の交換がいつでもできることを意味する.

これを踏まえると, $\mathcal{K}_{N_k(F_n)}$ における $(f_1 g_1^{-1}) \cdot (f_2 g_2^{-1})$ の計算は, (f_2, g_1) に対し, Ore 対 (f, g) をとり,

$$\begin{aligned}(f_1 g_1^{-1}) \cdot (f_2 g_2^{-1}) &= f_1 (g_1^{-1} f_2) g_2^{-1} \\ &= f_1 (f g^{-1}) g_2^{-1} \\ &= (f_1 f)(g_2 g)^{-1}\end{aligned}$$

とすればよいことがわかる. 同様に, (g_1, g_2) に対する Ore 対 (g_1', g_2') をとって計算すると,

$$(f_1 g_1^{-1}) + (f_2 g_2^{-1}) = (f_1 g_2' + f_2 g_1')(g_1 g_2')^{-1}$$

となることがわかる.

こうして, 我々の問題 (問題 3.5, 4.2) は最終的に次に帰着する.

問題 4.5 Ore 整域が与えられたとき, その環において Ore 対を (できるだけ簡単に) ひとつ見つける方法を開発せよ.

一般の群環で Ore 性を持つものに対して, Ore 対を具体的に書くアルゴリズムが存在するかどうかは知られていない. しかし, 今考えている自由群のべき零商 $N_k(F_n)$ のような, 有限生成 torsion free べき零群の群環については, Ore 対を計算するアルゴリズムが存在する. 具体的には, Madlener や Reinert による

- べき零群環上の**非可換 Gröbner 基底** (Madlener-Reinert [11], 1997),
- それに付随する **Syzygy 加群**の理論 (Reinert [14], 2000)

を用いて,

$$fx - gy = 0 \qquad (f, g \in \mathbb{Z}N_k(F_n))$$

の形の線形方程式の非自明な解 (x, y) を**ひとつ**求めればよい.

べき零群環上の非可換 Gröbner 基底 (Madlener-Reinert [11]) について

基本構成は, 通常の多項式環の Gröbner 基底と同様であるが, 次の 2 方向に一般化している:

- 積の非可換化,
- 多項式環から Laurent 多項式環へ.

後者は, 単項式全体集合上で定義される単項式順序が存在しないことを意味する. すなわち, 単項式をかけたときに highest term の場所が移りうる. この操作を **saturation** と呼ばれる操作を定義することで解決している. saturation を用いて, 全体で定義された (単項式順序でない) 項の順序に加え, **tuple order** と呼ばれる「局所的な」単項式順序を組み合わせて **s-polynomial** を定め, 計算を進めていく.

注意 4.6 一般に, Gröbner 基底と Syzygy 加群の理論を用いると, 線形方程式の解の基底 (**すべて**の解) を計算することができる. しかし, いま考えたいのは, 非可換な状況で $fx - gy = 0$ の形の方程式の非自明な解を**ひとつ**求めることである. (このことは可換環の場合はあまりにも自明.) そのため, 今の段階では相当な遠回りをしている可能性がある.

この注意を踏まえ, 今回 Mathematica を用いて実装したプログラムでは, Gröbner 基底を求めるフローを中心に, saturation や s-polynomial として出てくる多項式を簡約していくなかで Ore 対が現れるかどうかを逐次チェックし, 見つかった場合, 計算を中止させ, Ore 対を出力させている. しかしながら, それでも必要とされる計算の量は (感覚的に) 膨大であり, 実際に計算できるのは, 生成元の数や項数が少ない場合のみとなっている.

5 まとめと課題

本研究の現状は以下のとおり:

1. 非可換 Alexander 不変量を求めるのに必要な Dieudonné determinant の計算に関して, 非可換 Gröbner 基底と Syzygy 加群を用いた Ore 対計算プログラムを作成した. しかし, 必要となる計算の量は膨大であり, アルゴリズムに関してまだまだ改良の余地がある.
2. 結び目理論と数式処理の現状を鑑みると,
   - 結び目理論で行う算出過程は, 構文レベルでの理解が重要,
   - 現存する幾つかの不変量算出過程も対として見た場合の相関関係をより明瞭にすることも大切.

   そこで, 結び目理論の構文レベルでの理解を推進するために、数式処理ソフトを使用した構文の統制を進めている. その中で, Alexander 多項式やねじれ Alexander 不変量などの代表的な結び目の不変量を実装した.

なお, 結び目理論研究支援ソフトウェアとしては, 落合豊行氏による Knot2000 (K2K) [12], 児玉宏児氏による KNOT [9] などが代表的である. [9] はねじれ Alexander 不変量の計算も実装している. ねじれ Alexander 不変量の計算に関しては, S. Friedl による KnotTwister [4] というソフトウェアもよく知られている.

そして, 目下の課題は以下のとおり:

課題 5.1 Ore 対の計算プログラムのアルゴリズムを見直し, 高速化を図る. また, Ore 対を直接求めるアルゴリズムが存在するかを調べる.

課題 5.2 普遍的な Ore 対の公式を導出する. (万能でなくとも実用に耐えれば十分.)

課題 5.2 については現在のところ, 非可換の中で最も簡単な場合である $\mathbb{Z}N_3(F_n)$ において, 次のような 2 項と m 項の多項式の場合の公式が得られている.

命題 5.3 $\mathbb{Z}N_3(F_n)$ において, 等式

$$(1+x)\sum_{i=1}^{m}\left(y_i \prod_{j=1,j\neq i}^{m} y_j^{-1}(1+x)y_j\right) = (y_1+y_2+\cdots+y_m)\left(\prod_{i=1}^{m} y_i^{-1}(1+x)y_i\right)$$

が成立する.

この命題を出発点として, より一般の場合の公式を導出したいと考えている.

6 おわりに

研究集会において, 他分野であるのにもかかわらず, 快く講演する機会を与えて下さった藤本光史先生に深く感謝いたします. また, 講演後に皆様より様々なご意見や励ましを頂くことができ, 大変に有意義かつ刺激的な時間を過ごすことができました. 重ねて感謝いたします.

参 考 文 献

[1] J. Alexander, *Topological invariants of knots and links*, Trans. Amer. Math. Soc. 30 (1928), 275–306.

[2] J. Birman, *Braids, Links and Mapping Class Groups*, Ann. of Math. Stud. 82, Princeton Univ. Press, 1974.

[3] T. Cochran, *Noncommutative knot theory*, Algebr. Geom. Topol. 4 (2004), 347–398.

[4] S. Friedl, KnotTwister, http://www.labmath.uqam.ca/~friedl/ よりダウンロード可能 (2008 年 3 月 1 日現在).

[5] 北野晃朗, 合田洋, 森藤孝之,「ねじれ Alexander 不変量」, 数学メモアール 5, 日本数学会, 2006.

[6] S. Harvey, *Higher-order polynomial invariants of 3-manifolds giving lower bounds for the Thurston norm*, Topology 44 (2005), 895–945.

[7] S. Harvey, *Monotonicity of degrees of generalized Alexander polynomials of groups and 3-manifolds*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 140 (2006), 431–450.

[8] 河内明夫 編,「結び目理論」, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1990.

[9] 児玉宏児, KNOT, http://www.math.kobe-u.ac.jp/~kodama/ よりダウンロード可能 (2008 年 3 月 1 日現在).

[10] X. S. Lin, *Representations of knot groups and twisted Alexander polynomials*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 17 (2001), 361–380.

[11] K. Madlener, B. Reinert, *A generalization of Gröbner basis algorithms to nilpotent group rings*, Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput. 8 (1997), 103–123.

[12] 落合豊行, Knot 2000 (K2K), http://amadeus.ics.nara-wu.ac.jp/~ochiai/ よりダウンロード可能 (2008 年 3 月 1 日現在).

[13] D. Passman, *The Algebraic Structure of Group Rings*, John Wiley and Sons (1977).

[14] B. Reinert, *Solving systems of linear one-sided equations in integer monoid and group rings*, Proceedings of the 2000 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (St. Andrews), 281–287 (electronic).

[15] J. Rosenberg, *Algebraic K-theory and its applications*, Graduate Texts in Mathematics 147, Springer-Verlag, 1994.

[16] T. Sakasai, *The Magnus representation and higher-order Alexander invariants for homology cobordisms of surfaces*, To appear in Algebr. Geom. Topol.

[17] J. Stillwell, *Classical topology and combinatorial group theory* (second edition), Graduate Texts in Mathematics 72, Springer-Verlag, 1993.

[18] M. Wada, *Twisted Alexander polynomial for finitely presentable groups*, Topology 33 (1994), 241–256.